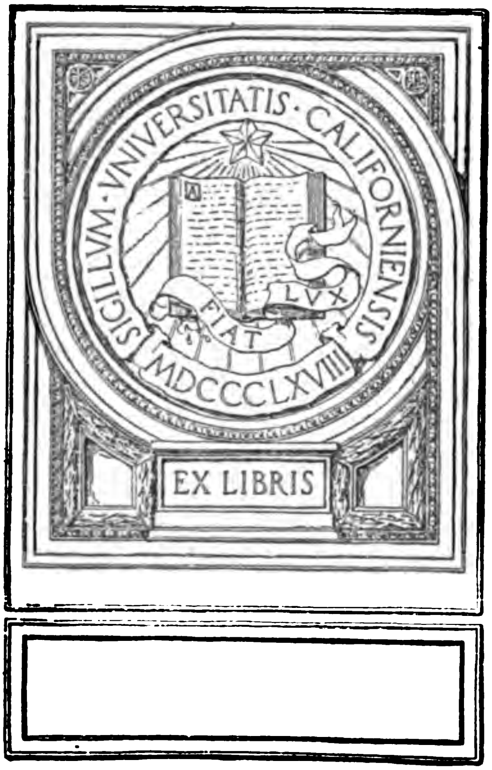

SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

# LEHRBUCH

DER

# DARSTELLENDEN GEOMETRIE.

VON

**DR. CHRISTIAN WIENER,**

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR AN DER GROSSH. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITER BAND.

KRUMME LINIEN (ZWEITER TEIL) UND KRUMME FLÄCHEN.
BELEUCHTUNGSLEHRE, PERSPEKTIVE.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1887.

# Vorwort.

In dem vorliegenden zweiten und abschließenden Bande werden die krummen Linien und Flächen behandelt. Ich benutze das Vorwort, um einige Gesichtspunkte zu bezeichnen, welche mich bei der Bearbeitung dieses Stoffes leiteten, und um auf einige Einzelnheiten hinzuweisen.

*Die Untersuchungen wurden möglichst geometrisch geführt.* Der Begriff der Ordnung einer Linie und einer Fläche und die Bestimmung der Anzahl ihrer Schnittpunkte und der Ordnung ihrer Schnittkurve aus den Ordnungszahlen der gegebenen Gebilde sind analytischer Natur. Deswegen wurde die Benutzung derartiger analytischer Sätze möglichst beschränkt und nur bei Gebilden höherer Ordnung zugelassen. Insbesondere wurden die Flächen zweiten Grades rein geometrisch behandelt und dabei als Kegelschnittsflächen betrachtet, d. i. als solche Flächen, welche von jeder reell schneidenden Ebene in einem reellen, und, wie dann durch das Polarsystem nachgewiesen wird, von jeder imaginär schneidenden in einem imaginären Kegelschnitte getroffen werden. Daß solche Flächen von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten werden oder von der zweiten Ordnung sind, leuchtet ein; daß sie aber die einzigen solche Flächen sind, kommt als Satz der Analysis hier nicht in Betracht.

Zur *Darstellung* der Gebilde erschien, wenn es sich um die Auflösung von Aufgaben über dieselben handelte, meist das *Grund- und Aufrißverfahren* als das zweckmäßigere und wurde daher in diesen Fällen angewendet. Doch zeigte sich bei geradlinigen Flächen häufig das im ersten Bande angegebene *Verfahren der zwei parallelen Spurebenen*, welches nur *einer* Projektion bedarf, als das zweckmäßigere. — Wenn aber die Darstellung wesentlich zur Veranschaulichung dient, findet man die *axonometrische* und *schiefe Projektion* und die *Perspektive* vorteilhaft, und es wurden deshalb auch diese Darstellungsweisen mit ihren wichtigsten Anwendungen behandelt. Ebenso ist die zur Veranschaulichung dienende *Bestimmung des Schattens und der Beleuchtung* zugefügt, und insbesondere sind die

Linien gleicher Beleuchtungsstärke oder die *Lichtgleichen* für alle Arten der betrachteten Flächen, und zwar in geometrischer Weise, untersucht und konstruirt.

Ein wesentliches Gewicht wurde auf die *leichte und genaue Verzeichnung der Kurven* gelegt. Diese Anforderung wird nicht sowohl durch die Konstruktion einer großen Anzahl allgemeiner Punkte erfüllt, als vielmehr durch die Bestimmung der ausgezeichneten Punkte, wie der Scheitel, der Wendepunkte, der Spitzen, und durch die Ermittelung der Tangenten und der Krümmungskreise in denselben.

Zur *Tangentenbestimmung* diente das im ersten Bande, Nr. 204, von mir angegebene *Verfahren der ähnlichen Figur*, wie ich es passend zu bezeichnen glaube. Nach demselben können aus jeder Konstruktion einer Kurve Tangentenkonstruktionen abgeleitet werden, die zu finden keine Schwierigkeit bietet, bei denen aber die Kunst in der Herstellung möglichst großer Einfachheit besteht. Formelentwickelungen sind dabei nicht notwendig, aber manchmal zur Vereinfachung der Konstruktion nützlich. Andererseits wurde in vielen Fällen der *Krümmungskreis* der vorkommenden Kurven bestimmt, und zwar vorzugsweise für den Scheitel, in welchem er wegen seiner vierpunktigen Berührung besonderen Vorteil bietet, jedoch auch manchmal für den allgemeinen Punkt. Es geschah dies geometrisch durch Ermittelung des Verhältnisses des Kontingenzwinkels und des Kurvenelementes oder des Verhältnisses der unendlich kleinen Koordinaten des benachbarten Punktes. Nur in einem Falle, bei der Bestimmung der Evolute der Sinuslinie, wurde die analytische Formel des Krümmungshalbmessers benutzt, weil in diesem Falle die geometrische Bestimmung nicht zu einer Vereinfachung geführt hatte. Jene Formel aber wurde geometrisch hergeleitet.

Im Einzelnen bemerke ich, daß der im ersten Bande gegebene Begriff des *Unendlichkleinen als Grenznull* auch bei den Flächen durchgeführt wurde. — In Bezug auf die abwickelbaren Flächen weise ich darauf hin, daß ich *eine nicht geradlinige abwickelbare Fläche* angegeben habe. Es wird zwar in der Analysis bewiesen, daß die abwickelbaren Flächen geradlinig sind; dieser Beweis beruht aber auf der Voraussetzung, daß die Fläche in jedem ihrer Punkte eine Berührungsebene besitze. Macht man aber diese Voraussetzung nicht, so verliert der Satz seine Giltigkeit. Die hier gegebene nicht geradlinige Fläche wird durch die Kurve der Weierstraßschen Cosinusfunktion erzeugt; und es hat weder diese Kurve in einem allgegemeinen Punkte eine Tangente, noch die erzeugte Fläche eine Berührungsebene. Ich habe die Gleichung der Fläche, welche zwei

unendliche Reihen enthält, aufgestellt; und obgleich die Fläche selbst nicht modellirbar ist, so ist sie doch vorstellbar und wird durch das Modell des Ausgangsvielflachs veranschaulicht, dessen Abbildung ich zugefügt habe.

Bei den *Flächen zweiten Grades* spielt die im ersten Bande gegebene *Imaginärprojektion* eine große Rolle. Durch sie erst wird der Satz allgemein wahr, daß zwei Kegelschnitte einer Fläche zweiten Grades perspektive Kurven bilden. Es wurde eine Anzahl von Konstruktionsaufgaben gelöst, bei denen imaginäre Kegelschnitte vermittelst ihrer ideellen Darstellung ebenso leicht wie reelle behandelt werden. Die Imaginärprojektion einer Fläche zweiten Grades **F** aus einem Punkte $P$, d. i. auch die der **F** in Bezug auf den Punkt $P$ konjugirte Fläche, ermöglicht die Fortsetzung von Kurven, wie der Berührungskurve mit einem Kegel, über den Punkt hinaus, in welchem sie in einer Projektion abzubrechen scheinen. Und solche konjugirte Flächen kann man auch noch zu anderen Flächen bilden, nämlich zu allen denjenigen, welche aus Kegelschnitten entstehen können, deren Ebenen durch einen und denselben Punkt $P$ gehen. Man wird eine solche Erweiterung bei der Umdrehungsfläche der Sinuslinie ausgeführt finden.

Bei der Bestimmung der *Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades* tritt im allgemeinen der Mißstand ein, daß für jede benutzte Hilfsebene die Verzeichnung eines Kegelschnittes notwendig erscheint. Dieser Mißstand wurde durch Ersetzen solcher wechselnden Kegelschnitte durch einen einzigen festen beseitigt. Was die Gestalt jener Schnittlinie betrifft, so wurden ihre drei Hauptformen aus den dreierlei Formen des gemeinschaftlichen Polartetraeders der beiden Flächen abgeleitet. Die Abwickelbare der Schnittlinie besitzt bekanntlich eine Doppelkurve, welche aus vier ebenen Kurvenästen von der vierten Ordnung besteht. Es wurde nun gezeigt, daß die Gestalt eines solchen Astes allein von den in derselben Ebene liegenden Elementen der sich schneidenden Flächen abhängt; und aus diesen wurde die Kurve konstruirt und untersucht.

Von anderen Flächen, welche behandelt wurden, möge noch die bisher wenig beachtete *topographische* oder *Terrainfläche* erwähnt werden, welche durch ihre Rücken- oder Rinnelinien (oder Wasserscheiden und Thalwege), durch ihre Linien des kleinsten und des größten Gefälles, und durch ihre Eigenschaften, die man nach ihrer Begründung und Verursachung als geometrische und meteorologische unterscheiden kann, großes Interesse bietet.

Auch die *Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art*, die als teilweiser Schnitt einer Regelfläche zweiten mit einer Regelfläche dritten

Grades entsteht, und die ich noch nirgends dargestellt fand, erfuhr eine besondere Untersuchung.

Die *Krümmung der Flächen* wurde eingehend behandelt, dabei auch die Eulersche Kurve in ihren drei Formen, die Krümmung des ebenen Schnittes einer Fläche in seiner Abhängigkeit von der Krümmung der Fläche, namentlich die Evoluten eines ebenen Schnittes des Kreisringes und seiner Projektionen. Sodann wurden wesentlich die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades untersucht, insbesondere ihre Projektionen auf die drei, oder in verallgemeinertem Sinne, auf die vier Hauptebenen dieser Flächen, als die Kurven einer Kegelschnittschaar, zu deren Verzeichnung die vorbereitenden Untersuchungen im ersten Bande die Grundlage bilden. Dabei spielen die sechzehn Nabelpunkte der Fläche, von denen höchstens vier reell sind, eine wesentliche Rolle, und die imaginären erwiesen sich für die Konstruktionen ebenso nützlich, wie die reellen.

Im Übrigen sei zur Gewinnung einer Übersicht über den behandelten Stoff auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen, das ich, um auch einen Einblick in die Art der Behandlung zu gewähren, eingehend gehalten habe.

Die *Figuren* sind wieder von den Zeichnungen des Verfassers photozinkographisch übertragen, außer den beiden vorletzten über die Perspektive des menschlichen Blickes, welche aus der Veröffentlichung Wollastons entnommen wurden.

Ich hatte im ersten Bande die Absicht ausgesprochen, meine *Untersuchungen über die Helligkeit der Körper* im zweiten Bande zu veröffentlichen. Ich beschäftigte mich auch seitdem ein halbes Jahr lang mit der Weiterführung dieser Arbeit, bemerkte aber dann, daß sie zu ausgedehnt für die Aufnahme in den zweiten Band werden und dessen Veröffentlichung zu sehr verzögern würde, und entschloß mich daher, sie für eine besondere Veröffentlichung vorzubehalten. Über ihren Inhalt bemerke ich, daß im ersten Teile der Arbeit auf Grundlage von Versuchen an einer gegossenen Gipsplatte die Helligkeit angegeben wird, welche eine solche Oberfläche bei jeder Richtung des einfallenden und des ausfallenden Lichtstrahles besitzt, und daß auf dieser Grundlage die Linien gleicher Helligkeit oder die Hellegleichen einer Kugel konstruirt wurden, welche durch unmittelbare Sonnenbeleuchtung und diejenigen, welche durch den Reflex eines gleichbeschaffenen Bodens von Gips entstehen. Im zweiten Teile werden ebenfalls auf Grund von Beobachtungen die Konstanten einer Formel bestimmt, welche die Helligkeit des klaren Himmels an jeder seiner Stellen und für jede Stellung der Sonne angibt. Auf dieser Grundlage habe ich sodann die Hellegleichen des klaren

Himmels konstruirt. Dieselben ziehen sich um ihre hellste und dunkelste Stelle herum, von denen die erste, außer bei der untergehenden Sonne, unmittelbar neben der Sonne, die zweite, leicht hundertmal dunklere, dieser gegenüber, aber nicht in gleicher Höhe steht. Mittelst dieser Hellegleichen habe ich auf eine nicht schwierige, aber der Natur der Sache nach viele Zeit kostende Weise die Stärke der Beleuchtung bestimmt, welche ein Flächenelement durch den klaren Himmel erfährt, und diese Bestimmungen müssen für verschiedene Stellungen des Elementes fortgesetzt und die Ergebnisse in eine zu leichtem Gebrauch geeignete Tabelle gebracht werden. Der dritte Teil bezieht sich auf die Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen; er führte mich zum Messen der Empfindungsstärke durch eine Empfindungseinheit. Die letztere ist dasselbe, wie die von Herrn Fechner in seinen Elementen der Psychophysik aufgestellte Reizschwelle, so daß ich in der Streitfrage über die Meßbarbeit oder Nichtmeßbarkeit der Empfindungsstärke zur Bejahung geführt werde und in einer solchen Messung die Lösung der vorliegenden praktischen Aufgabe finde. Bei dieser Ausdehnung der Untersuchungen, die ich zum Teil noch durch neue zu ersetzen beabsichtige, wird man es wohl gerechtfertigt finden, daß ich von meiner ursprünglichen Absicht abging, dieselben dem vorliegenden Buche einzuverleiben.

Ich übergebe nun diese Arbeit, die mir langjähriges Mühen, aber auch hohen Genuß bereitet hat, der Öffentlichkeit mit dem Wunsche, daß sie einigen Nutzen stiften möge.

Karlsruhe, 12. Mai 1887.

**Chr. Wiener.**

# Inhaltsverzeichnis.

Die vorgesetzten Zahlen bedeuten die Nummern.

## Zweiter Teil.

## I. Abschnitt.

### Die krummen Flächen im allgemeinen; der Cylinder, der Kegel, die Umdrehungsfläche und ihre Berührungsebenen; die abwickelbare Fläche im allgemeinen.

## IV. Abschnitt.

### Die Umdrehungsflächen.

## X. Abschnitt.

### Die windschiefen Flächen.

## XI. Abschnitt.

### Die Krümmung der Flächen.

## XII. Abschnitt.

### Axonometrische und schiefe Projektion, Perspektive und Reliefperspektive krummer Flächen.

---

Die im Texte in Klammern angegebenen Zahlen bedeuten die Nummern des Buches; eine zugefügte I bedeutet den ersten Band.

# I. Abschnitt.

## Die krummen Flächen im allgemeinen; der Cylinder, der Kegel, die Umdrehungsfläche und ihre Berührungsebenen; die abwickelbare Fläche im allgemeinen.

### I. Die krummen Flächen im allgemeinen, ihre Berührungsebenen und Normalen.

**1.** *Eine Fläche ist die Gesamtheit der Lagen einer sich bewegenden Linie, deren Gestalt dabei unveränderlich oder veränderlich sein kann.* Die Fläche heißt *gesetzmäßig*, wenn die sich bewegende Linie, ihre Bewegung und ihre Gestaltsänderung gesetzmäßig sind; sie heißt *stetig*, wenn dieselben stetig sind. Man findet, daß in diesen Fällen auch jedes aus der Fläche nach einem bestimmten und stetigen Gesetze abgeleitete Raumgebilde, z. B. ihr Schnitt mit einer anderen gesetzmäßigen, stetigen Fläche gesetzmäßig und im allgemeinen stetig ist. Die in einzelnen Fällen auftretenden Unstetigkeiten, wie das Abbrechen von Linien, verschwinden, wenn man verallgemeinerte Anschauungen einführt, z. B. auch die reellen Geraden beachtet, welche zwei konjugirte imaginäre Punkte verbinden. Wir werden Beispiele hiervon kennen lernen.

Bei der Entstehung der Flächen heißt die sich bewegende Linie die *Erzeugende*; ist das Bewegungsgesetz durch Punkte oder Linien gegeben, durch welche die Erzeugende stets gehen, oder durch Flächen, welche sie stets berühren soll, so heißen diese bezw. *Leitpunkte*, *Leitlinien*, *Leitflächen*.

Eine Fläche kann auch als *Einhüllende* aller Lagen einer sich bewegenden anderen Fläche, z. B. einer Ebene oder einer Kugel angesehen werden, und wir werden auch diese Entstehungsweise näher kennen lernen.

**2.** Eine *Fläche wird dargestellt* durch die gemäß der Begriffsangabe ausgeführte Darstellung einer Anzahl von *Erzeugenden*, gewöhnlich durch die beiden Projektionen derselben. Dadurch ist man auch instand gesetzt, *zu einer gegebenen Projektion eines Punktes der Fläche die andere Projektion zu finden*; man legt durch die gegebene

Projektion des Punktes die gleichnamige Projektion einer Erzeugenden, bestimmt ein- oder mehrdeutig deren andere Projektion und auf ihr die andere Projektion des Punktes.

Die Verzeichnung der *Spuren* einer Fläche, d. h. ihrer Schnitte mit den Projektionsebenen, die Verzeichnung der *Umrisse,* sowie die Unterscheidung der *sichtbaren und verdeckten Teile* der Erzeugenden tragen wesentlich zur Veranschaulichung der Fläche bei.

**3.** Die Flächen gruppirt man nach ihren Erzeugenden in *Familien.* Da man aber jede Fläche durch verschiedene Erzeugende entstehen lassen kann, so gehört eine Fläche in verschiedene Familien, und diese schließen sich gegenseitig nicht aus.

Lernen wir zunächst die häufigst vorkommenden Familien kennen:

*Eine cylindrische Fläche oder ein Cylinder entsteht durch eine Gerade, die Erzeugende e, welche parallel mit einer gegebenen Richtlinie auf*
Fig. 1. *einer gegebenen Kurve, der Leitlinie, hingleitet.* In Figur 1 ist $ABCD$ die Leitlinie $k$, $AA_1$, $BB_1$ ... sind Erzeugende $e$. Der Cylinder kann auch durch eine krumme Linie als Erzeugende entstehen, welche bei unveränderlicher Gestalt und paralleler Lage (der Sehnen und Tangenten) gegen ihre Anfangslage sich so bewegt, daß ein Punkt derselben eine Gerade, die Leitlinie, beschreibt. Dann sind $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ Lagen der Erzeugenden, $AA_1$ ist die Leitlinie. Die entstehende Fläche ist wirklich ein Cylinder; denn jeder Punkt $B$ der Erzeugenden beschreibt eine der Leitlinie parallele Gerade $BB_1$, weil $A_1B_1 \# AB$, daher $ABB_1A_1$ ein Parallelogramm ist.

Fig. 1.

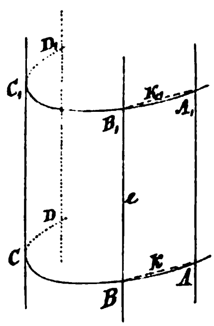


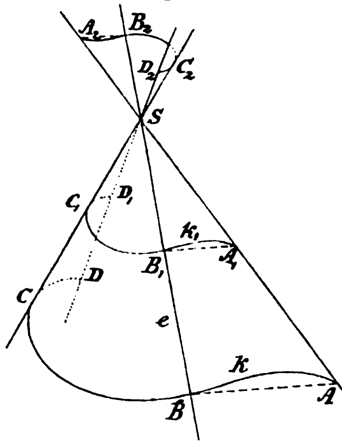

Fig. 2. **4.** *Eine Kegelfläche, konische Fläche oder ein Kegel entsteht durch eine Gerade, die Erzeugende e, welche stets durch einen festen Punkt S, die Spitze oder den Mittelpunkt der Fläche, geht und auf einer gegebenen Kurve $ABCD$ ... = k, der Leitlinie, hingleitet.* Die Spitze teilt alle Erzeugenden $ASA_2$, ..., die unbegrenzt sind, und dadurch den Kegel selbst, in zwei Teile; dieselben heißen die *Äste* des Kegels.

Der Kegel kann auch durch eine krumme Linie $ABCD$ als Erzeugende entstehen, welche sich so bewegt, daß ein Punkt $A$ derselben eine Gerade $AS$, die Leitlinie, beschreibt, daß alle Lagen der Erzeugenden ähnlich und parallel mit der Anfangslage sind, und daß endlich jedes Maß der Erzeugenden in unveränderlichem Verhältnisse zum Abstande $SA$ des Punktes $A$ von einem festen

Punkte $S$ der Leitlinie steht. Es muß also, wenn $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine zweite Lage der Erzeugenden ist, gelten

$$\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{A_1 C_1}{AC} = \cdots = \frac{SA_1}{SA}.$$

Fig. 2.




Die so entstehende Fläche ist wirklich ein Kegel, da jeder Punkt $B$ der Erzeugenden eine durch $S$ gehende Gerade beschreibt, welche nach der ersten Entstehung die Erzeugende ist. Denn wegen $AB \parallel A_1 B_1$ und wegen der obigen Verhältnisse liegen die Dreiecke $ABS$ und $A_1 B_1 S$ in einer Ebene und sind ähnlich; daher sind die Winkel bei $S$ gleich und $SB_1B$ ist eine Gerade. Gelangt $A$ nach $S$, so werden die Maße der Erzeugenden Null, sie selbst wird zu einem Punkte. Geht $A$ auf die andere Seite von $S$ nach $A_2$, so ändert $SA$ seinen Sinn; daher muß auch $AB$ seinen Sinn ändern und $B_2$ liegt auf der Geraden $BS$ auf der anderen Seite von $ASA_2$.

Fig. 3.

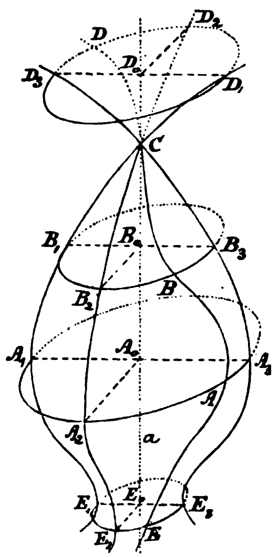



Fig. 3.

Man kann offenbar den *Cylinder als die besondere Art des Kegels* betrachten, bei welcher die Spitze ins Unendliche gerückt ist.

Ist die Leitlinie eines Kegels eine Gerade, so wird derselbe zu einer Ebene, so daß man die Ebene als einen Kegel und auch als einen Cylinder ansehen kann.

**5.** *Eine Umdrehungsfläche entsteht durch Umdrehung einer Linie als Erzeugenden um eine Gerade als Umdrehungsaxe.* Jeder Punkt $B$ der Erzeugenden $ABCD$ beschreibt dabei einen Kreis, den sog. *Parallelkreis,* dessen Ebene senkrecht auf der Axe $a$ steht und dessen Mittelpunkt $A_0$ auf der Axe liegt.

Jede durch die Axe gelegte Ebene heißt Meridianebene, ihr Schnitt mit der Fläche Meridianlinie oder *Meridian*; solche sind $A_1 B_1 C D_1$ und $A_2 B_2 C D_2$. *Alle Meridiane sind unter einander kongruent,* weil bei der Drehung der Ebene des einen um die Axe in die Ebene des andern

die in seiner Ebene liegenden Halbmesser der Parallelkreise mit denen des andern zur Deckung gelangen. Die Axe teilt jeden Meridian in zwei symmetrische Hälften. Je nachdem man diesen halben oder den ganzen Meridian als Erzeugende nimmt, ist zur Erzeugung der Fläche eine ganze oder eine halbe Umdrehung notwendig.

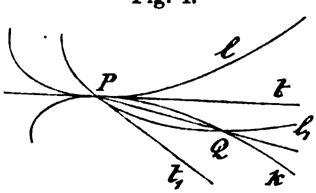
Jede Linie auf der Umdrehungsfläche, welche alle Parallelkreise schneidet, kann als Erzeugende dienen; so $ABCD$. Von einer Lage der Erzeugenden zu einer andern beschreiben alle Punkte Bogen, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, weil der Winkelabstand der Meridianebenen zweier verschiedenen Punkte der Erzeugenden wegen deren starrer Verbindung mit der Axe unveränderlich ist. — Zwei Lagen einer Erzeugenden können sich daher nicht schneiden, außer in einem Punkte der Axe, wie in $C$, oder wenn die Erzeugende einen Parallelkreis mehrmals trifft und ihn ebenso oft beschreibt.

Man kann auch einen *Kreis*, den Parallelkreis, *als Erzeugende* der Fläche annehmen; sein Mittelpunkt beschreibt die Axe, seine Ebene bleibt auf ihr senkrecht, er selbst schneidet stets eine gegebene Leitlinie. Wegen der Übereinstimmung dieser Erzeugenden gehören die Umdrehungsflächen zu einer *Familie.* Jede Meridianebene teilt jeden Parallelkreis und daher die Fläche in zwei symmetrische Hälften.

Ist die Erzeugende eine mit der Axe parallele oder eine sie im Endlichen schneidende Gerade, so entsteht der *Umdrehungs- oder gerade Kreiscylinder*, bezw. der *Umdrehungs- oder gerade Kreiskegel.* Dreht sich ein Kreis um einen seiner Durchmesser, so beschreibt er die *Kugel.*

Fig. 4. **6.** Die Tangente $t$ einer auf einer krummen Fläche liegenden Kurve $k$ in deren Punkte $P$ heißt auch eine *Tangente der Fläche* in $P$. *Jede Ebene, welche man durch die Gerade $t$ legt, die eine Kurve $k$ einer stetigen Fläche in deren Punkte $P$ berührt, schneidet die Fläche in einer Kurve $l$, welche ebenfalls von $t$ in $P$ berührt wird.* Denn dreht man diese Ebene um $P$ aus ihrer Lage heraus, so daß sie noch durch den Punkt $Q$ der $k$ geht, und schneidet sie dann die Fläche in der (durch $P$ und $Q$ gehenden) Kurve $l_1$, deren Tangente in $P$ die $t_1$ sei, und dreht man dann die Ebene wieder in ihre erste Lage zurück, wobei $Q$ und $l_1$ in $P$ und $l$ einrücken, so sind bei unendlich kleinem $PQ$ der Winkel der $t$ mit der Sehne $PQ$ der $k$, ferner

Fig. 4.

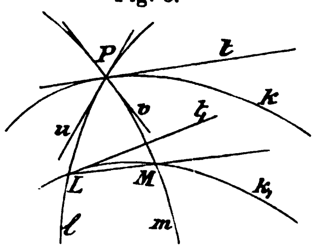


der Sehne $PQ$ der $l_1$ mit der $t_1$, und endlich wegen der Stetigkeit der Fläche, der Winkel der Tangente $t_1$ der $l_1$ mit der Tangente der $l$ in $P$ unendlich klein, also ist auch der Winkel zwischen $t$ und der Tangente der $l$ in $P$ unendlich klein, d. h. beide fallen zusammen (I, 192).

**7.** *Legt man auf einer Fläche durch einen Punkt P verschiedene Kurven, so liegen die Tangenten derselben in dem gemeinsamen Punkte P im allgemeinen in ein und derselben Ebene, die dann die Berührungs- oder Tangentialebene der Fläche in P heißt.*

Seien $k$, $l$, $m$ drei solche Kurven, $t$, $u$, $v$ bezw. ihre Tangenten in $P$, von denen keine zwei zusammenfallen. Nun ersetze man eine Fig. 5.

Fig. 5.




der Kurven, etwa $k$, durch die Schnittlinien der Fläche mit einer durch ihre Tangente $t$ gelegten Ebene, so wird diese nach der vor. Nr. ebenfalls von $t$ in $P$ berührt, und man kann die neue Linie $k$ als eine Lage einer Erzeugenden der Fläche ansehen, indem man als Erzeugende die Schnittlinien einer sich stetig bewegenden Ebene mit der Fläche annimmt. Eine benachbarte Erzeugende $k_1$ gehe durch die benachbarten Punkte $L$ und $M$ der $l$ bezw. $m$, so daß $PL$, $PM$ und dann auch $LM$ stets unendlich klein von der ersten Ordnung oder $0^1$ sind, weil das Dreieck $PLM$ endliche Winkel besitzt. Dagegen sind die Abstände $(Lu)$, $(Mv)$ des $L$ von $u$ und des $M$ von $v$ im allgemeinen $= 0^2$ (I, 236 (7)), wenn nicht von einer noch höheren Ordnung, und daher ist die Neigung der Sehne $LM$ gegen die Ebene $uv = [(Lu) - (Mv)] : LM$, und im allgemeinen $= 0^2 : 0^1 = 0^1$, wenn nicht von noch höherer Ordnung. Ist ferner $t_1$ die Tangente der $k_1$ in $L$, so ist auch der Winkel der $LM$ mit $t_1$ im allgemeinen $= 0^1$, und ebenso derjenige von $t_1$ mit $t$, so lange $t$ die Grenze von $t_1$ bildet. Dann ist auch die Neigung der $t$ gegen die Ebene $uv = 0^1$, wenn nicht von einer noch höheren Ordnung, oder es liegt $t$ in der Ebene $uv$, w. z. b. w.

Es bildet aber $t$ nicht immer die Grenze von $t_1$, nämlich dann nicht, wenn in $P$ unendlich viele Tangenten an $k$ möglich sind, wenn also $P$ ein Doppelpunkt, oder eine Spitze oder ein isolirter Punkt von $k$ ist (I, 194). Die $k_1$ geht in diesem Falle, z. B. bei der Spitze eines Kegels, in $k$ über, wie sich eine Hyperbel ($k_1$) bei Annäherung in ihre Asymptoten ($k$) hereinschmiegt, oder wie eine geschlossene Kurve ($k_1$) zu einem Punkte ($k = P$) zusammenschrumpft. Alle durch $P$ gehenden Gerade, welche in der Schmie-

gungsebene der $k$ in $P$ liegen, sind dann Tangenten der $k$ und der Fläche. In diesem Falle hat $t_1$ wegen der Stetigkeit der Fläche eine jener unendlich vielen Tangenten zur Grenze, die aber im allgemeinen nicht jene gegebene $t$, insbesondere nicht die ausgezeichnete oder eine der beiden ausgezeichneten ist. Daher ist im Falle des Doppelpunktes oder der Spitze im allgemeinen $t$ nicht die Grenze von $LM$, liegt also mit $u$ und $v$ nicht in einer Ebene. — Dieser Fall kommt bei der schon erwähnten Kegelspitze oder bei Punkten derselben Art vor, wie solche z. B. bei Umdrehungsflächen in dem Punkte des nicht rechtwinkligen Schnittes der Axe mit der sich drehenden Erzeugenden entstehen, und sodann in den Punkten eines Selbstschnittes oder einer Doppelkurve einer Fläche. Die durch $P$ gehenden Ebenen schneiden dann die Fläche in Kurven mit Doppelpunkten, oder im ersteren Falle auch in einem isolirten Punkte. Alle durch $P$ gehende Gerade sind dann Tangenten der Fläche; alle ausgezeichnete Tangenten jener Doppelkurven bilden im ersten Fall einen Kegel, im zweiten zwei Ebenen, welche ausgezeichnete berührende Flächen sind.

In einem *gewöhnlichen Punkte $P$ der Fläche bestimmt man daher ihre Berührungsebene* durch die nicht zusammenfallenden Tangenten zweier durch $P$ gehenden Kurven der Fläche in $P$.

Die Berührungsebene in $P$ hat mit der Fläche ein *Flächenelement* gemein, welches die Elemente aller durch $P$ gehenden Kurven der Fläche bei $P$ enthält. Man kann daher die Fläche als ein Vielflach mit unendlich vielen Seiten betrachten, nämlich als Grenzgestalt eines der Fläche ein- oder umschriebenen Vielflachs, von dessen Flächen die Größen stets abnehmen, und sich der Grenze Null nähern.

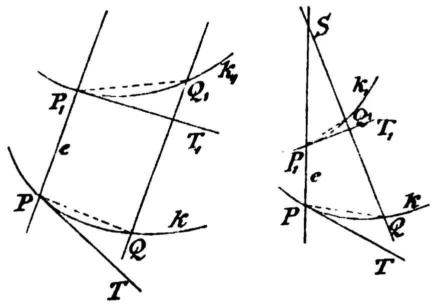
8. *Die senkrecht zur Berührungsebene einer Fläche durch deren Berührungspunkt gelegte Gerade heißt eine Normale der Fläche, jener Berührungspunkt ihr Fußpunkt $P$.* Sie wird bestimmt als Normale zur Berührungsebene oder als Schnittlinie der Normalebenen zweier durch $P$ gelegten Kurven der Fläche in $P$.

9. Der erwähnte *Umriß* einer Fläche wird für irgend eine Stelle des Auges, entsprechend wie bei Vielflachen, durch die aus dem Auge an die Fläche gezogenen Tangenten bestimmt, die man als Tangenten an die Schnittkurven der Fläche mit den durch das Auge gelegten Ebenen erhält. Sie bilden einen aus dem Auge an die Fläche gelegten berührenden Kegel, die Berührungspunkte bilden den *wahren Umriß* und der Schnitt des Kegels mit der Projektionsebene den *scheinbaren Umriß*. Bei Parallelprojektion geht der Kegel in einen Cylinder über. Ein Punkt der Fläche gehört dem Umriß an, wenn die Berührungsebene in ihm durch das Auge

geht, also bei senkrechter Projektion senkrecht auf der Projektionsebene steht.

**10.** *Eine Berührungsebene des Cylinders oder des Kegels berührt denselben in jedem Punkte der durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden, d. i. entlang derselben.* Legt man durch den Berührungspunkt $P$ die Erzeugende $e$ oder $PP_1$ und eine Kurve $k$, so be- Fig. 6.
stimmen die Tangenten dieser Linien in $P$, d. i. $e$ selbst und $PT$ die Berührungsebene. Legt man nun durch einen andern Punkt $P_1$ der $e$ eine Kurve $k_1$ auf der Fläche, so soll jene Berührungsebene auch deren Tangente $P_1T_1$ enthalten. Und wirklich, führt man durch $e$ und den Punkt $Q$ der $k$ eine Ebene, so enthält diese auch die durch $Q$ gehende Erzeugende $QQ_1$, welche die $k_1$ in $Q_1$ treffe, und ebenso die Sehnen $PQ$ und $P_1Q_1$ von $k$ und $k_1$. Läßt man nun $Q$ nach $P$ rücken, so werden zugleich die Bogen $PQ$ und $P_1Q_1$ unendlich klein, daher auch die Winkel $TPQ$ und $T_1P_1Q_1$. Da also die Tangente $P_1T_1$ einen unendlich kleinen Winkel mit der Sehne $P_1Q_1$ und daher auch mit der schneidenden Ebene $PP_1Q_1Q$, diese aber einen unendlich kleinen mit der Berührungsebene $TPP_1$ bildet, so ist auch derjenige von $P_1T_1$ mit dieser Berührungsebene unendlich klein, oder die Tangente $P_1T_1$ fällt in diese Berührungsebene, w. z. b. w.

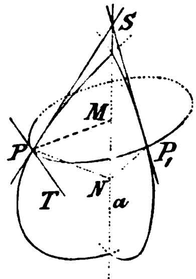
Fig. 6.




Daraus folgt auch, daß die *Spur* eines Cylinders oder eines Kegels von der Spur der Berührungsebene in der Spur der Berührungserzeugenden berührt wird.

**11.** Die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche in einem Fig. 7.
Punkte $P$ derselben ist bestimmt durch die Tangenten $PT$ und $PS$ bezw. des durch $P$ gehenden Parallelkreises und Meridianes. Da die Tangente $PT$ des Parallelkreises senkrecht auf dessen Halbmesser $PM$ und auf der Umdrehungsaxe $a$, also auf der Ebene $Pa$ steht, so *steht auch die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes.*

Fig. 7.




Die *Parallelkreistangenten* in allen Punkten eines Meridians bilden einen auf dessen Ebene senkrechten, die Umdrehungsfläche entlang des Meri-

dians berührenden *Cylinder*. Denn die Umdrehungsfläche und der Cylinder haben in $P$ die Berührungsebene $TPS$ gemein.

Die *Meridiantangenten* in allen Punkten eines Parallelkreises $PP_1$ schneiden die Axe $a$ in demselben Punkte $S$, weil sie bei der Drehung eines Meridians um $a$ in einander übergehen; sie bilden einen *Umdrehungskegel* mit der Axe $a$, der die Fläche entlang des Parallelkreises berührt.

Eine *Flächennormale* $PN$ schneidet die Axe; denn sie liegt in der Meridianebene des Berührungspunktes, da diese auf $PT$ senkrecht steht. Die Flächennormalen in allen Punkten eines Parallelkreises $PP_1 \ldots$ gehen durch denselben Punkt $N$ der Axe $a$ und bilden einen Umdrehungskegel mit $a$ als Axe.

Eine durch einen Parallelkreis aus der Spitze $N$ des zugehörigen Normalenkegels als Mittelpunkt gelegte *Kugel* berührt die Fläche entlang jenes Kreises.

Eine Umdrehungsfläche ist eine *einhüllende Fläche* von den betrachteten Cylindern, Kegeln und Kugeln, weil sie jede Lage derselben, und zwar entlang eines Meridians bezw. eines Parallelkreises, berührt.

## II. Der Cylinder und Kegel, und ihre Berührungsebenen.

**12.** *Aufg. Einen durch seine in* $\mathbf{P}_1$ *liegende Leitlinie* $k_1$ *und seine Richtlinie* $r$ *gegebenen Cylinder darzustellen.*

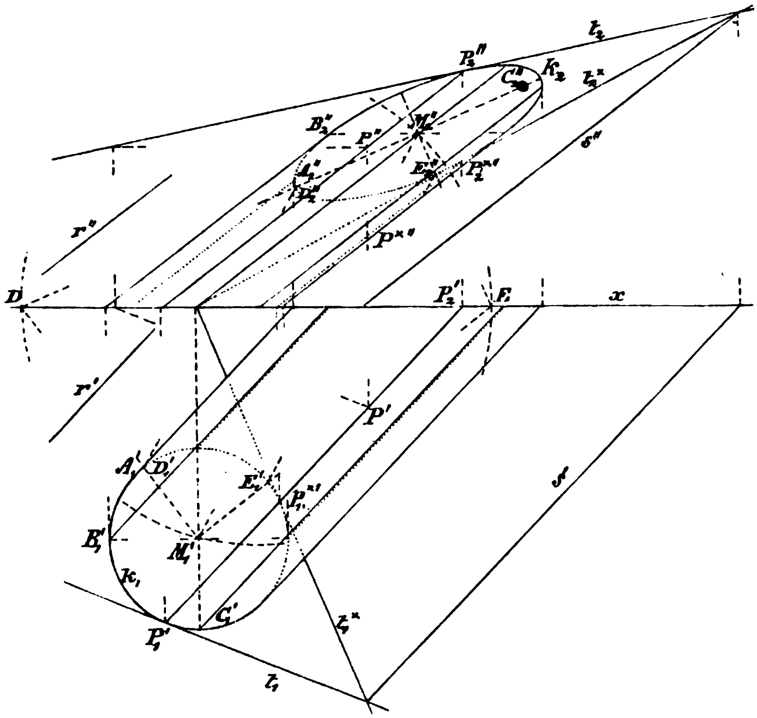
Fig. 8. *Aufl.* $k_1$ ist zugleich *die erste Spur* des Cylinders; die zweite $k_2$ findet man durch die zweiten Spuren $P_2$ der durch Punkte $P_1$ der $k_1$ parallel zu $r$ gezogenen Erzeugenden.

Die *Umrisse der ersten Projektion* sind die parallel zu $r'$ an $k_1$ gezogenen Tangenten, die *wahren Umrisse* die durch sie dargestellten Erzeugenden, wie $A_1 A_2$, entlang deren die Berührungsebenen erste projicirende Ebenen sind (10). In den zweiten Spuren dieser wahren Umrisse sind daher die Tangenten der $k_2$ senkrecht auf der Projektionsaxe $x$. Die zweiten Umrisse erhält man durch die auf $x$ senkrechten Tangenten der $k_1$; die Erzeugenden der Berührungspunkte sind die zweiten wahren Umrisse, wie $B_1 B_2$, ihre zweiten Projektionen die zweiten scheinbaren Umrisse, welche die $k_2$ berühren.

*Höchste und tiefste Punkte* der $k_2$, wie $C_2''$, in denen die Tangenten $\parallel x$ sind, erhält man durch Erzeugende aus Punkten von $k_1$, in denen die Tangenten von $k_1$ ebenfalls $\parallel x$ sind, so aus $C_1$. Denn die Berührungsebenen nach solchen Erzeugenden müssen parallel zu $x$ sein. $k_1$ und $k_2$ sind Parallelprojektionen von einander, daher,

vor und nach dem Umlegen der Projektionsebenen in einander, perspektiv-affin mit $x$ als Axe und $P_1'P_2''$ als Strahl. Ist $k_1$ ein Kreis,

Fig. 8.




so ist $k_2$ eine Ellipse, von welcher konjugirte Durchmesser aus solchen des Kreises erhalten werden, wie z. B. diejenigen mit den Endpunkten $B_2$ und $C_2$, und deren Axen $M_2D_2$, $M_2E_2$ nach denjenigen Punkten $D$, $E$ von $x$ laufen, durch welche der Kreis geht, der aus einem Punkte der $x$ als Mittelpunkt durch die Mittelpunkte $M_1$ und $M_2$ der $k_1$ bezw. $k_2$ gezogen wird (I, 377, 1)).

Man bemerkt, daß bei dem Kreiscylinder in jeder Projektion die eine Hälfte der Spur und der Erzeugenden des Cylinders *verdeckt* ist.

**13.** *Aufg. An einen gegebenen Cylinder in einem durch die eine Projektion gegebenen Punkte desselben die Berührungsebene zu legen.*

*Aufl.* Sei der Cylinder derjenige der vorigen Nr., $P'$ die gegebene erste Projektion des Berührungspunktes, so legt man durch $P'$ die erste Projektion der Erzeugenden, welche die $k_1$ in $P_1$ und $P_1^*$ trifft, zeichne die zweiten Projektionen der durch diese Punkte gehenden Erzeugenden, deren zweite Spuren $P_2$ und $P_2^*$ seien, und bestimme auf ihnen die zweiten Projektionen $P''$ und $P^{*\prime\prime}$ des Berührungspunktes. Die Berührungsebenen in jedem dieser Punkte Fig. 8.

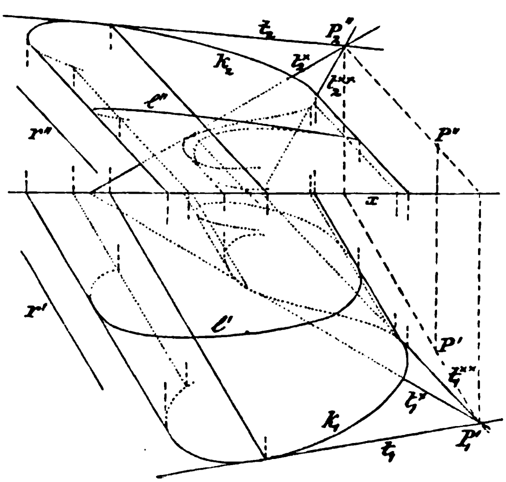
haben zu ersten Spuren bezw. die Tangenten $t_1$ und $t_1^*$ an $k_1$ in $P_1'$ und $P_1^{*\prime}$, so dafs die zweiten Spuren $t_2$ und $t_2^*$ durch Punkte auf $x$ und durch $P_2''$, bez. $P_2^{*\prime\prime}$ bestimmt sind. Ist der Punkt auf $x$ nicht erreichbar, wie bei $t_1$, so mufs man noch einen zweiten Punkt von $t_2$, etwa vermittelst einer durch $P$ gezogenen Parallelen zu $t_1$ bestimmen.

Die Schnittlinie $s$ der beiden Berührungsebenen ergibt sich ∥ $r$.

**14.** *Aufg. Einen durch die beiden Projektionen seiner Leitlinie l und seiner Richtlinie r gegebenen Cylinder darzustellen und an ihn durch einen außerhalb gegebenen Punkt P eine Berührungsebene zu legen.*

Fig. 9. *Aufl.* Durch eine Anzahl von Erzeugenden bestimme man die beiden Spuren $k_1$ und $k_2$ des Cylinders; seine scheinbaren Umrisse sind die parallel zu $r'$ an $l'$ und parallel zu $r''$ an $l''$ gezogenen Tangenten. Da $l''$ eine Spitze hat, so geht durch diese ein scheinbarer Umriß. Die Berührungspunkte der Tangenten werden nach I, 198 f. gefunden, und dadurch die Spuren der wahren Umrisse bestimmt. — Die durch $P$ gehende Berührungsebene, weil sie eine Erzeugende enthält, nach welcher sie berührt, enthält auch die durch $P$ parallel zu $r$ gezogene Gerade, deren Spuren $P_1$ und $P_2$ sind. Die aus $P_1'$ an $k_1$ und die aus $P_2''$ an $k_2$ gezogenen Tangenten $t_1$, $t_1^*$, $t_1^{**}$ bezw. $t_2$, $t_2^*$, $t_2^{**}$ sind die Spuren der Berührungsebenen und müssen sich paarweise auf $x$ treffen. Die Berührungspunkte der $k_1$ und die der $k_2$ müssen paarweise auf einer Berührungserzeugenden liegen.

Fig. 9.



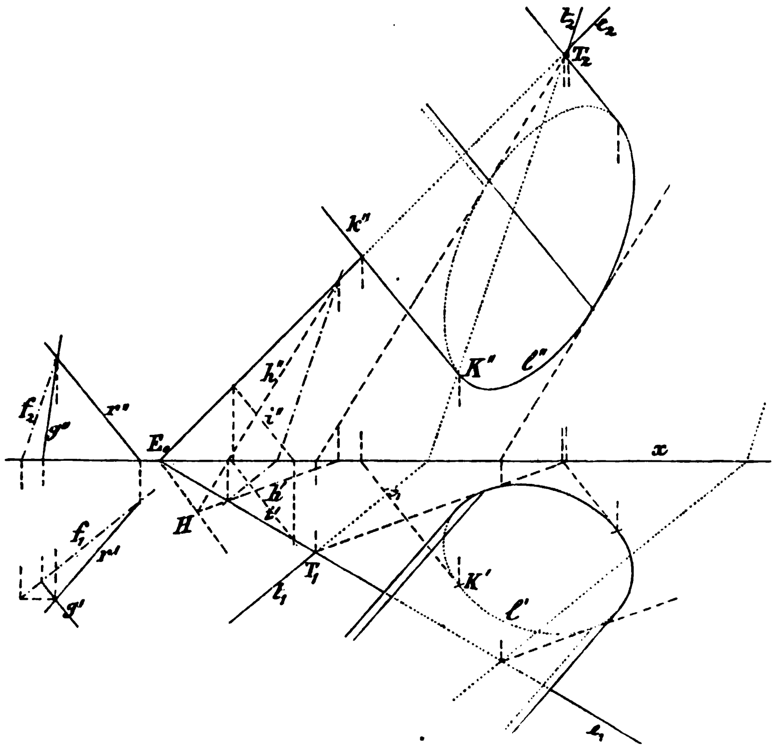

Ist $P$ eine Lichtquelle, so sind die Berührungserzeugenden die Eigenschattengrenzen und die ersten und zweiten Spuren der Berührungsebenen die Schlagschattengrenzen auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$.

**15.** *Aufg. An einen Cylinder, dessen Richtlinie r und dessen ebene Leitlinie l gegeben sind, letztere durch die Spuren $e_1$, $e_2$ ihrer Ebene* **E** *und durch ihre erste Projektion $l'$, sollen parallel zu einer gegebenen*

*Geraden g die Berührungsebenen gelegt, und es sollen seine Umrisse gezeichnet werden.*

*Aufl.* Die Berührungsebene muß mit $g$ und $r$, also mit der Ebene **F** parallel sein, welche durch die sich schneidenden $g$ und $r$ (oder durch Parallele zu ihnen) bestimmt wird, deren erste Spur $f_1$ ist, Fig. 10.

Fig. 10.



und deren zweite mit $f_2$ parallel läuft. **E** und eine zu **F** parallele Ebene schneiden sich in der Geraden $h$ ($h'$, $h''$), und mit dieser parallel hat man nur Tangenten an $l$ vermittelst der ersten Projektion zu ziehen, so bestimmen diese durch ihre auf $e_1$ und $e_2$ liegenden Spuren, wie $T_1$ und $T_2$, die mit $f_1$ und $f_2$ parallelen Spuren der Berührungsebenen, wie $t_1$ und $t_2$.

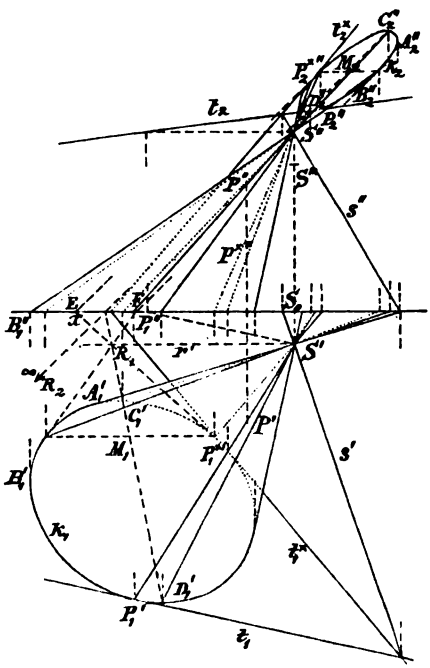
Die Umrisse in der ersten Projektion erhält man als Tangenten an $l'$ parallel zu $r'$, diejenigen in der zweiten Projektion nach der eben gelösten Aufgabe, indem man an den Cylinder berührende Ebenen parallel zur zweiten projicirenden Ebene von $r$ legt. Eine solche Ebene schneidet die **E** nach der Geraden $i$ und die parallel zu $i'$ an $l'$ gezogenen Tangenten bestimmen durch ihre Berührungspunkte,

wie $(K', K'')$, die Erzeugenden, deren zweite Projektionen, wie $k''$, den zweiten Umriß bilden. Die zweite Projektion $l''$ der $l$ kann leicht als affine Figur zu $l'$ gezeichnet werden, wobei die Affinitätsstrahlen senkrecht zu $x$ laufen und $E_0H$ die Affinitätsaxe bildet, wenn $H$ der Schnittpunkt von $h'$ und $h''$ (I, 140). Ist $l'$ eine Ellipse, so ist auch $l''$ eine solche, und wird dann leicht durch zwei konjugirte Durchmesser, oder durch die Axen, die man aus ihnen bestimmt, gezeichnet.

**16.** *Aufg. Einen durch seine in* $\mathbf{P}_1$ *liegende Leitlinie* $k_1$ *und seine Spitze* $S$ *gegebenen Kegel darzustellen.*

Fig. 11. *Aufl.* Die Leitlinie $k_1$ ist zugleich die erste *Spur* des Kegels, die zweite $k_2$ findet man mittelst Erzeugender $P_1SP_2$. Die *ersten scheinbaren Umrisse* sind die aus $S'$ an $k_1$ gezogenen Tangenten wie $S'A_1'$; die zugehörigen *wahren* Umrisse liefern Punkte von $k_2$, wie $A_2''$, in denen die Tangenten $\perp x$ stehen. Die *zweiten scheinbaren Umrisse* werden vermittelst der an $k_1$ senkrecht zu $x$ gezogenen Tangenten erhalten; sie sind die zweiten Projektionen der Erzeugenden, wie $B_1''S''B_2''$, welche von den Berührungspunkten, wie $B_1$, jener Tangenten ausgehen, und berühren die $k_2$. Die *höchsten und tiefsten Punkte* $C_2$ und $D_2$ der $k_2$ erhält man durch die zu $x$ parallelen Tangenten an $k_1$, und durch die Erzeugenden aus deren Berührungspunkten $C_1$ und $D_1$. — Man bemerkt, daß die Erzeugenden in jeder Projektion in der Spitze ihre Sichtbarkeit wechseln, ausgenommen die Umrisse.

Fig. 11.



$k_1$ und $k_2$ sind perspektiv-kollineare Figuren mit $S$ als Mittelpunkt und mit $x$ als Axe; die durch $S'$ parallel zu $x$ gezogene Gerade $r'$ ist die Gegenaxe der $\mathbf{P}_1$. Nach Umlegung der $\mathbf{P}_2$ im $\mathbf{P}_1$, liegt für $k_1$ und $k_2$ der Kollineationsmittelpunkt $S'''$ auf $S'S''$, derart, daß $S'S''' = S_0S''$ = dem ersten Abstande des $S$ (I, 306). $S'''$ ist nützlich zur Bestimmung mancher sonst unsicheren Punkte

der $k_2$. — Wenn $k_1$ ein Kegelschnitt, so ist auch $k_2$ ein solcher; in der Figur sind beide Ellipsen. $C_2 D_2$ ist ein Durchmesser der $k_2$, $M_2$ ihr Mittelpunkt, der als Projektion von dem leicht zu bestimmenden Punkte $M_1$ der $C_1 D_1$ zu betrachten ist. Aus der durch $M_1$ parallel zu $x$ geführten Sehne der $k_1$ ergibt sich der zu $C_2 D_2$ konjugirte, mit $x$ parallele Durchmesser der $k_2$. Die Pole dieser Sehnen von $k_1$ und $k_2$ liegen bezw. auf der $r'$ der $\mathrm{P}_1$ und auf der unendlich fernen $r''$ der $\mathrm{P}_2$. — Kürzer erhält man auch so den zu $C_2'' D_2''$ konjugirten Durchmesser der $k_2$. Man schneidet die $r'$ mit $C_1' D_1'$ in $R_1$, zieht aus $R_1$ die beiden Tangenten an $R_1$, so schneiden diese auf $x$ eine Länge $EF$ gleich dem gesuchten konjugirten Durchmesser ab. Denn es projicirt sich aus $S$ auf $\mathrm{P}_1$ der Punkt $R_1$ in den unendlich fernen Punkt $R_2$ von $C_2'' D_2''$, daher die Tangenten aus $R_1$ an $k_1$ in die Tangenten aus $R_2$ an $k_2$, und diese gehen bezw. durch $E$, $F$ und durch die Endpunkte des gesuchten Durchmessers.

**17.** *Aufg. An einen gegebenen Kegel in einem durch die eine Projektion gegebenen Punkte desselben die Berührungsebene zu legen.*

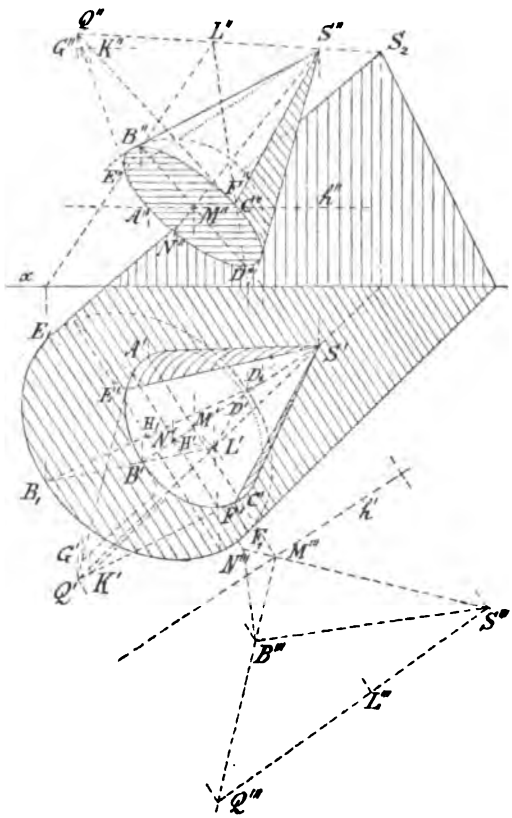
*Aufl.* Sei der Kegel derjenige der vorigen Nr., $P'$ die gegebene erste Projektion des Berührungspunktes, so bestimme man, wie in Nr. 13 für den Cylinder, mittelst der durch $P$ gehenden Erzeugenden und deren Spuren $P_1$, $P_1^*$ auf $k_1$ und $P_2$, $P_2^*$ auf $k_2$, die zugehörigen zweiten Projektionen $P''$, $P^{*''}$. Die Berührungsebenen in beiden Punkten haben dann zu ersten Spuren die Tangenten $t_1$, $t_1^*$ an $k_1$ in $P_1$, $P_1^*$, deren Schnittpunkte mit $x$ und $P_2$, $P_2^*$ die zweiten Spuren $t_2$, $t_2^*$ bestimmen, welche $k_2$ berühren müssen. Ist ein Schnittpunkt auf $x$ unzugänglich, wie der auf $t_1$, so liefert eine parallel zu $t_1$ durch $S$ (oder $P$, oder einem andern Punkt der $SP$) gezogene Gerade einen zweiten Punkt der $t_2$. Die Schnittlinie $s$ beider Ebenen muß durch $S$ gehen. Fig. 11.

**18.** *Aufg. Von einem geraden Kreiskegel sind die beiden Projektionen der Höhenlinie SM und der Halbmesser r des Grundkreises gegeben; man soll ihn darstellen, aus einem außerhalb desselben gegebenen Punkte L die beiden Berührungsebenen an ihn legen und seinen Schatten für L als Lichtquelle bestimmen.* Fig. 12.

*Aufl.* Man nehme eine zur ersten projicirenden Ebene der $SM$ parallele Projektionsebene $\mathrm{P}_3$ an, lege dieselbe in die durch $M$ gehende horizontale Ebene um, bestimme $S'''M'''$ ($M'M''' \perp S'M'$, $h' \parallel S'M'$ durch $M'''$, $h'' \parallel x$ durch $M''$, $S'S''' \perp h'$, Abstand $S'''h'$ = Abstand $S''h''$), so ist die dritte Projektion des halben Grundkreises die auf $S'''M'''$ senkrechte $M'''B''' = r$. Daraus ergibt sich vom Grundkreis die erste Projektion als Ellipse mit $A'M'C' \perp M'S'$ und $= 2r$ als große und $B'M'D'$ in $S'M'$ als kleine Axe, und

die zweite Projektion als Ellipse mit den konjugirten Durchmessern $A''C''$ ($\parallel x$) und $B''D''$ (Abst. $B''h''$ = Abst. $B'''h'$). Die Umrisse des Kegels sind die Tangenten aus $S'$ und $S''$ an jene Ellipsen und man könnte sie wie für den Cylinder in Nr. 15 bestimmen. Einfacher und genauer geschieht es durch die den Kegel entlang seines Grundkreises berührende Kugel, deren Mittelpunkt $N$ auf der Axe $SM$ mittelst $B'''N''' \perp S'''B'''$ gefunden wird, und dessen Halbmesser $= N'''B'''$ ist. Zieht man den ersten und zweiten scheinbaren Umriss dieser Kugel aus $N'$, $N''$ mit $N'''B'''$ als Halbmesser, so sind die Umrisse unseres die Kugel berührenden Kegels die aus $S'$ und $S''$ bezw. an jene Kreise gezogenen Tangenten und ihre Berührungspunkte mit dem Kreise sind auch die mit den Ellipsen. — Am genauesten und kürzesten erhält man aber den Aufriß des Kegels in der Weise wie den Grundriß, indem man die Grundellipse aus ihren Axen verzeichnet (große Axe $\perp M''S''$ und $= 2r$, kleine Axe in $M''S''$ durch eine Umlegung der zweiten projicirenden Ebene der $MS$).

Fig. 12.



Die durch $L$ zu legenden Berührungsebenen des Kegels enthalten, weil die Berührungserzeugenden durch die Spitze gehen, die Gerade $LS$; diese schneidet in $Q$ ($Q'''$, $Q'$, $Q''$) die Ebene des Grundkreises, und dessen Tangenten aus $Q$ sind in den Berührungsebenen enthalten. Dieselben zieht man am kürzesten als Tangenten aus $Q'$ und $Q''$ an die elliptischen Projektionen, bestimmt deren Berührungspunkte $E$, $F$ (etwa mittelst konjugirter Sehnen), wodurch

sich die Berührungszeugenden $SE$, $SF$ als *Eigenschattengrenzen* ergeben. Auch könnte man die Umlegung des Grundkreises mit $Q$ in eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene benutzen.

Der *Schlagschatten* des Grundkreises aus $L$ auf $\mathbf{P}_1$ ist in unserem Falle eine Ellipse, die man mittelst der ersten und zweiten Projektion bestimmt. Der Schatten $B_1D_1$ des Durchmessers $BD$ ist wieder ein Durchmesser der Schattenellipse, weil die Endtangenten zu $AC$ und unter einander parallel sind. Der Mittelpunkt $H_1$ von $B_1D_1$ ist der Schatten vom Punkte $H'$, der auf $B'D'$ durch den Strahl $L'H_1$ erhalten wird; daher ergibt sich in der Schlagschattenellipse der zu $B_1D_1$ konjugirte Durchmesser, welcher durch $H_1$ parallel zu $A'C'$ gezogen wird, als Schatten der durch $H'$ parallel zu $A'C'$ gezogenen Sehne der Grundellipse $A'B'C'$ durch Strahlen aus $L'$.

Die Schatten der Berührungsgeraden $SE$, $SF$ werden durch die Schatten $E_1$, $F_1$ der Berührungspunkte, und durch die Schatten der Spitze $S_1$ auf $\mathbf{P}_1$ und $S_2$ auf $\mathbf{P}_2$ bestimmt. Ist, wie in der Figur, $S_1$ nicht zugänglich, so schneidet man die Berührungsebenen durch eine $\parallel \mathbf{P}_1$ durch $S$ gelegte Ebene in $SG$, $SK$, und zieht mit ihnen die Schlagschatten in $\mathbf{P}_1$ parallel. Der Schlagschatten geht durch einen Bruch auf $x$ von $\mathbf{P}_1$ in $\mathbf{P}_2$ über.

**19.** *Aufg. Einen Kegel, der durch seine Spitze $S$ und* a) *die beiden Projektionen seiner unebenen Leitlinie $l$, oder* b) *durch die eine Projektion seiner ebenen Leitlinie und die Spuren von deren Ebene gegeben ist, darzustellen, und an ihn eine zu einer gegebenen Geraden $g$ parallele Berührungsebene zu legen.*

*Aufl.* Die Darstellung geschieht entsprechend der des Cylinders in Nr. 14 und 15; die Berührungsebene enthält die durch $S$ parallel zu $g$ gehende Gerade.

**20.** *Übungsaufgaben.*

1) Die beiden Spuren eines Umdrehungscylinders, dessen Axe und Axenabstand der Erzeugenden gegeben sind, und seine Eigen- und Schlagschattengrenzen auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ bei gegebener Richtung der parallelen Lichtstrahlen zu bestimmen.

2) Die zweite Spur eines Kegels zu bestimmen, dessen erste Spur eine Hyperbel mit einer auf $x$ senkrechten Hauptaxe ist, und dessen Spitze senkrecht über dem Hyperbelmittelpunkte liegt und eine Höhe gleich der ideellen Halbaxe der Hyperbel besitzt.

3) An einen gegebenen a) Cylinder oder b) Kegel eine Berührungsebene von gegebener erster Neigung zu legen.

4) An einen gegebenen Kegel durch einen außerhalb desselben gegebenen Punkt parallel zu einer gegebenen Ebene eine berührende Gerade zu legen.

### III. Der Kegel zweiten Grades.

**21.** Projicirt man einen Kegelschnitt, sowie einen Punkt und eine Gerade seiner Ebene, die zu ihm gegenseitig Pol und Polare sind, aus einem Punkte $S$ bezw. durch einen Kegel (zweiten Grades), durch eine Gerade und durch eine Ebene, so nennt man diese Gerade $p$ und Ebene P, welche durch die Spitze $S$ des Kegels gehen, gegenseitig *Polare und Polarebene zu dem Kegel,* und es übertragen sich die projektiven, insbesondere die harmonischen Eigenschaften (I, 340 ff.) auf die projicirenden Gebilde. Daher ist in jeder Ebene, die durch eine aus $S$ gezogene Gerade $p$ gelegt wird, die $p$ von P durch den Kegel, d. i. auch die $p$ von einer Geraden der P durch zwei Erzeugende des Kegels, harmonisch getrennt; und reciprok ist in einem Ebenenbüschel, dessen Axe ein aus $S$ in einer Ebene P gegebener Strahl bildet, die P von ihrer Polaren $p$ durch den Kegel, d. i. auch die P von der durch $p$ gehende Ebenen durch zwei Berührungsebenen des Kegels, harmonisch getrennt (I, 341, 3)). Insbesondere wird auf jeder zu der $p$ parallelen Geraden die Strecke zwischen ihren Schnittpunkten mit dem Kegel durch die P halbirt; und reciprok hat in jeder mit der P parallelen Ebene der durch Schnitt mit dem Kegel entstehende Kegelschnitt den Schnittpunkt mit der $p$ zum Mittelpunkte.

Man nennt nun jeden Strahl aus $S$, weil er die Mittelpunkte paralleler Kegelschnitte der Fläche enthält, einen *Durchmesser,* und jede Ebene aus $S$, weil sie eine Schaar paralleler Sehnen der Fläche halbirt, eine *Durchmesserebene* des Kegels.

Zwei Durchmesser nennt man *konjugirt,* wenn jeder in der Polarebene des andern liegt, und zwei Durchmesserebenen, wenn jede durch die Polare der anderen geht (I, 344). Drei Durchmesser bilden ein *Polardreikant,* wenn jeder jedem andern konjugirt ist; dann ist auch jede seiner Seitenflächen jeder anderen konjugirt (I, 345).

Einen *Kegel n. Ordnung oder n. Klasse* nennt man einen solchen, der von jeder Ebene bezw. in eine Kurve $n$. Ordnung oder $n$. Klasse geschnitten wird, oder, was dasselbe, der von jeder durch seine Spitze gelegten Ebene in $n$ reellen oder imaginären Geraden geschnitten, bezw. an den durch jede aus seiner Spitze gezogene Gerade $n$ reelle oder imaginäre Berührungsebenen gelegt werden können. Ein Kegel zweiter Ordnung ist auch zweiter Klasse und soll als *zweiten Grades* bezeichnet werden.

Aus Nr. I, 319 überträgt sich:

Zwei beliebige projektive Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung, der alle Schnittlinien entsprechender Ebenen enthält.

Zwei beliebige projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte zusammenfallen, erzeugen einen Kegel zweiter Klasse, der von allen Verbindungsebenen entsprechender Strahlen berührt wird.

Nennt man in zwei Ebenenbüscheln, deren Axen sich schneiden, eine Ebene des einen Büschels derjenigen des andern entsprechend, auf welcher sie senkrecht steht, so sind die Büschel projektiv und erzeugen daher einen Kegel zweiten Grades. Derselbe heißt *orthogonaler Kegel.* Wir wollen denselben erst später zugleich mit dem orthogonalen Hyperboloide, von dem er als besonderer Fall angesehen werden kann, näher betrachten.

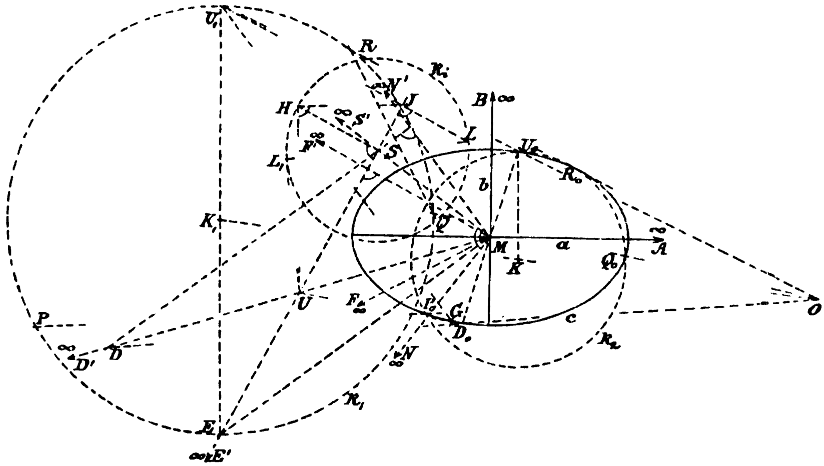
**22.** Ein Durchmesser eines Kegels, der senkrecht auf seiner Polarebene steht, heißt eine *Axe* desselben. Es wird sogleich gezeigt werden, daß es stets wenigstens eine solche gibt. Gibt es aber eine, so gibt es noch zwei oder noch unendlich viele. Denn in der auf der Ausgangsaxe senkrechten Polarebene bilden die konjugirten Durchmesser eine Involution (I, 358), bei welcher entweder ein Paar oder alle Paare zugeordneter Strahlen auf einander senkrecht stehen (I, 348) und daher Axen sind, indem die Polarebene einer jeden durch den konjugirten Durchmesser und die Ausgangsaxe geht. Im ersten allgemeinen Falle bestehen daher *drei auf einander senkrechte Axen der Fläche;* dieselben bilden ein Polardreikant, und seine Ebenen heißen die *Hauptebenen* der Fläche. Im zweiten Falle bilden die Ausgangsaxe und alle auf ihr senkrechten Durchmesser die *unendlich vielen Axen* der Fläche. Führen wir nun den Beweis für das Bestehen einer Axe, indem wir sie zu konstruiren suchen.

**23.** *Aufg. Die drei Axen eines Kegels zweiten Grades zu konstruiren, der durch einen Kegelschnitt $c$ als Leitlinie und durch seine Spitze gegeben ist.*

*Aufl.* Sei die Ebene P von $c$ die Projektionsebene, $S$ die senkrechte Projektion der Spitze, deren Höhe $SH = h$ gegeben sei. Fig. 13.
Die drei Axen, wenn solche bestehen, schneiden die P in Punkten $P$, $Q$, $R$, und diese bilden ein Polardreieck in Bezug auf $c$ (21). Ferner sind die Axen die Kanten eines rechtwinkligen Dreikants, so daß die Projektion jeder Axe, wie $SP$, senkrecht auf der Spur $QR$ der gegenüberstehenden Seitenfläche steht, also $S$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $PQR$ ist. Zeichnet man aus $S$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $h$ einen Kreis $k_i$, und betrachtet diesen als die ideelle Darstellung eines imaginären Kreises $k$ in Bezug

auf $S$ und die unendlich ferne Gerade $u$ der **P** als Mittelpunkt und Axe der Kollineation (I, 408), so ist $PQR$ auch ein Polardreieck in Bezug auf $k$. Denn die $QR$ und die Polare von $P$ zu $k_i$ schneiden die $SP$ rechtwinklig; und sind dabei die (nicht verzeichneten)

Fig. 13.



Schnittpunkte bezw. $P_1$ und $P_2$, so gilt wegen der Rechtwinkligkeit des Dreikants $SP_1 \cdot SP = -h^2$, und wegen der Polarität $SP_2 \cdot SP = h^2$, also $SP_1 = -SP_2$. Daher liegen $QR$ und die Polare von $P$ zu $k_i$ symmetrisch in Bezug auf $S$, und $QR$ ist die Polare von $P$ zu $k$, weil die Polaren von $P$ zu $k_i$ und zu $k$ durch $S$ und $u$ harmonisch getrennt sein müssen (I, 406, 1)).

Demnach kann $PQR$ als das gemeinschaftliche Polardreieck der beiden Kegelschnitte $c$ und $k$ bestimmt werden.

Zu dieser Bestimmung wurde in I, 398 für zwei reelle Kegelschnitte $k, k_1$ das Verfahren angegeben, wonach man in **P** eine Gerade $g$ wählt und zu ihren Punkten die Polaren bezw. zu $k$ und zu $k_1$ bestimmt; dieselben bilden zwei zu der Punktreihe $g$ und unter einander projektive Strahlenbüschel und bestimmen somit einen Kegelschnitt $g_1$, dessen Punkte zu denen der $g$ zugleich in Bezug auf $k$, $k_1$ und alle Kurven des Büschels $k k_1$ konjugirt sind; dabei bilden die Punkte auf der Geraden $g$ und ihre konjugirten Punkte auf dem Kegelschnitte $g_1$ projektive Reihen.

Ermittelt man in gleicher Weise den zu einer zweiten Geraden $h$ in Bezug auf das Büschel $k k_1$ konjugirten Kegelschnitt, so ist einer der vier Schnittpunkte beider Kegelschnitte zu dem Schnittpunkte von $g$ und $h$ konjugirt, und daher stets reell, die drei übrigen sind aber die gesuchten Punkte $P$, $Q$, $R$, weil jeder zu je einem Punkte der $g$

und der $h$ konjugirt, also der Pol ihrer Verbindungsgeraden zu $k$ und zu $k_1$ ist.

Ist nun einer oder sind beide gegebenen Kegelschnitte $k$, $k_1$ imaginär, so gilt das Verfahren ebenfalls. Denn auch für einen imaginären Kegelschnitt bilden die Polaren der Punkte einer Geraden $g$ ein Strahlenbüschel (I, 406, 3)), welches mit der Punktreihe $g$ projektiv ist, weil es perspektiv liegt mit dem Strahlenbüschel der Polaren der $g$ zu dem reellen Kegelschnitte, der die ideelle Darstellung des imaginären bildet, da beide Büschel durch die Axe und den Mittelpunkt der Kollineation dieser letzteren Kegelschnitte harmonisch getrennt sind (I, 406, 1)). Weil aber der erstbezeichnete jener vier Schnittpunkte der beiden konjugirten Kegelschnitte stets reell ist, so ist es auch wenigstens einer der Punkte $P$, $Q$, $R$, etwa $P$, und dann sind es auch, wie gezeigt wurde, die beiden anderen $Q$, $R$, wenn nicht alle Punkte einer Geraden $QR$ dem $P$ konjugirt sind, wo dann $P$ und $QR$ nicht nur Pol und Polare, sondern auch Mittelpunkt und Axe der Kollineation für $k$ und $k_1$ bilden.

**24.** Den $\infty^2$ Geraden $g$ der Ebene P entsprechen die $\infty^2$ Kegelschnitte, welche durch die drei Punkte $P$, $Q$, $R$ gehen, und welche man ein Büschel-Büschel oder ein Netz $PQR$ von Kegelschnitten nennt. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade $g$, und ihre in Bezug auf $kk_1$ konjugirten zwei Punkte nebst $P$, $Q$, $R$ den zu $g$ konjugirten Kegelschnitt $g_1$. Es kommt nun darauf an, die beiden Kegelschnitte, welche $P$, $Q$, $R$ durch ihre Schnittpunkte ergeben, möglichst günstig für die Einfachheit der Ausführung zu wählen.

In I, 398 wurden bei zwei beliebigen Kegelschnitten $k$, $k_1$ als jene konjugirten Kurven zwei Hyperbeln gewählt; es ist aber vorteilhafter und möglich, solche Kurven des Netzes $PQR$ zu wählen, deren Schnittpunkte nicht durch Verzeichnung dieser Kurven selbst gefunden werden, sondern vermittelst eines beliebigen, vielleicht schon zu anderem Zwecke verzeichneten Kegelschnittes und eines Kreises. Als diesen Kegelschnitt wählt man die Leitlinie $c$ des Kegels, und als jene konjugirten Kurven diejenigen beiden Kegelschnitte $c_1$, $k_1$ des Netzes $PQR$, deren eine $c_1$ mit $c$ ähnlich und ähnlich gelegen, und deren andere ein Kreis ist, welche also bezw. durch die unendlich fernen Punkte des $c$ und des Kreises $k$ (sowie des $k_i$) gehen und durch sie (und durch $P$, $Q$, $R$) bestimmt sind. Projicirt man dann $c_1$ in $c$ aus einem ihrer Ähnlichkeitspunkte, so projicirt sich bei derselben Projektionsweise der Kreis $k_1$ wieder in einen Kreis $k_2$, und dessen Schnittpunkte mit $c$ projiciren sich wieder rückwärts auf $k_1$ in die Punkte $P$, $Q$, $R$ und in einen weiteren vierten Punkt*).

*) Die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte durch irgend

Der zu einer Geraden $g$ in Bezug auf die Grundkurven $c$, $k$ konjugirte Kegelschnitt $g_1$ kann auch als der Ort der Pole der Geraden $g$ zu allen Kegelschnitten des Büschels $ck$ betrachtet werden. Denn sei $A_1$ der Pol der $g$ zu einem Kegelschnitte dieses Büschels, so liegt der zu $A_1$ in Bezug auf das Büschel $ck$ konjugirte Punkt auf $g$ (I, 397); also ist $A_1$ ein Punkt des zu $g$ konjugirten Kegelschnittes $g_1$. Der zu der unendlich fernen Geraden $u$ konjugirte Kegelschnitt $m$ enthält daher die Pole der $u$ zu den Kegelschnitten des Büschels $ck$, d. h. ihre Mittelpunkte, und heißt deswegen der *Mittelpunktskegelschnitt des Büschels.* Sind $a$ und $b$ die Axen von $c$, so sind diese auch mit zwei konjugirten (auf einander senkrechten) Durchmessern des imaginären Kreises $k$ parallel, so daß ihre unendlich fernen Punkte $A$ und $B$ bezw. zu $B$ und $A$, also zu Punkten der $u$ in Bezug auf das Büschel $ck$ konjugirt sind und daher dem Kegelschnitte $m$ angehören. $m$ ist demnach eine *gleichseitige Hyperbel,* deren Asymptoten mit $a$ und $b$ parallel laufen; außerdem geht $m$ durch die Mittelpunkte $M$ und $S$ der $c$ und $k$, und durch die noch unbekannten Punkte $P$, $Q$, $R$, indem $m$ dem Netze $PQR$ angehört.

**25.** Zu der weiteren Entwicklung brauchen wir folgenden *Hilfssatz:* „Ist in einem durch zwei Kegelschnitte $c$ und $k$ bestimmten Kegelschnittbüschel $ck$ die Kurve $m$ der Mittelpunktskegelschnitt (konjugirt zu der unendlich fernen Geraden $u$, und angehörig dem Kegelschnittnetze des Polardreiecks $PQR$ von $ck$), und sind $U$ und $V$ zwei in Bezug auf $m$ konjugirte Punkte einer Geraden $g$, so bilden deren in Bezug auf das Büschel $ck$ konjugirten Punkte $U_1$, $V_1$ die Endpunkte eines Durchmessers des zu $g$ in Bezug auf $ck$ konjugirten (und dem Netze $PQR$ angehörigen) Kegelschnittes $g_1$.“ Denn der involutorischen Punktreihe der $U$, $V$ auf $g$

---

einen festen verzeichneten Kegelschnitt und einen Kreis gibt *Kortum* in seiner gekrönten Preisschrift „Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades, 1869“. — Zwei Auflösungen der Aufgabe der Axenbestimmung eines Kegels zweiten Grades liefert *Chasles* in seiner „Geschichte der Geometrie“, deutsch von Sohncke, S. 79. Dieselbe Aufgabe löst Herr *Pelz* in „die Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades“ (Sitzungsber. d. Wiener Akad. der Wiss. B. 69, Abtlg. 2, 1874, S. 215) mittelst einer Hilfshyperbel und eines Kreises. Die oben gegebene Auflösung ist aus dem Aufsatze des Herrn *Solin* „Über die Konstruktion der Axen einer Kegelfläche zweiten Grades“ (Sitzungsber. d. böhmischen Ges. d. Wiss. 1885) entnommen. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe gibt Herr *Pelz*, anschließend an Chasles und Kortum, ebenfalls mit Hilfe des Leitkegelschnittes des Kegels und eines Kreises in „Bemerkung zur Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades“ (Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., B. 92, Abtlg. 2, 1885).

entspricht die damit projektive, also ebenfalls involutorische Punktreihe der $U_1$, $V_1$ auf $g_1$; und da die Doppelpunkte der in Bezug auf $m$ konjugirten Punkte $U$, $V$ der $g$ die Schnittpunkte von $g$ und $m$ sind, so sind die Doppelpunkte der Reihe der $U_1$, $V_1$ auf $g_1$ die Schnittpunkte des $g_1$ und der $u$, und der Mittelpunkt ihrer Involution ist der Pol der $u$ zu $g_1$ oder der Mittelpunkt des $g_1$; d. h. durch diesen Mittelpunkt geht jede Gerade $U_1 V_1$, oder sie ist ein Durchmesser des $g_1$.

Benutzen wir diesen Satz zur Bestimmung der beiden von $M$ und $S$ ausgehenden Durchmesser $MD$ und $SE$ der $m$, und dadurch ihres Mittelpunktes $U$, als Schnittpunkt der Durchmesser, indem wir $m$ als $g_1$ und $u$ als $g$ annehmen. Der zu $M$ konjugirte Punkt in Bezug auf $c$ und $k$ ist der Schnittpunkt der Polaren von $M$ bezw. zu $c$ und $k$, d. i. der $u$ und des auf $MS$ senkrechten Durchmessers des $k$, also der unendlich ferne Punkt $N$ auch des auf $MS$ senkrechten Durchmessers $MN$ des $c$. Zu diesem auf $u$ liegenden Punkte $N$ ist in Bezug auf $m$ derjenige Punkt $N'$ der $u$ konjugirt, welcher von ihm durch die Asymptoten von $m$, also auch durch die unendlich fernen Punkte $A$ und $B$ der $a$ und $b$ harmonisch getrennt ist, welcher also auf dem zu $MN$ in Bezug auf $a$ und $b$ symmetrischen Durchmesser $MN'$ liegt. Der zu $N'$ in Bezug auf das Büschel $ck$ konjugirte Punkt ist aber der Schnittpunkt der Polaren von $N'$ bezw. zu $c$ und zu $k$, d. i. der zu $MN'$ konjugirten Durchmesser $MD$ von $c$ und $SD$ ($\perp MN'$) von $k$. Also sind $M, D$ konjugirt in Bezug auf $ck$ zu den zweien in Bezug auf $m$ zu einander konjugirten Punkten $N, N'$; daher ist $MD$ ein Durchmesser und sein Mittelpunkt $U$ der Mittelpunkt von $m$. Daraus ergibt sich ein zweiter Durchmesser $SUE$ von $m$ durch $UE = SU$. Doch wollen wir von diesem Durchmesser auch die unmittelbare Bestimmungsweise angeben, weil wir sie zur weiteren Erörterung, wenn auch nicht zur weiteren Konstruktion notwendig haben. Zu $S$ ist in Bezug auf $c$ und $k$ der unendlich ferne Punkt $F$ des zu $MS$ konjugirten Durchmessers $MF$ des $c$ konjugirt, weil durch $F$ die Polaren von $S$ zu $c$ und zu $k$ (nämlich $u$) gehen. Der zu $F$ in Bezug auf $m$ konjugirte Punkt der $u$ ist $F'$, wenn $MF'$ symmetrisch mit $MF$ in Bezug auf $a$ ist. Die Polaren von $F'$ zu $c$ und $k$ sind bezw. $ME$ und $SE$, wenn $ME$ symmetrisch mit $MS$ in Bezug auf $a$ (weil $MS$ die Polare von $F$) und wenn $SE \perp MF'$.

Um nun die bezw. durch die unendlich fernen Punkte von $c$ und $k$ gehenden Kurven $c_1$ (nicht verzeichnet) und $k_1$ des Netzes $PQR$ zu bestimmen, müssen wir zuerst die Geraden $c_3, k_3$ ermitteln, deren konjugirte in Bezug auf $ck$ sie sind. Die unendlich fernen

Punkte $uc$ des $c$, ob reell oder imaginär, sind die Doppelpunkte der Involution der auf $u$ in Bezug auf $c$ konjugirten Punkte; dieselbe ist durch zwei Punktepaare, etwa $A$, $B$ und $S'$, $F$ gegeben, wenn $S'$ der unendlich ferne Punkt der $MS$. Die zu ihnen in Bezug auf $ck$ konjugirten Punkte bilden eine Involution auf $m$; es sind dies von $A, B$ bezw. $B, A$, von $F$ der Punkt $S$, von $S'$ der Schnittpunkt der $MF$ mit der aus $S$ auf $MS$ gezogenen Senkrechten $SN$. Der Mittelpunkt dieser Involution ist der Schnittpunkt der $BA = u$ mit der $SN$, d. i. auch der unendlich ferne Punkt $N$ der auf $MS$ Senkrechten $MN$. Die Axe der Involution ist dann der zu $MN$ in Bezug auf $m$ konjugirte, also mit $MN'$ parallele Durchmesser $UN'$ der $m$. Seine Schnittpunkte mit $m$ sind den Punkten $uc$ konjugirt, daher ist $UN'$ selbst die Gerade $c_3$. Da nun auf dieser Geraden der Mittelpunkt $U$ der $m$ und der unendlich ferne Punkt $N'$ konjugirt in Bezug auf $m$ sind, so bilden nach dem angegebenen Hilfssatze die zu ihnen in Bezug auf $ck$ konjugirten Punkte die Endpunkte eines Durchmessers des Kegelschnittes $c_1$. Zu $N'$ haben wir aber $D$ als konjugirt gefunden, und zu $U$ finden wir den konjugirten Punkt $U_1$ als Schnitt seiner Polaren $GU_1$ zu $c$ und $JU_1$ zu $k$. $GU_1$ ist $\parallel MN'$ und wird daher durch einen weiteren Punkt $G$ bestimmt. $JU_1$ ist $\perp US$ und ist bestimmt durch $SJ \cdot SU = -h^2$, $UHJ = 90^0$, oder, wenn $U$ außerhalb $k_i$, als Linie $JLU_1$ durch den Berührungspunkt $L_1$ der aus $U$ an $k_i$ gezogenen Tangente, und den Durchmesser $L_1SL$ des $k_i$. $c_1$ ist nun durch seinen Durchmesser $DU_1$ bestimmt.

In gleicher Weise erhalten wir $EU_1$ als Durchmesser des Kreises $k_1$. $k_1$ geht nämlich durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte, welche auf $u$ durch die Involution der auf einander senkrechten Durchmesser des $k$, oder durch das Punktepaar $A$, $B$ und $S'$, $N$ ($S'MN = 90^0$) bestimmt sind. Zu $A$, $B$ sind in Bezug auf $ck$ wieder bezw. $B$, $A$ konjugirt, zu $S'$ ein (vorhin bezeichneter) Punkt der $MF$, zu $N$ der Punkt $M$, so daß der Mittelpunkt der Involution der Punkt ($BA$, $MF$) oder der unendlich ferne Punkt von $MF$, ihre Axe die Polare $UF'$ dieses Punktes zu $m$ ist, so daß, entsprechend wie vorhin, $UF' = k_3$. Den Punkten $F'$ und $U$ sind aber in Bezug auf $ck$ die Punkte $E$ und $U_1$ konjugirt, so daß $EU_1$ ein Durchmesser und sein Mittelpunkt $K_1$ der Mittelpunkt des Kreises $k_1$ ist.

Um nun $c_1$ in den mit ihm ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt $c$ zu projiciren, ziehe man den zu $DU_1$ parallelen Durchmesser $D_0U_0$ des $c$, so bildet der Schnittpunkt $O$ von $DD_0$ und $U_1U_0$ (und der von $DU_0$, $U_1D_0$) einen Ähnlichkeitspunkt; dabei projicirt sich der Halbmesser $U_1K_1$ des $k_1$ in den mit ihm parallelen Halbmesser $U_0K$ des $k_2$, wodurch $k_2$ gezeichnet werden kann.

Die außer $U_0$ bestehenden drei Schnittpunkte $P_0$, $Q_0$, $R_0$ von $c$ und $k_2$ werden dann aus $O$ in die entsprechenden Punkte $P$, $Q$, $R$ des Kreises $k_1$ projicirt, wodurch die Aufgabe gelöst ist. Zur Probe und Verbesserung unsicherer Punkte dient es, daß $S$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $PQR$ sein muß, und daß $P$, $Q$, $R$ auf der Hyperbel $m$ liegen, welche durch $M$, $S$, $D$, $E$ geht und $UA$, $UB$ zu Asymptoten hat.

**26.** *Übungsaufgaben.*

1) Die Axen eines Kegels mit parabolischer Leitlinie $c$ zu bestimmen.

2) Zu untersuchen, wie sich die Auflösung unserer Aufgabe gestaltet, wenn der durch den Leitkegelschnitt $c$ (kein Kreis) und seine Spitze bestimmte Kegel ein Umdrehungskegel ist (vergl. 23).

## IV. Die Umdrehungsfläche und ihre Berührungsebene.

**27.** Eine *Umdrehungsfläche* wird am leichtesten *dargestellt*, wenn man ihre Axe $a$ senkrecht auf eine Projektionsebene, etwa auf $\mathbf{P}_1$, stellt. Dann sind von den Parallelkreisen die ersten Projektionen koncentrische Kreise, die zweiten gerade Linien parallel zur Projektionsaxe $x$; von den Meridianen sind die ersten Projektionen Gerade, welche durch die Projektion $A'$ der $a$ gehen, die zweiten affine Figuren, deren Affinitätsaxe $a''$ und deren Affinitätsstrahlen parallel zu $x$ sind. Den Umriß der ersten Projektion bilden die Äquator- und Kehlkreise, den der zweiten Projektion der zu $\mathbf{P}_2$ parallele Meridian, welchen man den *Hauptmeridian* nennt.

Bei *einer schiefen Stellung der Umdrehungsaxe* $a$ gegen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ sind die gleichnamigen Projektionen der Parallelkreise ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, deren kleine Axen in die gleichnamige Projektion der $a$ fallen, die der Meridiane affine Figuren, deren Affinitätsaxen die gleichnamige Projektion der $a$ ist. Bei Aufgaben über Umdrehungsflächen vermeidet man die schiefe Stellung gewöhnlich durch Drehung in die senkrechte Stellung, die man nach der Auflösung wieder in die erstere zurückführt.

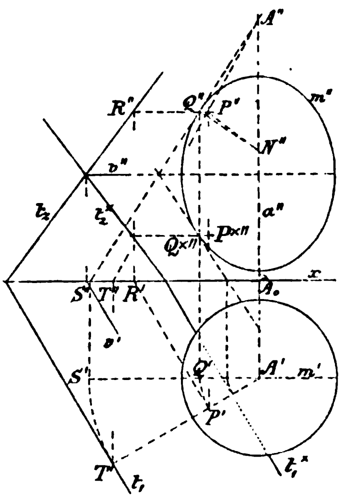
**28.** *Aufg. Ein Umdrehungsellipsoid entsteht durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Axen. Man soll an ein solches, dessen Axe $a$ senkrecht auf* $\mathbf{P}_1$ *steht, in einem durch eine Projektion $P'$ gegebenen Punkte desselben, eine Berührungsebene legen.*

*Aufl.* Die Projektionen der Axe $a$ sind $A'$, $a''$ ($\perp x$), die des Fig. 14.
Hauptmeridians die Gerade $m'$ (durch $A'$ und $\parallel x$) und die (zu ihm selbst kongruente) Kurve $m''$, eine Ellipse, deren eine (große) Axe in $a''$ fällt. Diese Ellipse bildet zugleich den zweiten Umriß, wäh-

rend der erste ein aus $A'$ mit der halben andern (kleinen) Axe von $m''$ als Halbmesser gezogener Kreis (ein Aquator) ist.

Um $P''$ aus $P'$ zu bestimmen, lege man durch $P'$ einen Parallelkreis, welcher $m'$ in dem Punkte $Q'$ trifft, dessen zweite Projektion auf $m''$ in $Q''$ oder $Q^{*''}$ liegt. Durch diese Punkte gehen die mit $x$ parallelen zweiten Projektionen jenes Parallelkreises, auf denen dann $P''$ und $P^{*''}$ aus $P'$ bestimmt werden. Einem gegebenen Punkte der zweiten Projektion würden zwei Punkte desselben Parallelkreises in der ersten Projektion entsprechen.

Fig. 14.



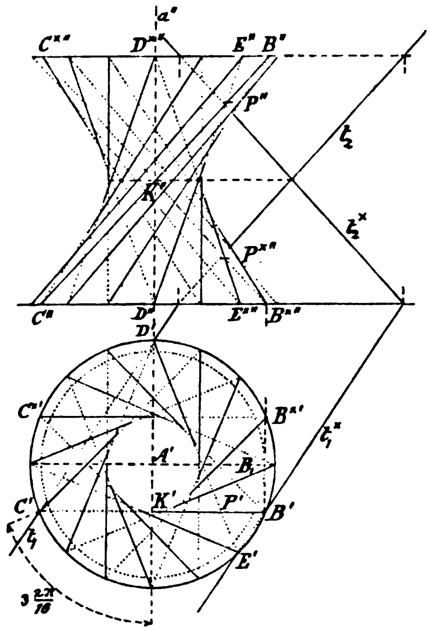

Die *Berührungsebene* in $P(P', P'')$ enthält die mit $\mathbf{P}_1$ parallele Parallelkreistangente $PR$, deren zweite Spur sich in $R''$ ergibt, und die Meridiantangente. Man drehe den Meridian $aP$ um $a$ in den Hauptmeridian $m$, so daß $P$ nach $Q$ gelangt, ziehe die Tangente an $m$ in $Q$, welche die $a$ in $A$, die $\mathbf{P}_2$ in $R$ trifft und $S$ zur ersten Spur hat. Beim Zurückdrehen gelangt $S$ nach $T$, und die Meridiantangente nach $APT$ (kurz $A'T' = A_0S''$). Von der Berührungsebene geht dann die erste Spur $t_1 \parallel P'R'$ durch $T'$, die zweite durch $R''$. Entsprechend findet man die Berührungsebene $t_1^*$, $t_2^*$ in $P'$, $P^{*''}$. Die Schnittlinie $v$ beider muß $\parallel PR$ in der Ebene des Äquators liegen, weil diese eine Symmetrieebene für die Fläche und für beide Berührungspunkte ist.

Die *Flächennormale* $PN$ ergibt sich aus ihrem Schnittpunkte $N$ mit $a$, der sich im Hauptmeridiane durch $Q''N'' \perp Q''A''$ als Spitze des Normalenkegels bestimmen läßt.

**29.** *Das einschalige Umdrehungshyperboloid* entsteht durch Umdrehung einer Geraden um eine mit ihr nicht in derselben Ebene
Fig. 15. liegende Axe; es sei die Axe $a\,(A', a'')$ senkrecht auf $\mathbf{P}_1$ und $BC$ eine Lage jener geraden Erzeugenden. Der kürzeste Abstand derselben von $a$ ist die mit $\mathbf{P}_1$ parallele, auf $B'C'$ senkrechte Strecke $A'K'$, deren auf $BC$ liegender Fußpunkt $K$ den *Kehlkreis* beschreibt. Gleichweit von $K$ entfernte Punkte der Erzeugenden, wie $B$ und $C$, beschreiben gleiche und gleichweit vom Kehlkreise entfernte Parallelkreise, wodurch sich *die Ebene des Kehlkreises als Symmetrieebene* ergibt. Ein solches Paar von Parallelkreisen, von

denen derjenige von $C$ die erste Spur der Fläche bilde, begrenze deren Zeichnung, welche selbst mit der Erzeugenden sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. Um eine Anzahl von *Erzeugenden* zu zeichnen, teile man die beiden Grenzkreise von $B$, bezw. von $C$ aus in dieselbe Anzahl $n$ (= 16) gleicher Teile und verbinde die von $B$ und $C$ in demselben Sinne um dieselbe Anzahl von Teilen abstehenden Teilungspunkte durch Gerade. Damit auf der gemeinschaftlichen ersten Projektion beider Parallelkreise beide Teilungen zusammenfallen, wurden $B$ und $C$ auf der Erzeugenden so gewählt, daß $\sphericalangle C'A'B'$ eine ganze (und zugleich eine gerade) Anzahl der Teile $\frac{2\pi}{n}$ bildet. Die zweiten Projektionen der Erzeugenden erhält man durch Übertragen der Teilungspunkte der Kreise in deren zweite Projektionen. — Der erste *Umriß* ist der Kehlkreis, der zweite der Hauptmeridian, welcher durch die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der Hauptmeridianebene konstruirt werden kann. Er ist die Einhüllende der zweiten Projektionen der Erzeugenden.

Fig. 15.



**30.** *Zwei Lagen der geraden Erzeugenden g der Fläche können sich nicht schneiden*, weil jede $g$ mit jedem Parallelkreise nur einen Punkt gemein hat (5). Alle $g$ bilden eine *Schaar oder ein System von Erzeugenden.*

*Es gibt noch eine zweite Schaar von geraden Erzeugenden h, welche die Fläche ganz erfüllen, so daß durch jeden Punkt der Fläche eine g und eine h geht.* Denn da die Kehlkreisebene **K** eine Symmetrieebene der Fläche ist, so gibt es zu jeder $g$ eine in Bezug auf **K** symmetrische Gerade $h$, welche ganz in der Fläche liegt. Zwei solche symmetrische Erzeugende $g$ und $h$ schneiden sich in einem Punkte des Kehlkreises, und haben gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Neigungen gegen die Umdrehungsaxe $a$. Auch die Symmetrie in Bezug auf eine Meridianebene liefert aus den $g$

eine neue Schaar von Erzeugenden, welche ebenfalls gleiche Neigung, wie die $g$, gegen die $a$ besitzen, weil dies von jeder einzelnen und ihrer symmetrischen $g$ gilt. Dieselben fallen mit den Erzeugenden $h$ zusammen, weil man durch einen Punkt der Fläche nur zwei Gerade von gleicher Neigung gegen $a$ legen kann, welche ganz in der Fläche liegen, da man nur zwei solche legen kann, die einen der Parallelkreise schneiden. Eine Gerade $h$ erzeugt die Fläche ebenfalls durch Drehung um $a$.

*Jede Erzeugende $g$ der einen Schaar schneidet jede $h$ der anderen,* und zwar in der Meridianebene, in Bezug auf welche beide Gerade symmetrisch sind, d. i. in derjenigen, welche auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $G$ und $H$ der Erzeugenden mit irgend einem Parallelkreise senkrecht steht.

*Jede erste und jede zweite Projektion einer Erzeugenden $g$ stellt noch eine zweite Erzeugende $h$ vor*, nämlich diejenige, welche mit der ersteren bezw. in Bezug auf die Kehlkreis- oder die Hauptmeridianebene symmetrisch ist. In je einer dieser Ebenen, d. i. auch auf einer Umrißlinie, schneiden sich beide Erzeugende $g$ und $h$ und wechseln hier die Sichtbarkeit, so daß, wenn man sich die $g$ schwarz, die $h$ rot denkt und beide darstellt, in der Figur alle schwarz punktirten Erzeugenden statt dessen rot ausgezogen werden müssen. Die Berührungspunkte der Erzeugenden mit den Umrissen liegen mit anderen Schnittpunkten von je zweien dargestellten Erzeugenden wegen deren gleichförmiger Verteilung auf demselben Parallelkreise, bezw. auf demselben Meridiane.

**31.** Durch eine Erzeugende $g_1$ der einen Schaar und durch jede $h$ der anderen Schaar kann je eine Ebene gelegt werden, weil $g_1$ jede $h$ schneidet; aber es schneidet auch jede durch $g_1$ gelegte Ebene E die Fläche in einer $h$, nämlich in derjenigen, welche zu $g$ symmetrisch ist in Bezug auf die senkrecht zu E gelegte Meridianebene. Alle durch eine Erzeugende $g_1$ und alle durch eine solche $g_2$ gelegten Ebenen bilden je ein Ebenenbüschel $g_1$ und $g_2$, und beide sind projektiv, wenn man zwei Ebenen derselben sich entsprechen läßt, welche durch dieselbe Erzeugende $h$ gehen. Denn die Ebenenbüschel schneiden die Ebene eines Parallelkreises in zwei Strahlenbüscheln, welche in den Schnittpunkten $G_1$, $G_2$ von $g_1$, $g_2$ mit dem Kreise ihre Mittelpunkte haben, und deren entsprechende Strahlen sich in dem Punkte $H$ dieses Kreises treffen, durch welchen eine $h$ geht, welche also projektiv sind (I, 317). Da diese Ebenenbüschel durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt sind, so kann man sagen: *Zwei projektive Ebenenbüschel $g_1$, $g_2$ bilden durch die Schnittgeraden $h$ je zweier entsprechenden Ebenen die eine Schaar der Erzeu-*

*genden h eines einschaligen Umdrehungshyperboloids, wenn drei der Schnittgeraden h einer solchen Fläche angehören*; dann sind die Axen $g_1$, $g_2$ Erzeugende der anderen Schaar derselben Fläche, weil sie alle *h* schneiden.

*Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche im allgemeinen in einem Kegelschnitte*, da sie jene Ebenenbüschel in projektiven Strahlenbüscheln trifft, deren entsprechende Strahlen sich in Punkten schneiden, welche die fragliche Schnittkurve bilden (I, 319). Enthält die Ebene eine *g* oder eine *h*, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, eine *g* und eine *h*.

*Jeder Meridian der Fläche ist eine Hyperbel, deren reelle Axe ein Durchmesser des Kehlkreises ist und deren Asymptoten parallel zu den mit der Meridianebene parallelen Erzeugenden g und h laufen.* Denn der Kegelschnitt, in welchem die Meridianebene die Fläche trifft, hat einen Durchmesser des Kehlkreises und die Umdrehungsaxe zu Symmetrielinien und daher zu Axen, und jene Erzeugende liefern seine unendlich fernen Punkte.

Der *Mittelpunkt* des Kehlkreises ist auch der Mittelpunkt aller Meridianhyperbeln und damit der *Fläche.*

**32.** *Aufg. In einem durch seine eine Projektion gegebenen Punkte P eines einschaligen Umdrehungshyperboloides eine Berührungsebene an dasselbe zu legen.*

*Aufl.* Durch die gegebene Projektion lege man die gleichnamigen Projektionen der durch *P* gehenden Erzeugenden beider Scharen als Tangenten an den gleichnamigen Umriß, also aus $P'$ an die erste Projektion des Kehlkreises, oder aus $P''$ an die zweite Projektion des Hauptmeridians. In der Figur sind aus dem gege- Fig. 15.
benen $P'$ die Tangenten an den Kreis gezogen und mit den beiden begrenzenden Kreisen bezw. in $B'$, $C'$ und $D'$, $E'$ geschnitten. Denkt man sich nun *P* oberhalb des Kehlkreises, so gehören *B* und *E* dem oberen, *C* und *D* dem unteren Grenzkreise an, woraus die zweiten Projektionen $B''C''$, $D''E''$ folgen, welche $P''$ bestimmen. Liegt dagegen *P* unterhalb des Kehlkreises, so gehören *B*, *E* dem unteren, *C*, *D* dem oberen Grenzkreise an, und $B^{*''}C^{*''}$, $D^{*''}E^{*''}$ sind die zweiten Projektionen der Erzeugenden, welche $P^{*''}$ bestimmen. Im ersteren Fall gehört *BC* der Schaar der (schwarzen) Erzeugenden *g* an, *DE* dem der (roten) *h*, im zweiten Falle umgekehrt.

Die *Berührungsebene* ergibt sich hier als die Ebene der beiden durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden und enthält für den in $P'$ projicirten Berührungspunkt die Sehnen *CD* und *BE*

der beiden Grenzkreise. Durch deren Spuren ergeben sich die Berührungsebenen $t_1$, $t_2$ für $P$; $t_1^*$, $t_2^*$ für $P^*$.

Die Asymptote eines Meridians als Parallele der beiden mit seiner Ebene und untereinander parallelen Erzeugenden beider Schaaren ist mit diesen parallel, und alle Meridianasymptoten bilden daher einen Umdrehungskegel, welcher die Axe und den Mittelpunkt mit der Fläche gemein hat, den sogenannten *Asymptotenkegel.* Seine erste Spur ist der aus $A'$ durch die Mitte $B_1$ der Verbindungslinie der ersten Spuren $B'$, $B^{*\prime}$ jener Erzeugenden gezogene Kreis, und seine Berührungsebene entlang seiner Erzeugenden von $B_1$ enthält jene beiden parallelen Erzeugenden des Hyperboloids und berührt es daher in dem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkte derselben.

**33.** Die Berührungsebene des einschaligen Umdrehungshyperboloids enthält die beiden durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden, nach welchen sie die Fläche schneidet. Diese Erzeugenden teilen die Fläche in vier Teile nach Art von Scheitel- und Nebenwinkeln. Die Flächenstücke der Scheitelwinkel, welche den Parallelkreis des Berührungspunktes enthalten, liegen auf der dem Flächenmittelpunkte zugewendeten Seite der Ebene, die Flächenstücke der anderen Scheitelwinkel, welche die durch den Berührungspunkt gehende Meridianhälfte enthalten, auf der abgewendeten Seite. Diese Eigentümlichkeit, welche erst später mit der Krümmung der Flächen näher untersucht werden wird, führt zu folgender Unterscheidung. Ein Punkt einer Fläche heißt *hyperbolisch*, wenn die Berührungsebene in demselben mit der Fläche eine Linie gemein hat, welche in jenem Punkte einen Doppelpunkt mit zwei getrennten Tangenten besitzt; er heißt *parabolisch*, wenn in ihm der gemeinsamen Linie eine einzige Tangente zukommt; *elliptisch*, wenn er ein isolirter gemeinsamer Punkt ist. Das einschalige Umdrehungshyperboloid besitzt nur hyperbolische, der Cylinder und Kegel nur parabolische, das Umdrehungsellipsoid und die Kugel nur elliptische Punkte.

Ein Punkt einer Umdrehungsfläche ist elliptisch, hyperbolisch, oder parabolisch, je nachdem in ihm die Meridiankurve gegen die Umdrehungsaxe hohl, erhaben, oder im Wechsel von der einen zur andern Eigenschaft begriffen ist; der letztere Fall tritt im allgemeinen ein, wenn die Tangente der Meridiankurve senkrecht auf der Umdrehungsaxe steht, zugleich aber der Punkt nicht in der Axe liegt, oder wenn der Punkt ein Wendepunkt ist.

## V. Die abwickelbaren Flächen (erster Teil).

**34.** Man nennt gewöhnlich eine *krumme Fläche abwickelbar, entwickelbar oder developpabel*, wenn sie ohne Faltung oder Bruch in

eine Ebene ausgebreitet werden kann. Wie man aber eine krumme Linie nicht unmittelbar rektificiren, d. h. ihre Teile in ihrem ursprünglichen Zusammenhange in einer geraden Linie aneinanderreihen kann, weil nicht der kleinste Teil derselben gerade ist, so kann man auch eine krumme Fläche nicht unmittelbar abwickeln, d. h. ihre Teile in ihrem ursprünglichen Zusammenhange in einer Ebene aneinander legen, weil nicht der kleinste Teil derselben eben ist. Wie wir daher eine krumme Linie behufs ihrer Rektifikation als die Grenzgestalt eines eingeschriebenen oder umschriebenen Vielecks ansehen mußten (I, 225), so müssen wir auch die abwickelbare krumme Fläche, wenn wir Eigenschaften derselben aus dem Begriffe der Abwickelbarkeit herleiten wollen, als die Grenzgestalt eines ohne Faltung oder Bruch abwickelbaren Vielflachs ansehen, und dieser Grenzgestalt uns annähern, indem wir jede Seitenfläche sich der Grenze Null annähern lassen.

Da nun die gewöhnlichen Vielflache nicht abwickelbar sind, so müssen wir zur Gewinnung der Abwickelbarkeit ihren Begriff (I, 146) erweitern. Wir erreichen diesen Zweck, indem wir die Geschlossenheit nicht verlangen. Es können aber die Seitenflächen, oder es kann die Aneinanderreihung ungeschlossen sein. Als geschlossene Seitenflächen betrachten wir einfache Vielecke erster Art (I, 138), welche also wenigstens drei Seiten besitzen; als ungeschlossene solche mit nur zwei Seiten, welche also ein Paar Scheitelwinkel sind.

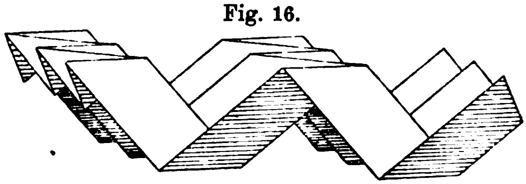
*Ein Vielflach in erweitertem Sinne nennen wir die Gesamtheit von geschlossenen oder ungeschlossenen ebenen Seitenflächen, welche derart aneinandergefügt sind, daß jede Grenzstrecke einer geschlossenen oder jede Grenzgerade einer ungeschlossenen Seitenfläche zugleich diejenige einer zweiten Seitenfläche bildet.* Eine solche gemeinschaftliche Seite wird eine *Kante* des Vielflachs genannt. Ist eine Kante begrenzt oder unbegrenzt, so müssen alle Kanten bezw. begrenzt oder unbegrenzt, und alle Seitenflächen geschlossen oder ungeschlossen sein. Sind sie unbegrenzt, so fallen auf einer Kante die Scheitel der Winkel der anstoßenden Seitenflächen im allgemeinen nicht zusammen. Die zwischen zwei solchen Scheiteln liegenden Stücke der Kanten bilden ein unebenes Vieleck, welches man die *Rückkehrkante* des Vielflachs nennt. Das Vielflach selbst ist geschlossen oder ungeschlossen, je nachdem man beim Weiterschreiten von Seitenfläche zu Seitenfläche notwendig wieder zu einer früher durchschrittenen zurückkehren oder nicht zurückkehren muß.

*Wir nennen ein Vielflach abwickelbar, wenn jedes beliebige, durch eine geschlossene Linie begrenzte Stück desselben, wenn es nur keinen Teil der Rückkehrkante in seinem Inneren einschließt, ohne Faltung*

*oder Bruch in eine Ebene ausgebreitet werden kann,* wobei wir unter Faltung die Verdoppelung benachbarter Teile verstehen. Wir wollen nun untersuchen, ob und unter welchen Umständen Vielflache mit geschlossenen und solche mit ungeschlossenen Seitenflächen abwickelbar sind.

**35.** *Ein Vielflach mit geschlossenen Seitenflächen ist abwickelbar, wenn die Summe der Kantenwinkel an jeder Ecke gleich vier Rechten ist;* denn dann lassen sich die um diese Ecke liegenden Seitenflächen ohne Faltung oder Bruch in eine Ebene ausbreiten, und ebenso alle in den neuen Ecken dieser Flächen anstoßenden weiteren Seitenflächen usw. Die *Ecken* dürfen daher *nicht konvex* sein, weil bei diesen die Summe der Kantenwinkel $< 4R$ ist. Wenn auch beim Übergange des Vielflachs mit konvexen Ecken zu einer stetigen krummen Fläche durch unendliche Verkleinerung der Seitenflächen das Klaffen an einer Ecke unendlich klein wird, d. h. verschwindet, so wird es doch bei der Fortsetzung der Fläche in endlichem Abstande von jener Ecke endlich. *Es muß demnach bei einem abwickelbaren Vielflach mit geschlossenen Seitenflächen jede Ecke nicht*
Fig. 16. *konvex* und daher wenigstens vierflächig sein. In Fig. 16 ist ein solches

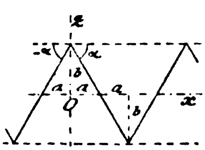
Fig. 16.



mit vierflächigen Ecken veranschaulicht, welches man durch dreimaliges Hin- und Herbiegen eines Blattes Papier in jedesmal gleich breite Streifen herstellen kann, wenn die Biegungskanten der zweiten und dritten Streifenschaar sich unter gleichen Winkeln gegen die Kanten der ersten Schaar auf diesen schneiden. Das Vielflach selbst ist nicht geschlossen.

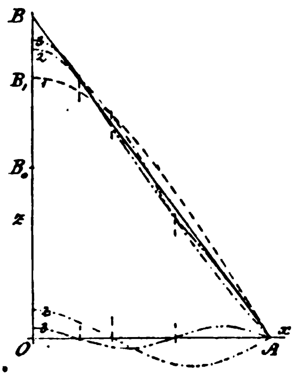
Geometrisch kann dieses Vielflach durch Parallelbewegung einer regelmäßigen *Zickzacklinie* entlang einer anderen solchen entstehen.
Fig. 17. Unter einer regelmäßigen Zickzacklinie oder einem regelmäßigen Zickzacke soll ein unbegrenzter Vieleckszug verstanden werden, dessen Ecken auf zwei parallelen Geraden, den Leitgeraden, liegen, und dessen Seiten in wechselndem Sinne gleiche Winkel ($+\alpha$ und $-\alpha$) mit diesen Geraden bilden. Legt man nun zwei regelmäßige, aber beliebig verschiedene Zickzacke bezw. in die $xz$- und $xy$ Ebene eines rechtwinkligen Koordinaten-

Fig. 17.



systems, $O, xyz$, derart daß von dem ersten die Mittellinie zwischen den beiden Leitgeraden in die $x$ Axe, und ein Eckpunkt in die $z$ Axe und daß von der anderen jene Mittellinie in die $y$ Axe, und der Mittelpunkt einer Seite in den Koordinatenursprung $O$ fällt, und läßt dann den ersteren Zickzack parallel zu seiner Anfangslage sich so bewegen, daß sein Ursprungspunkt den zweiten Zickzack (und jeder seiner Endpunkte einen damit kongruenten und parallelen) beschreibt, so beschreibt die erste Zickzacklinie selbst ein Vielflach, welches wir *Zickzackfläche* nennen wollen, und welches abwickelbar ist. Denn an jeder seiner Ecken stoßen vier Flächen zusammen, deren Kantenwinkel $\gamma, \gamma, \gamma_1, \gamma_1$ eine Summe von vier Rechten haben. Sind nämlich $\alpha$ und $\beta$ die Winkel, welche bezw. die Seiten des ersten und zweiten Zickzacks mit der zu ihren Leitgeraden bezw. parallelen und senkrechten $x$ Axe einschließen, so bilden an jeder Ecke des Vielflachs die Parallele zu der $+x$ Axe, eine Seite des ersten und je eine der zwei hier zusammentreffenden Seiten des zweiten Zickzacks zwei rechtwinklige Dreikante mit den Seiten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha$, $180^0 - \beta$, $\gamma_1$, in denen $\gamma$ und $\gamma_1$ dem rechten Winkel gegenüberliegen. Daher ist $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$, $\cos\gamma_1 = \cos\alpha\cos(180 - \beta)$; also $\cos\gamma_1 = -\cos\gamma$, $\gamma_1 = 180^0 - \gamma$, oder $2\gamma + 2\gamma_1 = 360^0$.

Fig. 18.




Man kann nun die Zickzacklinie und dadurch auch die Zickzackfläche vermittelst einer *Fourierschen Reihe* durch eine Gleichung ausdrücken. Die Gleichung der ersten, nach den Bezeichnungen in Fig. 17 für $a$ und $b$, ist*)

$$z = \frac{8b}{\pi^2} \sum_0^\infty {}_n \frac{\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{8b}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2a} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2a} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2a} + \cdots \text{in inf.}\right). \quad (1)$$

Wir wollen die durch das erste, zweite, $n^{te}$ Glied der Reihe dargestellte Kurve die erste, zweite, $n^{te}$ Teilkurve, die durch die Summe der $n$ ersten Glieder dargestellte Kurve die $n^{te}$ Summenkurve nennen.

*) Vergl. z. B. Riemanns Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff, 1869, S. 52.

Fig. 18. Die Teilkurven sind Cosinuslinien, und die Figur stellt die drei ersten dar, ebenso die drei ersten Summenkurven, welche die Annäherung an die Zickzacklinie veranschaulichen. Es ist in der Figur $OA = a$, $OB = b$. Man kann leicht aus Nr. 48 oder aus der späteren Bestimmung der Evolute der Cosinuslinie erkennen, daß die Krümmungshalbmesser aller Teilkurven in ihren Scheiteln $= r = a^2 : 2b = B_1 B_0$ sind, und daß derjenige der $n^{ten}$ Summenkurve in ihrem Scheitel $= r : n$ ist, also bei zunehmendem $n$ die Null zur Grenze hat.

Die Gleichung der zweiten Zickzacklinie mit den entsprechenden Beständigen $a'$, $b'$ erhält man unter Beachtung, daß der Ursprung um $+ a'$ verschoben ist,

$$x = \frac{8b'}{\pi^2} \sum_0^\infty {}_n \frac{\cos \frac{2n+1}{2a'} \pi (y - a')}{(2n+1)^2}. \tag{2}$$

Die Gleichung der *Zickzackfläche*, welche durch Parallelverschiebung der ersteren entlang der letzteren Kurve entsteht, schreibt man zweckmäßig in der Form der zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
z &= \frac{8b}{\pi^2} \sum_0^\infty {}_m \frac{\cos \frac{2m+1}{2a} \pi (x - x_1)}{(2m+1)^2} = \\
&\frac{8b}{\pi^2}\left(\cos \frac{\pi(x-x_1)}{2a} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi(x-x_1)}{2a} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi(x-x_1)}{2a} + \cdots \text{in inf.}\right), \\
x_1 &= \frac{8b'}{\pi^2} \sum_0^\infty {}_n \frac{\cos \frac{2n+1}{2a'} \pi (y - a')}{(2n+1)^2} = \\
&\frac{8b'}{\pi^2}\left(\cos \frac{\pi(y-a')}{2a'} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi(y-a')}{2a'} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi(y-a')}{2a'} + \cdots \text{in inf.}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

welche Gleichungen man durch Einsetzen des Ausdruckes von $x_1$ in die erste Gleichung in eine einzige vereinigen könnte.

**36.** Nach Art dieses abwickelbaren Vielflachs mit geschlossenen endlichen Seitenflächen kann man auch *abwickelbare Flächen mit unendlich kleinen ebenen Flächenelementen bilden.* Ich habe die *Weierstraßsche Cosinusfunktion**) hierzu verwendbar gefunden; dieselbe wird durch die unendliche Reihe dargestellt

$$z = \sum_0^\infty {}_n b^n \cos a^n x\pi = \cos x\pi + b \cos ax\pi + b^2 \cos a^2 x\pi + \cdots \text{ in inf.}, \tag{4}$$

---

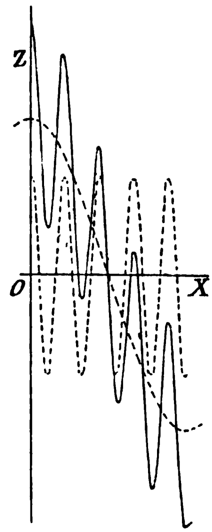
*) Mitgeteilt von Herrn *Paul Du Bois-Reymond* im Journ. f. Math., B. 79, 1874, S. 29 ff.; weiter untersucht von dem Verf. dieses Buches in dems. Journ. B. 90, 1880, S. 221 ff.

worin $a$ eine ungerade ganze Zahl, größer als Eins, $b$ eine positive Beständige, kleiner als Eins, und

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

ist. In der Figur, worin $a = 9$ und $b = 0{,}64$ gewählt wurden, sind Fig. 19. die zwei ersten Teilkurven dargestellt; dieselben sind Cosinuslinien und werden mit zunehmendem $n$ steiler, schon wenn $ab > 1$ ist. Bei den Summenkurven, von denen die zweite verzeichnet ist, entspricht einer auf- oder absteigenden Wellenhälfte einer Teilkurve ein wenigstens in seiner Mitte ebenfalls stets auf- oder absteigendes Linienstück; es ist dies durch Erfüllung jener Bedingung $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ erreicht.

Fig. 19.




Die Teilkurve und dadurch auch die Summenkurve nähert sich mit zunehmendem $n$ der Gestalt des geradlinigen Zickzacks, erstere des regelmäßigen, letztere eines nicht regelmäßigen. Es ist nämlich die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Tangente einer Teilkurve gegen die $x$Axe

$$dz : dx = -a^n b^n \pi \sin a^n x \pi,$$

wird also, da $ab > 1$, bei wachsendem $n$, absolut genommen, beliebig groß, so lange jener Sinus endlich ist, und wird nur endlich, wenn $\sin a^n x\pi$ sehr klein wird, also $a^n x$ sehr wenig von einer ganzen Zahl abweicht. Sei $a^n x_1$ die benachbarte ganze Zahl, so muß $a^n (x - x_1)$ sehr klein, oder $(x - x_1) : \frac{1}{a^n}$, d. h. das Verhältnis der Strecke $x - x_1$ zur halben Wellenlänge $1 : a^n$ sehr klein sein. Zugleich nähert sich der Krümmungshalbmesser der Teilkurve im Scheitel der Null als Grenze (35), so daß die Grenzgestalt der Teilkurve der geradlinige Zickzack ist, bei welchem die ganze Biegung in den Punkten der Scheitel vor sich geht. Die gleiche Eigenschaft überträgt sich auf die Summenkurve.

Legt man nun eine zweite solche Kurve in die $xy$Ebene von der Gleichung

$$x = \sum_0^\infty b'^n \cos a'^n \pi \left(y - \frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

worin wieder $$a'b' > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

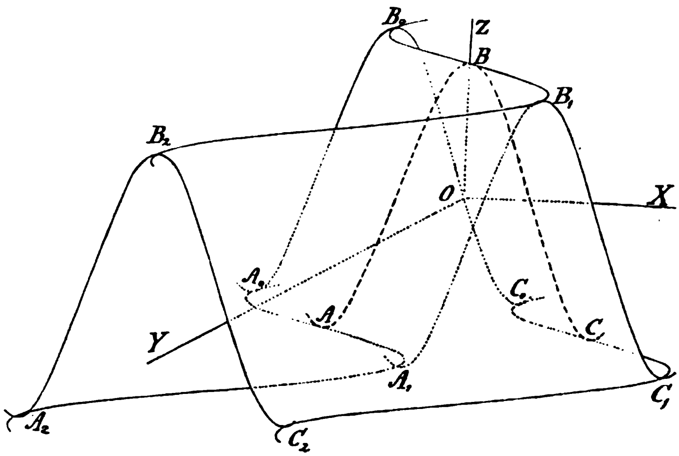
und läßt die erstere Kurve parallel zu ihrer Anfangslage sich so bewegen, daß ihr Ursprungspunkt (Koordinatenanfang) die zweite

Kurve beschreibt, so beschreibt die Kurve selbst eine abwickelbare Fläche mit unendlich kleinen ebenen Elementen. Die Gleichung derselben, in Form von zwei Gleichungen, ist dann

$$\left.\begin{aligned} z &= \sum_0^\infty{}^m\, b^m \cos a^m \pi\,(x - x_1), \\ x_1 &= \sum_0^\infty{}^n\, b'^n \cos a'^n \pi \left(y - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

welche Gleichungen man wieder durch Einsetzen des Ausdruckes von $x_1$ in die erste Gleichung in eine einzige vereinigen könnte. Fig. 20. Die Fig. 20 veranschaulicht diejenige Fläche, welche durch die zwei

Fig. 20.




ersten Teilkurven entsteht; $A_0 B_0 C_0$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ ... sind Lagen der erzeugenden ersten Kurve, $B_0 B B_1 B_2$, $C_0 C C_1 C_2$ sind die von deren Scheiteln beschriebenen mit der zweiten Kurve kongruenten Linien. Es ist bei den zweien zur Erzeugung einer Fläche verwendeten Kurven nicht notwendig, daß $m$ und $n$ gleich sind.

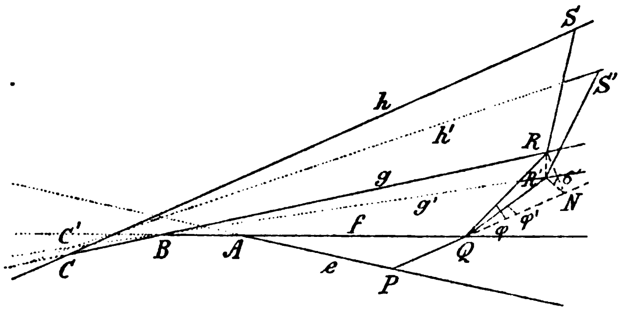
Die Grenzgestalt der Fläche, welche durch zwei *Teilkurven* bei unendlichem $m$ und $n$ entsteht, ist eine *abwickelbare Zickzackfläche*, weil die Teilkurven zu Grenzgestalten regelmäßige Zickzacklinien haben, deren Seiten gleiche unendlich kleine Winkel bezw. mit der $z$- und $x$ Axe bilden. Die Summenkurven der Gleichung (5) nähern sich nicht einem regelmäßigen Zickzacke; denn zwei aufeinander folgende Seiten einer jeden bilden mit jenen Axen verschiedene unendlich kleine Winkel (vergl. Fig. 19), weil sich die Ordinaten einer Teilkurve auf die geneigten Seiten der vorhergehenden Summenkurve aufsetzen. Bei der erzeugten Zickzackfläche (Gl. 6) ist daher die Summe

der Kantenwinkel an einer Ecke um einen unendlich kleinen Winkel von 360⁰ verschieden, d. h. diese Summe hat 360⁰ zur Grenze. Die Abweichung addirt sich aber bei einem endlichen Stücke der Fläche nicht zu einem endlichen Klaffen oder Überdecken, weil die Abweichungen an den beiden Endecken einer Kante der Fläche gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Die Fläche ist also *abwickelbar*.

Es ist hiermit eine *nicht geradlinige abwickelbare Fläche mit unendlich kleinen* (*geschlossenen*) *Flächenelementen* durch ihr Entstehungsgesetz und ihre Gleichung gegeben, welche vorgestellt, aber nicht durch Zeichnung oder ein Modell dargestellt werden kann.

**37.** Betrachten wir jetzt das wichtigere *Vielflach mit nicht geschlossenen Seitenflächen oder mit unbegrenzten Kanten. Dasselbe ist stets abwickelbar.* Seien die unbegrenzten Geraden $e, f, g, h \ldots$ die Fig. 21.

Fig. 21.




aufeinander folgenden Kanten des Vielflachs, wobei sich $e$ und $f$ in $A$, $f$ und $g$ in $B$, $g$ und $h$ in $C \ldots$ schneiden, und wobei die Seitenflächen durch die Paare der Scheitelwinkel $ef, fg, gh \ldots$ gebildet werden, so kann das ganze Vielflach in eine Ebene abgewickelt werden, etwa in die der ersten Seitenfläche $ef$, indem man alle folgenden um $f$ dreht, bis $fg$ in jene Ebene nach $fg'$ gelangt ist, dann alle auf $fg$ folgenden, bis $gh$ in dieselbe Ebene nach $g'h'$ gelangt ist, u. s. w. Das Vieleck $ABC \ldots$ ist die *Rückkehrkante* des Vielflachs und teilt dasselbe in zwei *Äste*. Das Vielflach ist *abwickelbar*, weil es bei jener Ausbreitung in einer Ebene keinen Bruch und keine Verdoppelung benachbarter Teile in einem Stücke des Vielflachs erfährt, das die Rückkehrkante nicht in seinem Inneren einschließt (34). Die beiderseits der Rückkehrkante liegenden Teile der Fläche verdoppeln sich dagegen. Zur Abwickelung ist ein Zerschneiden des Vielflachs notwendig, wenn das Vieleck $ABC \ldots$ geschlossen ist.

**38.** Aus einem abwickelbaren Vielflache mit unbegrenzten

Kanten läßt sich durch beständige Verkleinerung der Seitenflächen als Grenzgestalt *eine modellirbare abwickelbare krumme Fläche* herleiten. Nimmt man als das Vieleck $ABC\ldots$, von welchem man ausgehen kann, ein solches an, das in oder um eine unebene Kurve beschrieben ist, und läßt seine Seiten beständig gegen die Null als Grenze abnehmen, so sind die Grenzlagen ihrer verlängerten Linien die Tangenten der Kurve, *so daß eine abwickelbare Fläche durch die Gesamtheit der Tangenten einer unebenen Kurve gebildet wird.* Diese Tangenten heißen die *Erzeugenden* und die Kurve heißt die *Rückkehrkante* der Fläche. Sie teilt die Fläche in zwei Äste.

Ist die Rückkehrkante $i$ einer abwickelbaren Fläche gegeben, so kann man ein Vielflach, aus welchem sie entsteht, und welches wir ihr *anschließendes Vielflach* nennen wollen, offenbar dadurch erhal-
Fig. 22. ten, daß man auf $i$ die Punkte $A, B, C, D\ldots$ in Abständen, die man gleich machen kann, aufträgt, und die Sekanten $ABP_1$, $BCQ_1\ldots$ zieht. Diese sind dann die Kanten des Vielflachs, und die Tangenten $AP$, $PQ\ldots$ der $i$ sind deren Grenzlagen und zugleich die Erzeugenden der Fläche. Hat man eine Kurve $k$ der Fläche, welche die genannten Erzeugenden bezw. in $P$, $Q\ldots$ schneidet, und fällt von $P$, $Q\ldots$ die Senkrechten $PP_1$, $QQ_1$ bezw. auf $AB$, $BC\ldots$, so entsteht auf dem Vielflach ein Vieleck $P_1Q_1\ldots$, welches der Kurve $PQ\ldots$ *entsprechend* oder ihr *anschließendes Vieleck* genannt werden soll, und welches bei der Abnahme von $AB$, $BC\ldots$ diese Kurve zur Grenzgestalt hat. Andererseits entstehen bei der Abwickelung des Vielflachs aus den Vielecken $AB\ldots$, $P_1Q_1\ldots$ ebene Vielecke $A'B'\ldots$, $P_1'Q_1'\ldots$, welche die verwandelten der ersteren sind. Zieht man in ihrer Ebene die Senkrechten $P_1'P'$, $Q_1'Q'\ldots$ bezw. zu $A'P_1'$, $B'Q_1'\ldots$ und macht sie bezw. gleich $P_1P$, $Q_1Q\ldots$, so bilden die Punkte $P', Q'\ldots$ ein Vieleck, dessen Grenzgestalt eine Kurve $k'$ ist, welche die *Verwandelte* von $k$ heißt und auch mit der Grenzgestalt des Vielecks $P_1'Q_1'\ldots$ zusammenfällt.

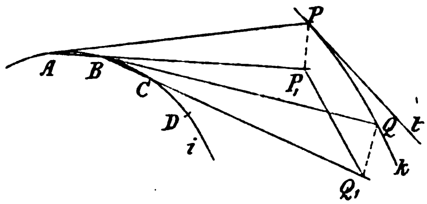
Ebenso wie man ein abwickelbares Vielflach mit unbegrenzten Kanten als das einhüllende Vielflach der aufeinander folgenden Lagen einer Ebene ansehen kann, welche sich um wechselnde Gerade derselben dreht, so *kann man eine abwickelbare Fläche als die einhüllende Fläche einer beweglichen Ebene ansehen,* und jede Erzeugende der Fläche als diejenige Gerade in einer jeden Lage der beweglichen Ebene, welche die Grenze ihrer Schnittgeraden sowohl mit einer vorhergehenden, als mit einer folgenden Lage der Ebene bildet, wenn diese in die zwischenliegende fragliche Lage hineinrücken.

**39.** Zur Aufstellung einiger Sätze über abwickelbare Flächen und ihre Abwickelung müssen wir einige Beziehungen ermitteln, die

zugleich zwischen Linien auf der abwickelbaren Fläche und dem anschließenden Vielflach und zwischen den Verwandelten von beiden gelten.

Indem wir $AB = BC = \ldots$, und alle unendlich klein machen Fig. 22. und beachten, daß sie in Vergleich mit anderen solchen vorkommenden Größen von der ersten Ordnung $(0^1)$ sind, sind auch die Winkel $PAP_1$, $QBQ_1 \ldots = 0^1$, und die Unterschiede zweier solchen aufeinander folgenden Winkel $= 0^2$ (I, 235). Daher ist $PP_1 = 0^1$ und $QQ_1 = 0^1$; und da noch $AP - BQ = 0^1$, so ist $PP_1 - QQ_1 = 0^2$. Außerdem

Fig. 22.




ist der Winkel von $PP_1$ und $QQ_1 = 0^1$, da sie in den Ebenen $PAB$, $QBC$ liegen, deren Winkel $0^1$, und senkrecht auf den Linien $AP_1$, $BQ_1$ stehen, deren Winkel ebenfalls $= 0^1$ ist. Das Viereck $PP_1Q_1Q$ weicht daher nur unendlich wenig von einem Parallelogramme ab, insbesondere ist $\sphericalangle (PQ, P_1Q_1) = (PP_1 - QQ_1) : PQ = 0^2 : 0^1 = 0^1$, $PQ - P_1Q_1 = 0^2$. — Hieraus folgert man:

1) *Eine abwickelbare Fläche wird in jedem Punkte $P$ einer Erzeugenden $PA$ von ein und derselben Ebene berührt, nämlich von der Schmiegungsebene der Rückkehrkante $i$ in deren Berührungspunkte $A$ mit jener Erzeugenden.* Denn die Tangente $t$ einer durch $P$ gehenden Kurve der Fläche bildet mit der unendlich kleinen Sehne $PQ$ der $k$ einen Winkel $= 0^1$, $PQ$ mit $P_1Q_1$ einen Winkel $0^1$, daher auch $t$ mit $P_1Q_1$ einen Winkel $0^1$; oder es liegt $t$ in der Grenzlage der Ebene $P_1BQ_1$, d. i. in der Schmiegungsebene der $i$ in $A$.

2) *Die Rückkehrkante $i$ ist eine Schneide der Fläche*, d. h. eine Kurve $k$ der Fläche hat in einem Punkte $B$ der $i$ im allgemeinen eine Spitze. Denn die beiden in $BC$ aneinander stoßenden Seitenflächen $ABC$ und $BCD$ des anschließenden Vielflachs bilden einen Winkel $0^1$ und liegen auf derselben Seite von $BC$, außer wenn $B$ ein Wendepunkt oder eine Spitze von $i$ ist (I, 259, Fälle 3, 4, 5, 6). Daher gilt dies auch von den Seiten eines auf diesem Vielflache liegenden Vielecks, wenn nicht die $BC$ selbst eine Seite des Vielecks bildet, in welchem Falle der Winkel zweier aufeinander folgenden Seiten des Vielecks im allgemeinen $= 180^0 - 0^1$ ist, jedoch auch $0^1$ sein kann. Daher hat auch die entsprechende Kurve $k$ im allgemeinen in einem Punkte $B$ der $i$ eine Spitze; doch ist dies nicht notwendig, wenn die $i$ in $B$ ein Rückkehrelement besitzt, oder wenn $k$ die $i$ in $B$ berührt.

3) *Die Rückkehrkante i ist bei jeder Projektion der abwickelbaren Fläche ein Umriß derselben*, weil jede Gerade, daher auch eine Projicirende, welche durch einen Punkt $B$ der $i$ geht, die Fläche in $B$ berührt. Denn $B$ ist eine Spitze jeder Kurve der Fläche, worin sie von einer durch jene Projicirende gelegten Ebene geschnitten wird. Einzelne Punkte der $i$ mit Rückkehrelementen ändern diese Eigenschaft der Linie $i$ nicht.

4) *Ein Stück einer Erzeugenden oder einer Kurve ändert durch die Abwickelung seine Länge nicht.* Denn $AP_1$ und das ganze rechtwinklige Dreieck $AP_1P$, also auch $AP$ bleiben ungeändert; ebenso ändert $P_1Q_1$ seine Länge nicht; und da $PQ$ von $P_1Q_1$ um $0^2$ verschieden ist, so ist auch ein endliches Stück einer Kurve $k$ von dem entsprechenden unveränderlichen Stücke des anschließenden Vielecks nur um $0^1$, d. h. nicht verschieden.

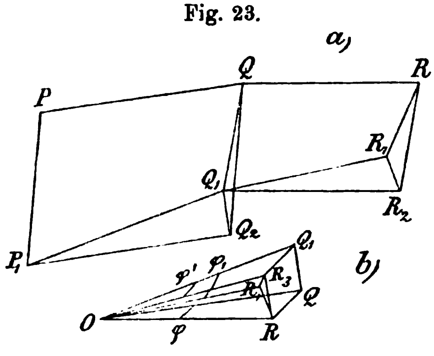
5) *Die Tangente t einer Kurve k der Fläche und diejenige t′ ihrer Verwandelten k′ in entsprechenden Punkten P und P′ bilden gleiche Winkel mit der Erzeugenden PA, bezw. P′A′ des Berührungspunktes.* Denn der Winkel der $t$ mit $P_1Q_1$, sowie der Winkel der $PA$ mit $P_1A_1$ sind vor und nach der Abwickelung $0^1$.

6) *Der Winkel zweier benachbarten Erzeugenden AP, BQ ändert sich durch die Abwickelung nicht.* Denn es ist $\sphericalangle PAP_1 = 0^1$, $\sphericalangle QBQ_1 = 0^1$, ihre Differenz $= 0^2$, und die Ebenen dieser Winkel bilden einen Winkel $= 0^1$; daher ist $\sphericalangle (PA, QB) - \sphericalangle P_1BQ_1 = 0^2$. Dasselbe gilt nach der Abwickelung; und da $\sphericalangle P_1BQ_1$ ungeändert übertragen wird, ändert sich auch $\sphericalangle (PA, QB)$, der $= 0^1$ ist, nur um $0^2$, d. h. er bleibt ungeändert. — Demnach *ändert sich der Kontingenzwinkel und die Krümmung der Rückkehrkante i in jedem ihrer Punkte durch die Abwickelung nicht.*

7) Bei dem *Kegel* wird die Rückkehrkante zu einem Punkte, der Spitze; in der Abwickelung gehen daher alle Erzeugende durch diesen Punkt. Bei dem *Cylinder* fällt derselbe ins Unendliche.

Fig. 23.

Fig. 23.




**40.** Bestimmen wir die *Änderung*, welche die *Krümmung* einer beliebigen Kurve auf einer abwickelbaren Fläche *durch die Abwickelung* erleidet.

Seien $P, Q, R$ drei benachbarte Punkte der $k$ oder ihrer Verwandelten $k'$ und sei im Raume $PQ = QR = 0^1$, seien $P_1, Q_1, R_1$ ihre entsprechenden Punkte auf Kanten des anschließenden Viel-

ecks, so soll gezeigt werden, daß die Winkel $PQR$ und $P_1Q_1R_1$, deren Unterschiede von 180° die Kontingenzwinkel und $= 0^1$ sind, nur um $0^2$ verschieden sind. Es folgt dies noch nicht daraus, daß $k'$ die Grenzgestalt der Verwandelten des anschließenden Vielecks ist, weil $\sphericalangle (PQ, P_1Q_1)$ und $\sphericalangle (QR, Q_1R_1) = 0^1$ sind.

In Nr. 39 ergab sich, daß $PP_1$, $QQ_1$, $RR_1$, sowie die Winkel zweier solcher Strecken $0^1$, daß dagegen $PP_1 - QQ_1$, $QQ_1 - RR_1$, $PQ - P_1Q_1$, $QR - Q_1R_1$ alle $0^2$ sind. Zieht man nun in Fig. a) $QQ_2 \# PP_1$, $RR_2 \# QQ_1$, wodurch auch $P_1Q_2 \# PQ$, $Q_1R_2 \# QR$ wird, zieht dann in Fig. b) $OQ$, $OR$, $OQ_1$, $OR_1$ bezw. # mit $PQ$ (und $P_1Q_2$), $QR$ (und $Q_1R_2$), $P_1Q_1$, $Q_1R_1$ der Fig. a), wodurch auch $QQ_1$ (b) # $Q_2Q_1$ (a), $RR_1$ (b) # $R_2R_1$ (a) wird, so sind $QOR = \varphi$, $Q_1OR_1 = \varphi_1$ die Kontingenzwinkel von $PQR$, bezw. $P_1Q_1R_1$. Zieht man noch in (b) $RR_3 \# QQ_1$, wodurch auch $Q_1R_3 \# QR$, so ist im Dreiecke $OQQ_1$, $OQ = 0^1$, $QQ_1 = 0^2$, $OQ - OQ_1 < QQ_1$, also $= 0^2$, wenn nicht kleiner, ebenso in $ORR_3$, $OR - OR_3 = 0^2$, w. n. kl. In den Dreiecken $OQQ_1$, $ORR_3$ sind $OQ = OR$, $QQ_1 \# RR_3$, die eingeschlossenen Winkel $Q$ und $R$ wegen $\sphericalangle QOR = 0^1$ höchstens um $\varphi = 0^1$ verschieden; daher ist $OQ_1 - OR_3 = QQ_1 \cdot 0^1 = 0^3$. Demnach sind in dem Dreiecke $OQ_1R_3$ die Seiten $OQ_1$ und $OR_3$ ($= OQ + 0^2$) nur um ein $0^3$ verschieden, und bezeichnet man den Winkel $Q_1OR_3$ mit $\varphi'$, so ist $QR = OQ \cdot \varphi$, $Q_1R_3 = OQ_1 \cdot \varphi' = (OQ + 0^2)\varphi'$, daher wegen $QR = Q_1R_3$ auch $OQ \cdot \varphi = (OQ + 0^2)\varphi'$, $\varphi - \varphi' = (0^2 \cdot \varphi') : OQ = 0^2$. Da ferner der Winkel von $Q_1Q_2$ und $R_1R_2$ in (a) $= \sphericalangle R_3RR_1$ in (b) $= 0^1$, $RR_1 = 0^2$, so ist $R_1R_3 = 0^3$, $\sphericalangle R_3OR_1 = 0^3 : 0^1 = 0^2$. Daher ist auch $\sphericalangle Q_1OR_1 = \varphi_1 = \varphi' + 0^2 = \varphi + 0^2$, w. z. b. w.

Da diese Entwickelung für die Gestalt vor und für die nach der Abwickelung gilt, also in jedem Falle der Kontingenzwinkel einer Kurve $k$ von dem entsprechenden des anschließenden Vielecks nur um $0^2$ verschieden ist, beide selbst aber $0^1$ betragen, *so erleidet der Kontingenzwinkel einer Kurve k der Fläche durch deren Abwickelung dieselbe Veränderung, wie sein entsprechender Winkel auf dem anschließenden Vielflache.*

**41.** Ist nun $PQRS$ ein Vieleck auf dem anschließenden Vielflache mit unendlich kleinen Seiten, $PQR'S'$ seine Abwickelung in die Ebene der ersten Fläche $PQA$, daher $RR' \perp PQA$, $QN$ die Verlängerung von $PQ$, so sind $NQR$, $NQR'$ die Kontingenzwinkel $\varphi, \varphi'$ vor und nach der Abwickelung. Zieht man $RN \perp QN$, so ist auch $R'N \perp QN$, und $\sphericalangle R'NR = \sigma$ ist der Winkel der Seitenfläche $PQA$ mit der Ebene $NQR$ zweier aufeinander folgenden Seiten $PQ$, $QR$, welcher übereinstimmt mit dem Winkel der Be- Fig. 24.

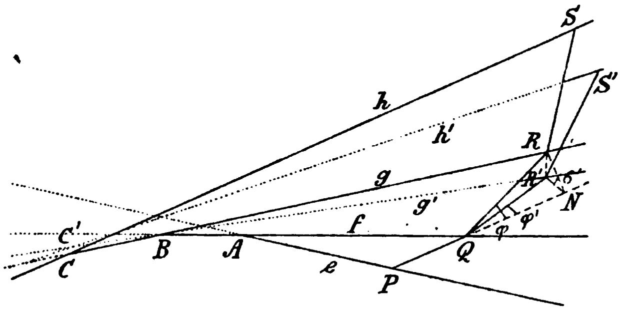
rührungsebene der Fläche und der Schmiegungsebene der Kurve in $Q$. Nun ist offenbar

$$\cos\sigma = \frac{NR'}{NR} = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{r}{r'},$$

wenn $r, r'$ die Krümmungshalbmesser der $k$ bezw. $k'$ in $Q$ sind.

Die Formel sagt: *Das Verhältnis des Krümmungshalbmessers $r$ einer Kurve einer abwickelbaren Fläche in einem ihrer Punkte zum*

Fig. 24.




*Krümmungshalbmesser $r'$ ihrer Verwandelten im entsprechenden Punkte ist gleich dem Cosinus des Winkels $\sigma$ der Schmiegungsebene der Kurve und der Berührungsebene der Fläche in jenem Punkte.*

**42.** *Soll der Krümmungshalbmesser $r'$ einer Verwandelten $k'$ unendlich groß werden*, so muß, wenn nicht gerade schon für $k$ der entsprechende $r = \infty$ ist, $\cos\sigma = 0$, $\sigma = 90^0$ werden, oder es *muß die Schmiegungsebene der ursprünglichen Kurve $k$ in dem entsprechenden Punkte senkrecht auf der Berührungsebene der abwickelbaren Fläche stehen.* Dann tritt in $k'$ im allgemeinen ein *Wendepunkt* ein, indem im allgemeinen drei aufeinander folgende Punkte in eine Gerade fallen.

Sollen alle Punkte der $k'$ in eine Gerade fallen, so ist sie, und auf der abwickelbaren Fläche die entsprechende $k$, die kürzeste Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte, und heißt *kürzeste oder geodätische Linie. Bei einer solchen steht die Schmiegungsebene in jedem ihrer Punkte senkrecht auf der Berührungsebene der Fläche.* Diese Eigenschaft besitzt auch die kürzeste oder geodätische Linie $k$ *einer jeden Fläche*; denn legt man entlang derselben die berührenden Ebenen der Fläche, so werden dieselben von einer abwickelbaren Fläche eingehüllt, welche jene Fläche entlang $k$ berührt, und auf welcher ebenfalls $k$ eine geodätische Linie ist. Die Schmiegungsebenen der $k$ stehen dann auf den gemeinschaftlichen Berührungsebenen beider Flächen senkrecht. Ein auf einer glatten Oberfläche gespannter biegsamer Faden bildet eine geodätische Linie, weil

beim Gleichgewicht die Mittelkraft der Spannungen zweier aufeinander folgenden Elemente des Fadens senkrecht auf der Fläche stehen muß, zugleich aber in der Schmiegungsebene der Fadenlinie liegt.

**43.** Außer durch ihre Rückkehrkante oder durch Einhüllung einer beweglichen Ebene (38) kann *eine abwickelbare Fläche auch durch Leitlinien $l$ und $l_1$ bestimmt sein.* Um durch einen Punkt $A$ der $l$ eine Erzeugende zu ziehen, lege man aus $A$ als Spitze durch $l_1$ einen Kegel, ziehe die Tangente $t$ der $l$ in $A$, lege durch $t$ eine berührende Ebene an den Kegel, so ist seine Berührungserzeugende auch die Erzeugende $e$ der abwickelbaren Fläche, und jene Berührungsebene des Kegels auch ihre Berührungsebene, weil sie die Tangente der $l$ in $A$ und der $l_1$ in deren Schnittpunkte $A_1$ mit $e$ enthält. Die abwickelbare Fläche, welche alle diese die $l$ und $l_1$ zugleich berührende Ebenen einhüllt, ist aber offenbar die verlangte, deren Erzeugende die $l$ und $l_1$ schneiden.

Durch $A$ gehen so viele Erzeugende, als Berührungsebenen durch $t$ an jenen Kegel gelegt werden können, als demnach die Klasse einer ebenen Schnittkurve des Kegels, d. i. einer Projektion der $l_1$, angibt. Die Leitlinie $l$ ist daher eine ebenso *vielfache* Kurve der Fläche.

Man kann auch eine oder beide Leitlinien durch *Leitflächen* ersetzen, die von den Erzeugenden berührt werden sollen; und die abwickelbare Fläche kann man in allen diesen Fällen auch als die *Einhüllende* einer Ebene ansehen, welche auf zwei Leitlinien, auf einer Leitlinie und einer Leitfläche oder auf zwei Leitflächen berührend hinrollt. Die *Erzeugenden* sind stets die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte derselben Ebene mit den beiden Leitlinien bezw. Leitflächen.

Liegt eine Leitlinie im Unendlichen, so wird sie durch einen Kegel gegeben, welcher sie projicirt und der *Richtkegel* der abwickelbaren Fläche heißt. Mit jeder Erzeugenden des Richtkegels ist eine Erzeugende der abwickelbaren Fläche parallel, und in diesen *entsprechenden* Erzeugenden sind auch die Berührungsebenen beider Flächen zu einander parallel.

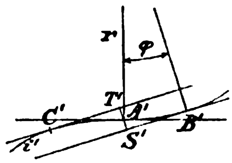
**44.** Eine besondere Art von abwickelbaren Flächen hat für die Kurven eine Bedeutung, nämlich ihre *Evolutenfläche.* Sie ist die *Einhüllende der Normalebenen der Kurve* und besitzt die Eigenschaft, daß, wenn man auf ihr eine Ebene abrollen läßt, ein Punkt derselben, nämlich der in ihr liegende Punkt der Kurve, in welchem sie zu dieser normal steht, die Kurve beschreibt. Denn dreht sich die Normalebene um die in ihr liegende Erzeugende der abwickelbaren Fläche, so beschreibt jener Punkt ein auf der Ebene senk-

rechtes Linienelement, also das Element der Kurve. Zieht man in einer solchen Normalebene der Kurve durch ihren Fußpunkt alle Normalen der Kurve, so werden diese Geraden beim Aufwickeln der Ebene auf die abwickelbare Fläche zu *geodätischen Linien* derselben, deren Tangente stets der noch nicht aufgewickelte Rest der betreffenden Normale ist. Alle diese geodätischen Linien sind daher *Evoluten der Kurve*, deren dieselbe demnach unendlich viele besitzt. Die Evolutenfläche einer ebenen Kurve ist der Cylinder, welcher die in der Ebene der Kurve liegende Evolute derselben zum senkrechten Schnitte hat.

**45.** Da sich zwei nahe zusammenliegende Erzeugende einer abwickelbaren Fläche nicht schneiden, so ist es von Belang, den Grenzwert des Verhältnisses des Abstandes dieser Erzeugenden zu dem Abstande ihrer Berührungspunkte auf der Rückkehrkante $i$ zu bestimmen. Sei $A$ ein Punkt der $i$, und bilden wir die Projektion $i'$ der $i$ auf ihre rektificirende Ebene in $A$, so besitzt $i'$ im allgemeinen einen Wendepunkt in $A'$ (I, 260); ziehen wir dann an $i'$ zwei untereinander parallele in den unendlich nahe bei $A'$ liegenden Punkten $B'$ und $C'$ berührende Tangenten, so ist der kürzeste Abstand der Tangenten der $i$ in $B$ und $C = S'T'$, wenn $A'S' \perp B'S'$, $A'T' \perp C'T'$. Ist noch $A'B' = s$, $\varphi$ der Winkel der Normalen der $i'$ in $A'$ und $B'$, und $r$ der Krümmungshalbmesser der $i'$ in $A'$, so ist $A'S' = \frac{1}{2} s\varphi$, $\varphi = s : r$, $A'S' = \frac{1}{2} s^2 : r$ (I, 236, 5)), und da im Wendepunkt $r = \infty = 1 : 0^1$, so ist für $s = 0^1$, $A'S' = 0^3$, daher auch $S'T' = 0^3$ und $ST = 0^3$, d. h. *der kürzeste Abstand zweier benachbarten Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche ist unendlich klein von der dritten Ordnung.*

Fig. 25.

Fig. 25.



# II. Abschnitt.

## Der Schnitt des Cylinders und Kegels mit einer Ebene und einer Geraden und die Abwickelung der Fläche.

### I. Allgemeines Verfahren.

**46.** *Die Schnittlinie einer krummen Fläche mit einer Ebene* wird erhalten, indem man eine Anzahl von Erzeugenden der Fläche mit der Ebene schneidet (I, 256), und die Schnittpunkte als Punkte der Schnittkurve in der Reihenfolge der sie enthaltenden Erzeugenden durch einen stetigen Zug verbindet. Da eine Fläche durch verschiedene Erzeugende entstehen kann, so wählt man diejenigen, deren Projektionen am leichtesten verzeichnet werden können, also womöglich Gerade oder Kreise sind.

Eine vorteilhafte Lage einer schneidenden Ebene ist im allgemeinen die auf einer **P** senkrechte, weil dann ihre Projektion eine Gerade ist, und ihre Schnittpunkte mit den Erzeugenden sich unmittelbar ergeben. Man wendet daher bei einer Schnittebene von allgemeiner Lage häufig solche auf einer **P** senkrechte Ebenen als Hilfsebenen an; man bestimmt die Schnittlinien einer solchen mit der Fläche und mit der gegebenen Ebene, die Schnittpunkte beider sind dann Punkte der gesuchten Kurve. Manchmal sind auch andere Hilfsebenen vorteilhaft, deren Schnittlinien mit der Fläche leicht zu verzeichnende Projektionen besitzen.

Die *Tangente* an die Schnittkurve in einem gegebenen Punkte derselben wird als die Schnittgerade der schneidenden Ebene mit der Berührungsebene der Fläche in jenem Punkte gefunden. Denn in jeder von beiden Ebenen muß die Tangente liegen (7).

Die *Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche* findet man, indem man durch die Gerade eine Ebene legt und ihre Schnittlinie mit der Fläche bestimmt; die Schnittpunkte dieser Linie mit der Geraden sind die gesuchten Punkte. Die Hilfsebene ist dann vorteilhaft, wenn ihre Schnittlinie mit der Fläche sich als eine möglichst einfache Linie projicirt, am besten als Gerade oder Kreis.

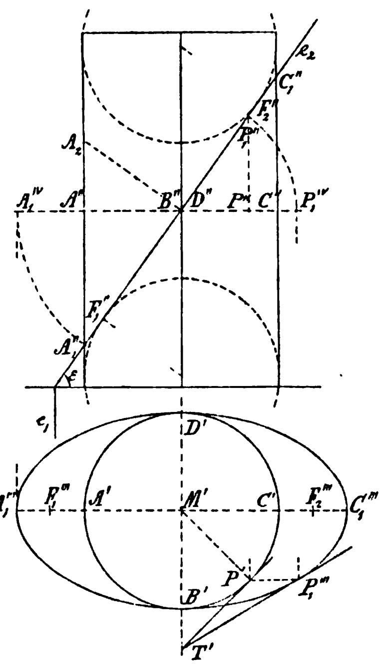
## II. Ebener Schnitt und Abwickelung des Cylinders.

**47.** Zwei ebene Schnittkurven eines Cylinders, ihre Parallelprojektionen auf ein und dieselbe Ebene, und endlich die eine Schnittkurve und die Umlegung der anderen in die Ebene der ersteren sind *perspektiv-affine Figuren*, deren Affinitätsaxe die Schnittlinie beider Ebenen oder deren Projektion bildet.

*Aufg. Von der Schnittkurve eines auf* $\mathbf{P}_1$ *senkrechten Umdrehungscylinders mit einer auf* $\mathbf{P}_2$ *senkrechten Ebene* **E** *sollen die wahre Gestalt und die bei der Abwickelung des Cylinders entstehende Verwandelte bestimmt werden.*

Fig. 26a. *Aufl.* Die erste Spur und Projektion des Cylinders sei der Kreis $A'B'C'D'$, die zweite Spur und Projektion der Ebene **E** die Gerade $e_2$, so sind beide Linien bezw. auch die erste und zweite Projektion der Schnittkurve. Diese ist eine Ellipse $A_1BC_1D$, deren große Axe $A_1C_1$ mit $\mathbf{P}_2$ parallel läuft, deren kleine $BD$ auf $\mathbf{P}_2$ senkrecht steht.

Fig. 26a.



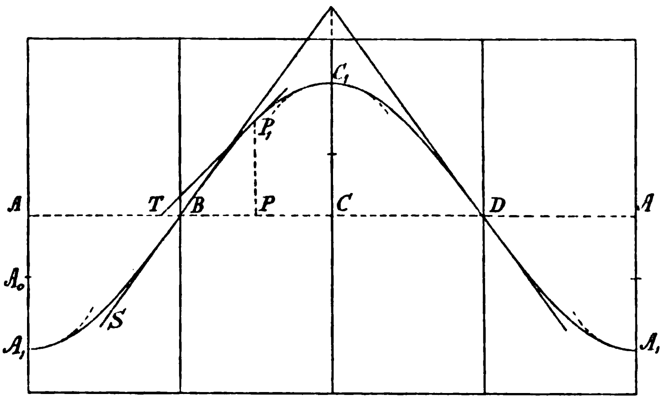
Um die *wahre Gestalt* dieser Ellipse zu erhalten, drehe man sie um die zu $\mathbf{P}_1$ parallele Axe $BD$ in eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene. Ein beliebiger Punkt $P_1$ der Schnittkurve beschreibt bei der Drehung einen Kreisbogen ($P'P_1'''$, $P_1''P_1^{IV}$). Die erste Projektion $A_1'''B'P_1'''C_1'''D'$ der gedrehten Figur zeigt die wahre Gestalt, die mit dem Kreise $A'B'C'D'$ perspektiv-affin ist. Die Tangente $P_1T$ trifft die Drehaxe in $T$ und geht durch die Drehung im Grundriß in $T'P_1'''$ über.

Die *Brennpunkte* $F_1'''$ und $F_2'''$ der wahren Gestalt ergeben sich aus den Berührungspunkten der **E** mit den beiden Kugeln, welche zugleich den Cylinder nach je einem Kreise und die **E** berühren.

Fig. 26b. **48.** Bei der *Abwickelung eines Cylinders* werden alle Erzeugende zu parallelen Geraden (39, 7)), jeder senkrechte Schnitt wird zu einer auf den Erzeugenden senkrechten Geraden (39, 5)), daher die Ab-

wickelung unseres durch zwei senkrechte Schnitte begrenzten Cylinders zu einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem rektificirten Grundkreise und dessen Höhe gleich der Länge der Erzeugenden ist. Der durch den Mittelpunkt der Schnittkurve gelegte senkrechte Schnitt des Cylinders ist der Kreis $ABPCD$, seine Verwandelte die Gerade $ABPCDA$. Indem man den Cylinder nach der Erzeugenden von $A$ aufgeschnitten denkt, erhält man die Erzeugenden der Teilungspunkte durch Einteilung der Rektificirten $AA$ in vier gleiche Teile, den Punkt $P$ durch Übertragen des Bogens $BP$ mittelst kleiner Bogenstücke.

Fig. 26b.



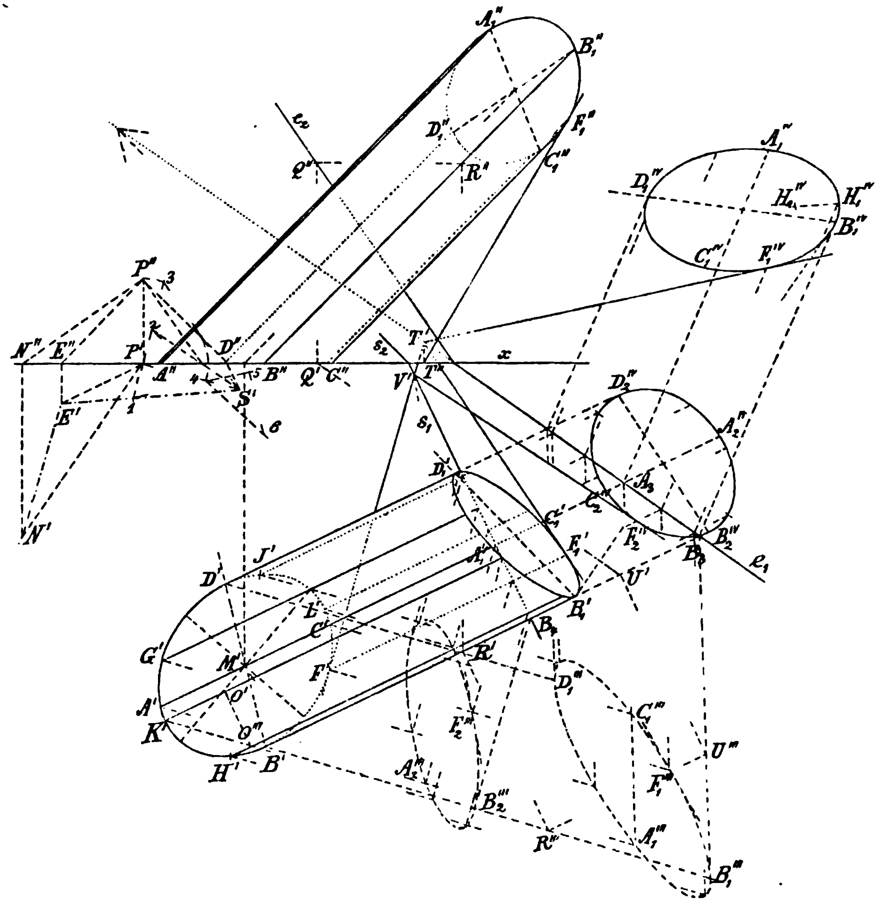

Die *Verwandelte der Schnittkurve* erhält man durch Übertragen der Stücke der Erzeugenden zwischen dieser Kurve und dem Kreise $ABPCD$, indem man z. B. $PP_1 = P''P_1''$ macht. Um die *Tangente* im Punkte $P_1$ zu verzeichnen, beachte man, daß sich ihr Winkel mit der Erzeugenden $PP_1$ durch die Abwickelung nicht ändert, und daß derselbe in dem rechtwinkligen Dreiecke $P_1PT$ enthalten ist, welches man vollendet, wenn man $PT = P'T'$ oder $P_1T = P_1'''T'$ überträgt.

Die Tangenten in $A_1$ und $C_1$ stehen vor und nach der Abwickelung senkrecht auf den Erzeugenden, die *Wendepunkte* der Verwandelten sind $B$ und $D$, weil vor der Abwickelung in den ihnen entsprechenden Punkten $B$ und $D$ die Schmiegungsebenen, d. i. die $\mathbf{E}$, senkrecht auf den Berührungsebenen des Cylinders stehen (42). Die Tangente $BS$ wird durch $\sphericalangle ABS = \sphericalangle A''B''A_1''$ = der ersten Grundneigung $\varepsilon$ der $\mathbf{E}$ bestimmt. *Der Krümmungshalbmesser* $r'$ *der Verwandelten in* $A_1$ (und $C_1$) wird $A_1A_0 = A''A_2$ erhalten, wenn man $B''A_2 \perp e_2$ bis $A_2$ auf $A''A_1''$ zieht. Denn ist $a = M'A'$ der Halbmesser des Grundkreises des Cylinders, so sind die Axen

der Schnittellipse $a : \cos \varepsilon$ und $a$, und ihr Krümmungshalbmesser in $A_1$ ist $r = a^2 : (a : \cos \varepsilon) = a \cos \varepsilon$; da ferner der Winkel der Schmiegungsebene (E) mit der Berührungsebene des Cylinders in $A_1$, $\sigma = 90^0 - \varepsilon$ ist, so ergibt sich (41)

$$r' = r : \cos \sigma = r : \sin \varepsilon = a \cot \varepsilon = A'' A_2.$$

Fig. 27a.



Zur Verzeichnung der Verwandelten genügen meistens die Wendepunkte und Scheitel mit ihren Krümmungskreisen.

Die *Verwandelte der Schnittkurve ist eine Sinoide oder Sinuslinie*, deren unendlich vielen Wellen man durch das unbegrenzte Abrollen des Cylinders auf einer Ebene erhält. Nimmt man $B$ als Ursprung der rechtwinkligen Koordinaten, $BC$ als $x$ Axe, so daß für $P_1$

$$BP = x, \qquad PP_1 = y,$$

so ist $\qquad x = \text{Bog.}\, B'P', \quad \text{also} \quad \measuredangle\, B'M'P' = \frac{x}{a},$

$$P''P_1'' = y = B''P' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = a \sin \frac{x}{a} \operatorname{tg} \varepsilon\,.$$

Ist $T$ der Schnittpunkt der Tangente in $P_1$ mit der $x$Axe, so ist die

$$\text{Subtangente} = PT = P'T' = a \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

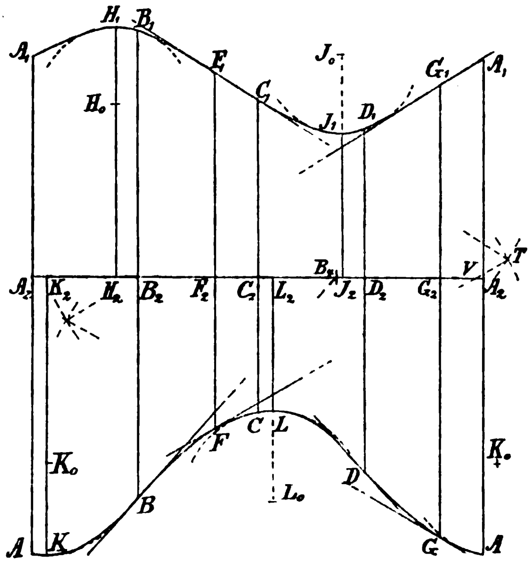
unabhängig von $\varepsilon$, und ferner

$$\operatorname{tg} PTP_1 = \frac{y}{\text{subtg}} = \cos \frac{x}{a} \operatorname{tg} \varepsilon\,.$$

**49.** *Aufg. Die Schnittkurve eines beliebigen Cylinders mit einer beliebigen Ebene zu bestimmen und ihre bei der Abwickelung des Cylinders entstehende Verwandelte zu konstruiren.*

Fig. 27 a.

Fig. 27 b.



*Aufl.* Es sei die in $\mathbf{P}_1$ liegende Ellipse $ABCD$ mit dem Mittelpunkte $M$ die Leitlinie, $BR$ eine Erzeugende des Cylinders, $e_1$, $e_2$ seien die Spuren der Schnittebene $\mathbf{E}$. Um die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der $\mathbf{E}$ und zugleich die für die Abwickelung notwendigen wahren Längen der auf den Erzeugenden abgeschnittenen Stücke zu erhalten, lege man durch dieselben die ersten projicirenden Ebenen, schneide diese mit $\mathbf{E}$ und lege sie dann samt den Erzeugenden und diesen Schnittlinien in $\mathbf{P}_1$ um, wodurch sich die Schnittpunkte beider Linien ergeben. Verfährt man so mit der Erzeugenden $BR$, so gelangt diese nach $B'R'''$ ($R'R''' \perp B'R'$, $R'R'''$ = Abstand des $R''$ von $x$), und die Schnittlinie der projicirenden Ebene mit $\mathbf{E}$ nach $B_3U'''$ ($B_3$ Schnitt von $B'R'$ mit $e_1$, $Q''$ ein Punkt der $e_2$, $Q'U'$ [ $\parallel e_1$] eine mit $e_1$ Parallele in $\mathbf{E}$, $U$ ihr Schnitt mit jener projicirenden Ebene, $U'''$ dessen Umlegung, indem $U'U''' \perp B'U'$ und $= Q'Q''$; dabei sind die Abstände des $R''$ und $Q''$ von $x$ gleich angenommen). $B'R'''$

und $B_3U'''$ schneiden sich in $B_1'''$, woraus sich die Projektionen $B_1'$ und $B_1''$ des Schnittpunktes $B_1$ der Erzeugenden mit **E** ergeben. — Für eine andere Erzeugende, z. B. die aus $A$, zieht man $A'A_1''' \parallel B'B_1'''$ und $A_3A_1''' \parallel B_3B_1'''$. Man kann sich vorerst mit den vier Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ der Grundellipse begnügen, welche die Endpunkte zweier konjugirten Durchmesser sind, und von denen $B$ und $D$ auf dem ersten Umrisse liegen. Die vier erhaltenen Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ sind dann ebenfalls Endpunkte zweier konjugirter Durchmesser der Schnittellipse, in der wahren Gestalt und in den Projektionen.

Die Kurve $A_1'''B_1'''C_1'''D_1'''$ ist eine *Ellipse* als affine Figur zur Grundellipse mit $A'A_1'''$ als Strahl und $e_1$ als Axe, oder als Parallelprojektion von $A_1B_1C_1D_1$ mit den Sehnen der beim Umlegen jener Hilfsebenen beschriebenen Kreisbogen als parallelen Projicirenden.

**50.** Zur Bestimmung der *wahren Gestalt der Schnittkurve* lege man **E** um $e_1$ in $\mathbf{P}_1$ um. Die Bahn eines Punktes $B_1'$ im Grundriß ist eine auf $e_1$ senkrechte Gerade $B_1'B_1^{IV}$, und da der Abstand des $B_1$ vom Punkte $B_3$ der $e_1$ ungeändert bleibt, mache man $B_3B_1^{IV} = B_3B_1'''$. Für einen andern Punkt $A_1$ mache man $A_3A_1^{IV} \parallel B_3B_3^{IV}$ und $= A_3A_1'''$. $A_1^{IV}C_1^{IV}$ und $B_1^{IV}D_1^{IV}$ sind konjugirte Durchmesser.

**51.** Zur Abwickelung einer Fläche ist es stets vorteilhaft eine Kurve derselben zu besitzen, deren Verwandelte eine bekannte Gestalt hat. Bei dem Cylinder ist dies eine zu den Erzeugenden senkrechte Schnittkurve, die zu einer Geraden wird. Wir brauchen von ihr die wahre Gestalt und die Längen der von ihr auf den Erzeugenden hervorgebrachten Abschnitte, nicht aber die Projektionen. Die Spuren $s_1$, $s_2$ einer senkrechten Schnittebene **S** sind senkrecht auf den gleichnamigen Projektionen der Erzeugenden, und man erhält ihren Schnittpunkt $B_2$ mit einer solchen, wenn man aus dem Schnittpunkte $B_4$ der $B'R'$ mit $s_1$ die Senkrechte $B_4B_2'''$ auf $B'R'''$ fällt, deren Fußpunkt $B_2'''$ ist; die Senkrechte ist nämlich die Umlegung des Schnittes der ersten projicirenden Ebene von $BR$ mit **S**. Legt man dann **S** um $s_1$ in $\mathbf{P}_1$ um, so gelangt $B_2$ nach $B_2^{IV}$, wenn $B'B_2^{IV}$ ($\perp s_1$) die verlängerte erste Projektion einer Erzeugenden und $B_4B_2^{IV} = B_4B_2'''$. So erhält man *die wahre Gestalt des elliptischen senkrechten Schnittes* mit $A_2^{IV}C_2^{IV}$ und $B_2^{IV}D_2^{IV}$ als konjugirten Durchmessern. Auch $A_2'''B_2'''$ ... ist eine Ellipse.

**52.** Um die *Abwickelung* zu verzeichnen, trage man die Länge der senkrechten Schnittkurve $A_2^{IV}B_2^{IV}$ ... sammt ihren konstruirten Punkten mittelst kleiner Bogenstückchen auf einer Geraden nach
Fig. 27b. $A_2B_2$ ... auf, ziehe durch alle bezeichneten Punkte die zu dieser

Geraden senkrechten Erzeugenden, übertrage auf sie im entsprechenden Sinne die wahren Längen der Erzeugenden zwischen deren senkrechtem Schnitte und der Grundellipse bezw. dem schiefen Schnitte, welche aus deren Umlegung zu entnehmen sind, also $B_2 B = B_2''' B'$, $B_2 B_1 = B_2''' B_1'''$, so erhält man die Verwandelte $AB \ldots$ der Grundellipse und die $A_1 B_1 \ldots$ des schiefen Schnittes.

**53.** Um die *Tangenten* an alle erhaltenen Kurven in den Punkten $F$, $F_1$ einer beliebigen Erzeugenden zu bestimmen, ziehe man die Tangente an die Grundellipse in $F'$ als erste Spur der Berührungsebene des Cylinders nach der fraglichen Erzeugenden. Diese treffe $s_1$ in $V'$, $e_1$ in $T'$, so sind $V' F_2^{IV}$ und $V' F_2'''$, sowie $T' F_1'$, $T' F_1^{IV}$, $T' F_1'''$ und $T'' F_1''$ die gesuchten Tangenten. Die Tangenten an die Verwandelte in $F$ und $F_1$ bilden mit der Erzeugenden ein Dreieck $F F_1 T$, dessen Seiten $FT = F' T'$, $F_1 T = F_1^{IV} T'$ bekannt sind und zu seiner Verzeichnung in der Abwickelung und dadurch zur Bestimmung der Tangenten dienen. Auch ist in einem bei $F_2$ rechtwinkligen Dreiecke $F_2 V = F_2^{IV} V'$ und $FV = F' V'$.

**54.** Als *bemerkenswerte Punkte* der Kurven wollen wir zuerst diejenigen aufsuchen, *in denen die Tangente senkrecht auf der Erzeugenden des Cylinders steht.* Für die Grundellipse sind dies $K$ und $L$. Der *Krümmungshalbmesser der Verwandelten* in diesen Punkten ist $KK_0 = K' O'''$, wenn $K' O'$ als Krümmungshalbmesser der Grundellipse unter Benutzung der beiden Axen nach I, 392, 3) ermittelt, und $O'''$ auf der umgelegten Cylindererzeugenden durch $O' O''' \perp K' O'$ bestimmt wurde. Denn es ist $r = K' O'$, $\sigma = \sphericalangle O' K' O'''$, $K' O''' = r : \cos \sigma = r'$ (41). Es ist dann auch $LL_0 = KK_0$. — In dem Schnitte des Cylinders mit **E** müssen jene auf den Erzeugenden senkrechten Tangenten parallel sowohl zu **E** als zu **S** sein, also parallel zu ihrer Schnittlinie, oder zu der Schnittlinie $PS$ zweier Ebenen, die durch einen Punkt $P$ der $\mathbf{P}_2$ parallel zu **E** bezw. zu **S** gelegt sind. $S'$ als Schnittpunkt ihrer ersten Spuren ist die erste, $P''$ die zweite Spur der Schnittlinie. Die Berührungsebene des Cylinders in den fraglichen Punkten muß nun parallel zu $PS$ und außerdem zu $PE$ sein, wenn $PE$ mit den Erzeugenden gleichläuft; also ist jene Berührungsebene parallel zu der Ebene $PSE$, und ihre erste Spur parallel zu der ersten Spur $S' E'$ dieser Ebene. Die zu $S' E'$ parallel an die Grundellipse gezogenen Tangenten berühren diese in $H'$, $J'$, wenn Durchmesser $H' M' J'$ konjugirt zur Richtung $S' E'$; es sind dann die Punkte $H_1$, $J_1$ der Verwandelten bestimmt.

Zur Ermittlung der *Krümmungshalbmesser der Verwandelten* $H_1 H_0 = J_1 J_0 = r'$ bestimmt man zuerst den Krümmungshalbmesser der Ellipse in $H_1^{IV} = H_1^{IV} H_0^{IV} = r$, und dann den Winkel $\sigma$

der Schmiegungsebene **E** mit der Berührungsebene nach I, 105. Parallel zu diesen Ebenen sind solche schon durch $P$ gelegt, deren Schnittlinie $PS$ bildet. Die erste Spur einer Winkelebene sei die zu $P'S'$ Senkrechte $P'3$, welche die ersten Spuren jener Ebenen in 1 bezw. 2 trifft; man mache $P'3 = P'P''$, ziehe $3S'$, daran einen berührenden Kreis aus $P'$, welcher die $P'S'$ in 4 schneidet; dann ist $\sphericalangle 1\,4\,2 = \sigma$, und $r' = r : \cos\sigma = 4\,6$, wenn auf $1\,4$ die $4\,5 = r = H_1^{IV}H_0^{IV}$, 6 auf $2\,4$, $\sphericalangle 4\,5\,6 = 90^0$..

*Übungsaufgabe.* Man suche die Punkte der Schnittkurve mit **E**, in welchen ihre Tangente parallel ist mit einer beliebig gegebenen Ebene, und diejenigen, in welchen sie einen beliebig gegebenen Winkel mit der Erzeugenden bildet.

**55.** Die *Wendepunkte* der Verwandelten entstehen aus denjenigen Punkten der Schnittkurve, in welchen die Berührungsebene senkrecht auf der Schnittebene steht (42). Für die Grundellipse trifft dies in den Punkten $B$ und $D$ zu. Für die Schnittkurve mit **E** lege man die zu **E** senkrechten Berührungsebenen an den Cylinder. Ihre Stellung wird durch die zu den Erzeugenden Parallele $PE$ und die zu **E** senkrechte $PN$ bestimmt; die erste Spur der Ebene dieser Geraden ist $E'N'$. Die mit ihr parallelen Berührungsebenen berühren die Grundellipse in $F'$ und $G'$, wenn Durchmesser $F'M'G'$ konjugirt zur Richtung $E'N'$. Daraus bestimmen sich die Punkte $F_1$ und $G_1$, welche Wendepunkte der Verwandelten sind. Die Tangenten in denselben werden nach dem allgemeinen Verfahren bestimmt und sind, wie stets bei Wendepunkten, besonders vorteilhaft. Die Tangente in $B$ wird durch das rechtwinklige Dreieck $BB_2B_4 \cong B'B_2'''B_4$ bestimmt.

### III. Ebener Schnitt und Abwickelung des Kegels.

**56.** Zwei ebene Schnittkurven eines Kegels und ihre Projektionen auf dieselbe Ebene sind *perspektiv-kollineare Figuren*, deren Kollineationsmittelpunkt und Axe die Spitze des Kegels und die Schnittlinie beider Ebenen bezw. deren Projektionen sind. Ebenso sind die eine Figur und die Umlegung der anderen in ihre Ebene perspektiv-affin, und haben die Schnittlinie beider Ebenen zur Axe und die Umlegung der Spitze samt einer durch sie parallel zur umgelegten Ebene geführten Ebene in die feste Ebene zum Kollineationsmittelpunkte (I, 305).

**57.** *Aufg. Die Schnittkurve eines mit seiner Axe senkrecht auf* $\mathbf{P}_1$ *stehenden Umdrehungskegels mit einer auf* $\mathbf{S}_2$ *senkrechten Ebene* **E**,

*die wahre Gestalt der Schnittkurve und die Abwickelung des Kegels zu verzeichnen.*

*Aufl.* Je nachdem die **E** mit keiner, mit einer oder mit zweien Erzeugenden des Kegels parallel ist, entsteht eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel (I, 329). Die Fälle der Ellipse und der Hyperbel sollen betrachtet werden.

Weil $\mathbf{E} \perp \mathbf{P}_2$, ergeben sich die Schnittpunkte der Kegelerzeugenden mit **E** unmittelbar in der zweiten Projektion. Die große Axe der Ellipse liegt in dem auf **E** senkrechten Meridiane (I, 329), also in dem Hauptmeridiane $ASC$, die Scheitel sind $A_1$ und $C_1$. Die auf $\mathbf{P}_2$ senkrechte Meridianebene liefert auf den Erzeugenden $SB$ und $SD$ die Schnittpunkte $B_1$ und $D_1$, deren erste Projektionen sich aber hier nicht unmittelbar aus der zweiten bestimmen lassen. Man wendet daher den durch $B_1''$ gehenden Parallelkreis vom Halbmesser $B_1''B_2$ an, dessen erste Projektion die Punkte $B_1'$ und $D_1'$ enthält. Die Parallelkreise liefern die dem $B_1'$ und $D_1'$ benachbarten Punkte genauer, als die Erzeugenden. Die kleine Axe $G_1H_1$ der Ellipse hat den Mittelpunkt $G_1''$ von $A_1''C_1''$ zur zweiten Projektion, woraus ihre erste Projektion folgt. Fig. 28a.

Der Grundkreis $k$ und die erste Projektion $s'$ des Schnittes sind perspektiv-kollinear mit $S'$ als Mittelpunkt und $e_1$ als Axe der Kollineation. Demnach haben sie das involutorische Büschel zugeordneter Strahlen aus $S'$ gemein; dasselbe ist aber, wie sich aus dem Kreise ergibt, rechtwinklig; *daher ist $S'$ ein Brennpunkt der ersten Projektion $s'$ der Schnittellipse* (I, 388). Der *Krümmungshalbmesser* von $s'$ im Scheitel $A_1'$ der Hauptaxe ist gleich der Ordinate $S'B_1'$ in ihrem Brennpunkte (I, 250), gleich dem Parallelkreishalbmesser $B_1''B_2$ von $B_1$. Daher gilt: *Die Projektion einer ebenen Schnittkurve eines Umdrehungskegels auf eine zu dessen Umdrehungsaxe senkrechte Ebene hat im Scheitel ihrer Hauptaxe einen Krümmungskreis gleich dem Parallelkreise des Kegels, dessen Mittelpunkt in der Schnittebene liegt.*

Die zu $S'$ gehörige *Leitlinie* $d'$ der $s'$ ist die Polare des $S'$ zu $s'$ und entspricht der Polaren des $S'$ zu $k'$, d. i. der unendlich fernen Geraden der $\mathbf{P}_1$. Dieser entspricht in **E** ihre Projektion $d$ aus $S$ auf **E**, und von letzterer ist $d'$ der Grundriß.

**58.** Die *wahre Gestalt* $s'''$ der Schnittkurve erhält man durch Umlegung der **E** in $\mathbf{P}_1$. Dieselbe ist perspektiv-affin mit $s'$ und perspektiv-kollinear mit $k'$; $e_1$ ist jedesmal die Kollineationsaxe. Der Kollineationsmittelpunkt ist im zweiten Falle die Umlegung $S'''$ der Spitze mit der durch sie parallel zu **E** gelegten Ebene in $\mathbf{P}_1$. Die Brennpunkte $F_1'''$ und $F_2'''$ der $s'''$ ergeben sich aus den Be-

rührungspunkten der E mit den beiden dem Kegel eingeschriebenen, die E berührenden Ebenen, und die Leitlinien $d_1$ und $d_2$ aus den Schnittlinien der E mit den Ebenen der Berührungskreise jener Kugeln mit dem Kegel (I, 333).

Fig. 28a.

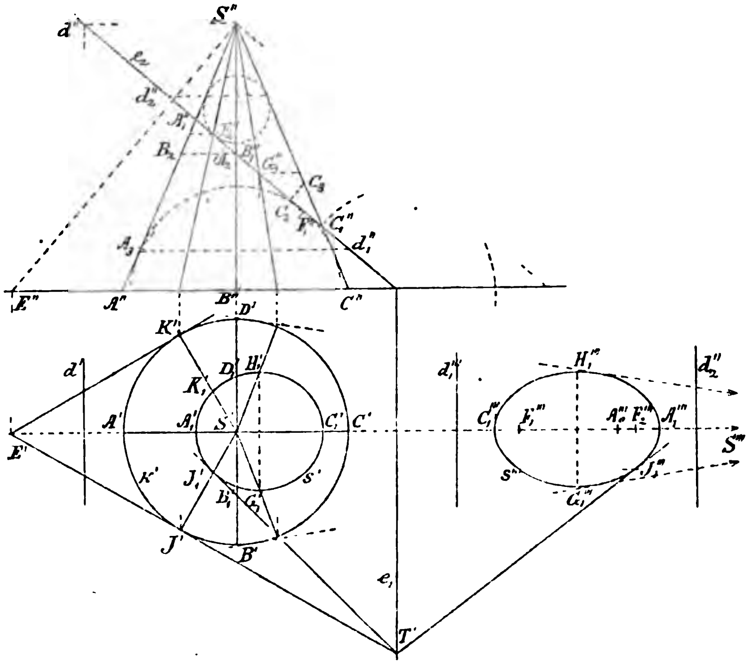


Fig. 28b. **59.** Die *Abwickelung des Kegels* ist ein Kreisausschnitt $SACA$, dessen Halbmesser $SA$ gleich der Seite $(S''A'')$ des Kegels und dessen Bogen $ACA$ gleich dem Umfange des Grundkreises $k$, der durch kleine Linienstückchen übertragen wird. Der Centriwinkel $\alpha = ASA$ des Ausschnitts ist durch

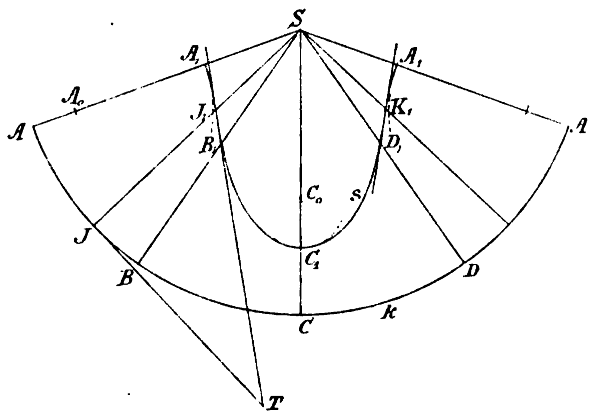
$$\alpha^0 = \frac{S'A'}{SA} 360^0$$

bestimmt. Bei der wiederholten Abwickelung kehrt eine Erzeugende in eine ihrer früheren Lagen zurück, wenn $\alpha$ und 360, oder $S'A'$ und $SA$ unter einander kommensurabel sind, sonst nicht.

Von der *Verwandelten des Schnittes s* erhält man einen beliebigen Punkt wie $B_1$, wenn man bei dem Übertragen von $k$ den Schnittpunkt $B$ der Erzeugenden $SB_1$ mit $k$ bezeichnet, die $SB$ zieht und auf sie die wahre Länge $SB_1$ überträgt, welche man $= S''B_2$ auf der Umrißerzeugenden zwischen $S''$ und dem Parallelkreise von $B_1$ abgreift.

*Bemerkenswerte Punkte* sind die *Scheitelpunkte* $A_1$ und $C_1$, deren Erzeugende $SA_1$ und $SC_1$ Symmetrielinien der $s$ bilden, und die *Wendepunkte.* Letztere entstehen aus den Punkten derjenigen Erzeugenden, für welche die Berührungsebenen senkrecht auf der Schmiegungsebene E stehen, welche also die auf E Senkrechte $SE$ enthalten. Aus ihrer ersten Spur $E'$ ziehe man die beiden Tangenten an den Grundkreis, welche in $J$ und $K$ berühren, bestimme

Fig. 28 b.




auf den Erzeugenden $SJ$ und $SK$ die Punkte $J_1$ und $K_1$, so werden aus ihnen die Wendepunkte der Verwandelten.

Fällt $E'$ innerhalb des Grundkreises, so gibt es keine reellen Wendepunkte, fällt $E'$ auf den Grundkreis in $A'$, so fallen beide Wendepunkte in $A'$ in einander. Mit dem Linienelemente in $A_1$ fällt dann ein benachbartes auf jeder Seite in eine Gerade, die Tangente hat drei Elemente mit der Kurve gemein oder berührt vierpunktig, und der Punkt ist ein *Flachpunkt* (I, 246).

**60.** Die *Tangente* an die Schnittkurve in einem Punkte $J_1$, als Schnitt der E mit der Berührungsebene des Kegels in $J_1$, hat ihre erste Spur $T'$ im Schnittpunkte von $e_1$ mit der Tangente des Grundkreises in $J'$. Durch $T'$ geht dann auch die Tangente der wahren Gestalt in $J_1'''$. Die Tangente der Verwandelten in $J_1$ erhält man durch Übertragung des Winkels der Tangente mit der Berührungserzeugenden, oder durch Übertragung des denselben enthaltenden bei $J$ rechtwinkligen Dreiecks $J_1JT$, dessen Seiten gleich $J_1J$, $J'T'$, $T'J_1'''$ sind.

**61.** Der *Krümmungshalbmesser* $r'$ *der Verwandelten* wird nach Nr. 41 $= r : \cos \sigma$ bestimmt. Am leichtesten zu bestimmen und am nützlichsten sind die $r'$ in den Scheiteln $A_1$ und $C_1$. Für die Ellipse

sind die Krümmungshalbmesser $r = A_1'''A_0'''$ als $b^2 : a$ zu ermitteln. Die (spitzen) Winkel $\sigma$ der Schmiegungs- mit der Berührungsebene sind aber in $A_1$ und $C_1$ bezw. $C_1''A_1''A''$ und $A_1''C_1''S''$. Trägt man daher auf $A_1''C_1''$ die $A_1''A_2 = C_1''C_2 = r$ auf, zieht $A_2A_3$ und $C_2C_3$ senkrecht zu $A_1''C_1''$ und schneidet sie bezw. mit $A_1''A''$, $C_1''S''$ in $A_3$, $C_3$, so sind die $r'$ bezw. $= A_1''A_3 = AA_0$, $C_1''C_3 = C_1C_0$.

Fig. 29 a.

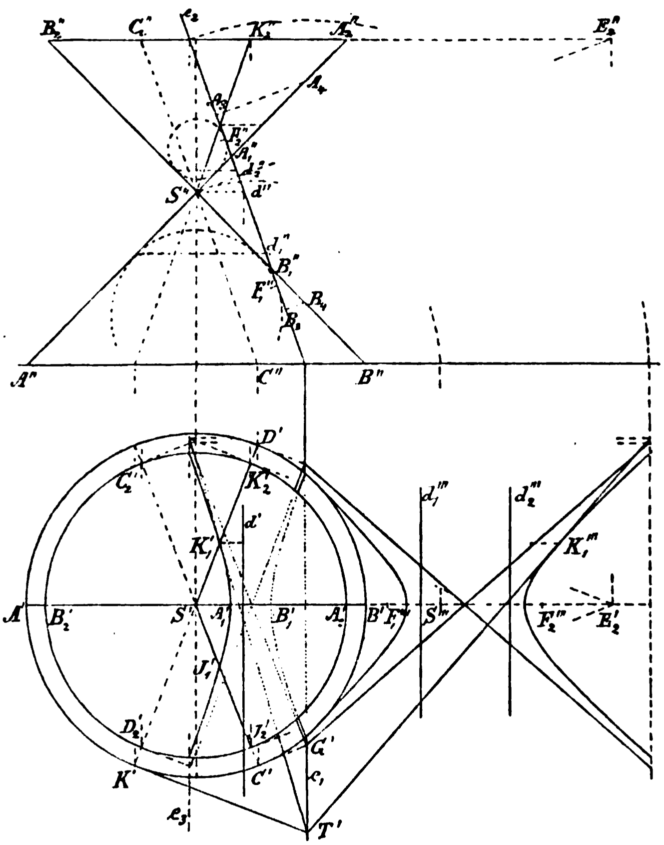
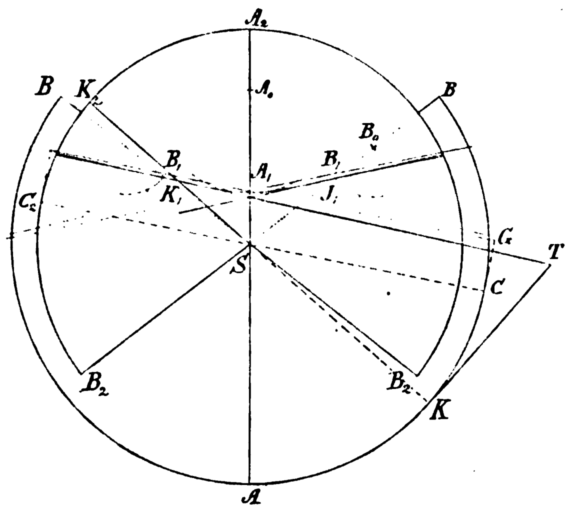



Fig. 29 a. **62.** *Der hyperbolische Schnitt.* Die beiden Kegeläste werden von **E** getroffen und sind daher beide dargestellt; sie seien begrenzt durch zwei Parallelkreise von etwas verschiedener Größe, nämlich durch $AB$ in $\mathbf{P}_1$ und durch $A_2B_2$. Die **E** schneidet die Ebenen dieser Kreise in $e_1$ und $e_3$, so daß durch jede dieser Geraden auf einem der Grenzkreise zwei Punkte der Hyperbel bestimmt werden. Die Scheitel sind $A_1$ und $B_1$.

Die *Asymptoten* werden als Tangenten in den unendlich fernen

Punkten bestimmt. Diese Punkte liegen auf den Erzeugenden $SC$ und $SD$, welche in einer durch $S$ parallel zu E gehenden Ebene erhalten werden; die Berührungsebene des Kegels in einem jener Punkte, z. B. in dem auf $SC$, schneidet die Grenzebenen des Kegels in den Kreistangenten in $C$ und $C_2$, welche die Spuren $e_1$ und $e_3$ in Punkten (deren einer $G$ ist) treffen, deren Verbindungslinie die mit $CC_2$ parallele Schnittlinie der Berührungsebene mit E, oder die eine Asymptote bildet. Die andere läuft mit $DD_2$ parallel.

Fig. 29 b.




Mit diesen Punkten und denjenigen $J_1$ und $K_1$, welche *Wendepunkte der Verwandelten* werden, kann man sich begnügen. Letztere erhält man durch die zu E Senkrechte $SE_2$, welche die obere Grenzebene in $E_2$ schneidet; die Tangenten aus $E_2$ an den oberen Kreis liefern Berührungspunkte, deren Erzeugende die Wendepunkte der Verwandelten enthalten. Die Tangente $K_1T$ in einem derselben ist bestimmt. In der Figur fällt zufällig $S'K_2'$ mit $S'D'$ in dieselbe Linie.

*$S'$ ist wieder ein Brennpunkt der ersten Projektion der Hyperbel und $d'$ die zugehörige Leitlinie.*

Die *Umlegung* der E in $P_1$ liefert wieder die *wahre Gestalt* mit den Brennpunkten $F_1$, $F_2$ und den Leitlinien $d_1$, $d_2$.

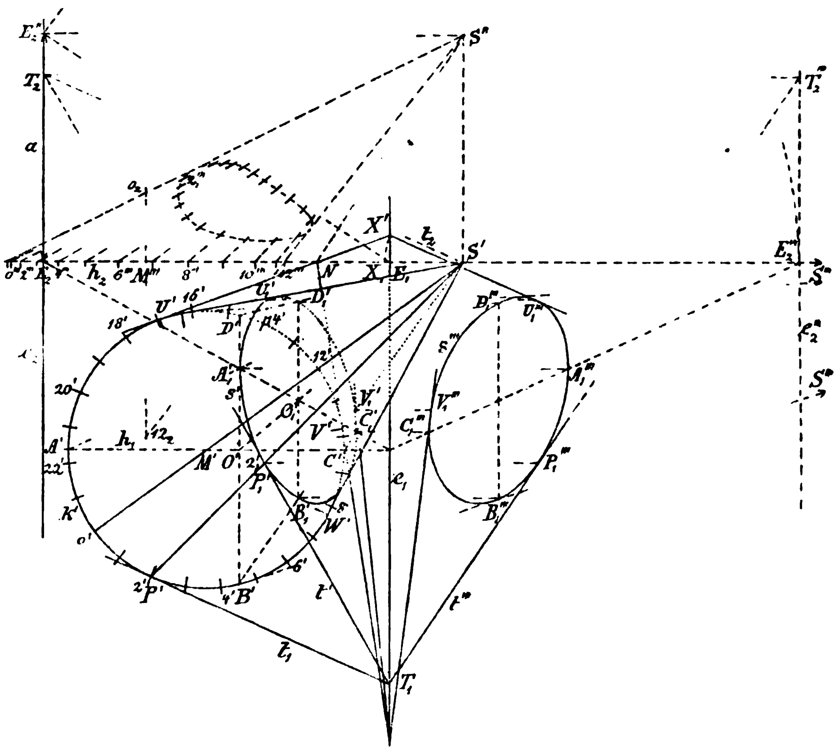
Die *Abwickelung* ist so ausgeführt, daß diejenige des unteren Flächenastes $SBAB$ von der des oberen $SB_2A_2B_2$ teilweise zugedeckt wird. Die Stücke $AS$ und $SA_2$ einer Erzeugenden bleiben in einer Geraden $ASA_2$. Weil der Kegel nach $BSB_2$ aufgeschnitten ist, wird die Verwandelte des unteren Hyperbelastes in zwei Teile Fig. 29 b.

getrennt; die des oberen bleibt unzertrennt. Die Punkte und Tangenten werden, wie vorhin bei der Ellipse, übertragen, wobei die *Asymptoten* besonderer Beachtung bedürfen. Man überträgt die mit ihnen parallelen Erzeugenden, so $CSC_2$, zieht die Kreistangenten in allen vier Endpunkten derselben, gibt allen die gleiche Länge $CG = C'G'$ und verbindet die Endpunkte durch Parallele zu den Erzeugenden, so zu $CC_2$, so sind dies die Asymptoten. Die Krümmungshalbmesser für die Scheitel findet man wie vorhin als $A_1A_0 = A_1''A_4$ und $B_1B_0 = B_1''B_4$.

**63.** *Aufg. Die Schnittkurve eines schiefen Kreiskegels mit einer Ebene, deren wahre Gestalt und die Abwickelung des Kegels zu verzeichnen.*

Indem wir zweckmäßig zwei parallele Spur- und Projektionsebenen anwenden (I, 112), geben wir den Kegel durch seinen in
Fig. 30a. $P_1$ liegenden Spurkeis $k'$, durch die Projektion $S'$ der Spitze und

Fig. 30a.

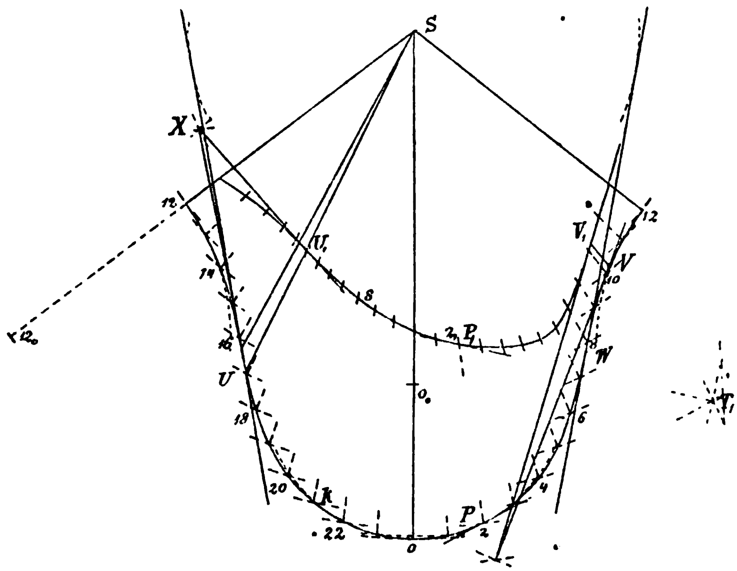



deren Höhe $a$ über $P_1$, und die Schnittebene $E$ durch ihre Spur $e_1$ in $P_1$ und die damit parallele Projektion $e_2$ ihrer Spur $(e_2)$ in einer parallel zu $P_1$ durch $S$ gelegten zweiten Spurebene $P_2$.

*Aufl.* Man erhält einen allgemeinen Punkt $P_1$ der Schnittkurve $s$ und deren Tangente $t$ in demselben, indem man durch die nach einem Kreispunkte $P$ laufende Erzeugende $PS$ eine Hilfsebene, am besten die Berührungsebene des Kegels legt, deren erste Spur $t_1$ den Kreis in $P'$ berührt, und deren zweite in der Projektion als $t_2$ durch $S'$ parallel zu $t_1$ läuft. Der Schnitt dieser Ebene mit **E** ist die Tangente $t' = T_1 T_2$ der Kurve $s'$, wenn $T_1 = e_1 t_1$, $T_2 = e_2 t_2$; und der Schnitt der $t'$ mit $P'S'$ ist der gesuchte Punkt $P_1'$.

Einen *Durchmesser* der $s$ erhält man, wenn man eine Hilfsebene $h_1 h_2$ durch $S$ legt, deren $h_1$ ein auf $e_1$ senkrechter Durchmesser $A'M'C'$ von $k'$ ist. Dadurch ergeben sich die Schnittpunkte $A_1'$, $C_1'$ der Erzeugenden $A'S'$, $C'S'$ mit der Geraden $(e_1 h_1, e_2 h_2)$. Die Tangenten in $A_1'$, $C_1'$ sind parallel zu $e_1$; der zu $A_1 C_1$ konjugirte Durchmesser geht $\parallel e_1$ durch die Mitte $O_1'$ von $A_1'C_1'$ und wird als $B_1'D_1'$ erhalten, wenn man $O_1'$ aus $S'$ auf $A'C'$ nach $O'$ projicirt,

Fig. 80 b.



die Kreissehne $B'O'D' \parallel e_1$ zieht, und $B'D'$ aus $S'$ nach $B_1'D_1'$ projicirt.

**64.** Um die *wahre Gestalt der Schnittkurve* zu erhalten, legt man **E** um $e_1$ in **P**$_1$ um. Die durch $S \perp e_1$ geführte Ebene hat $h_2$ $(\perp e_1)$ zur ersten Spur und schneidet die $e_1$ und $e_2$ bezw. in $E_1$ und $E_2$; legt man sie um $h_2$ in **P**$_1$ um, so gelangt $(E_2)$ nach $E_2''$ auf $e_2$, wobei $E_2 E_2''$ gleich der Höhe $a$ des Kegels. Bei der Umlegung

von **E** in $\mathbf{P}_1$ gelangen ($E_2$) nach $E_2'''$ auf $h_2$ ($E_1E_2''' = E_1E_2''$), ($e_2$) nach $e_2'''$ ($\parallel e_1$ durch $E_2'''$), ($t$) nach $t''' = T_1T_2'''$, ($T_2'''$ auf $e_2'''$, $T_2T_2''' \perp e_1$) und ($P_1$) nach $P_1'''$ auf $t'''$ ($P_1'P_1''' \perp e_1$). Auf solche Weise bestimmt man die konjugirten Durchmesser $A_1'''C_1'''$, $B_1'''D_1'''$ der umgelegten Ellipse $s'''$, und kann Unsicherheiten der Schnittpunkte stets durch sichernde Verbindungslinien (wie durch $A_1'''D_1'''$ vermittelst ihrer Schnittpunkte mit $e_1$ und $e_2'''$) beseitigen. — Die Umlegung $s'''$ der Schnittkurve ist mit dem Grundkreise $k'$ perspektiv-kollinear mit $e_2$ als Axe und $S'''$ als Mittelpunkt, wenn auf $h_2$ die $S'S''' = E_2E_2'''$ gemacht wird (I, 305).

**65.** Zur Verzeichnung der *Abwickelung* wollen wir, neben einem später zu benutzenden Verfahren, hier das nächstliegende, schon von Frézier (s. I, 20) angegebene, anwenden, das, einfach und, mit Vorsicht gebraucht, ebenfalls genau ist. Man teilt den Grundkreis $k'$, ausgehend von dem Durchmesser $S'\,12'\,M'\,0'$ in eine gerade Anzahl (hier 24) gleicher Teile, deren Bogen- und Sehnenlänge nur unmerkbar verschieden sind, und bestimmt die wahre Länge der von den Teilungspunkten ausgehenden (paarweise gleichen) Erzeugenden; eine solche ist z. B. für den Teilungspunkt $2'$ gleich $S''2'''$, wenn $S'S'' \perp h_2$ und $= a$, und $S'2'''$ auf $h_2 = S'2'$; $S0'''$ sei die
Fig. 30b. größte. Mit allen diesen wahren Längen als Halbmessern ziehe man für die Abwickelung Kreise aus einem Punkte $S$, wähle auf dem größten den Punkt 0 und trage von ihm aus zwischen den aufeinander folgenden Kreisen die Teillänge 1 : 24 des Kreises weiter. Die Verbindungslinie der Zirkelstiche ist die Verwandelte des Grundkreises. Bildet ein Element mit der Erzeugenden einen kleinen Winkel, so tritt Unsicherheit ein, z. B. bei Punkt 8; man beseitigt dieselbe, indem man beachtet, daß in der Abwickelung der senkrechte Abstand des 8 von $S\,7$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten (Fig. 30a) die Abstände des $8'$ von $S'7'$ und des $8'''$ von $S''7'''$ sind.

Die *Verwandelte der Schnittkurve* erhält man durch die Punkte der $s'$ auf den Erzeugenden der Kreisteilungspunkte, wie des $2_1'$ auf $S'2'$. Man bestimmt, allein mittelst des Handzirkels, $2_1'''$ auf $S''2'''$ so, daß sein Abstand von $S'S'' = S'2_1'$, und überträgt dann in die Abwickelung $S2_1 = S''2_1'''$. — Die Tangenten $PT_1$, $P_1T_1$ in zwei entsprechenden Punkten $P$ und $P_1$ von $k$ und $s$ in der Abwickelung erhält man durch Übertragen des Dreiecks ($PP_1T_1$), indem man die Linien $PT$, $P_1T_1$ in der Abwickelung bezw. gleich $P'T_1$, $P_1'''T_1$ macht.

**66.** *Bemerkenswerte Punkte der Verwandelten $k$ und $s$.* Die Punkte der $k$, in denen die *Tangenten senkrecht auf den Erzeugenden*

stehen, sind 0 und 12. Die *Krümmungshalbmesser* der $k$ in denselben sind $= M'0' : \cos\sigma$ (41), also bezw. $= 0'''0_2$ und $12'''12_2$, wenn auf $h_2$ die $S'M''' = S'M'$ aufgetragen, $M'''0_2 12_2 \perp h_2$ gezogen und mit $S''0'''$ und $S''12'''$ bezw. in $0_2$ und $12_2$ geschnitten wird. $0'''0_2$ und $12'''12_2$ überträgt man dann in Fig. 30b nach $00_0$ und $12\,12_0$. — Die *Wendepunkte* der $k$, wie $W$, entstehen aus den Berührungspunkten der Kegelumrisse mit $k'$, wie $W'$, indem hier die Berührungsebenen des Kegels senkrecht auf der Schmiegungsebene $\mathbf{P}_1$ von $k$ stehen. Die Tangente in $W$ berührt einen aus $S$ mit dem Halbmesser $a$ gezogenen Kreis, weil das bestimmende Dreieck $W'S'(S)$ rechtwinklig wird. — Die *Wendepunkte* $U_1, V_1$ der $s$ in der Abwickelung entsprechen denjenigen Punkten $(U_1)$, $(V_1)$ der $s$, in welchen die Berührungsebenen des Kegels $\perp \mathbf{E}$ stehen. Man erhält sie, indem man aus $(S)$ die $(SN) \perp \mathbf{E}$ fällt und ihre Spur $N$ in $\mathbf{P}_1$ sucht ($S''N \perp E_1E_2''$, $N$ auf $h_2$), von $N$ zwei Tangenten an $k'$ legt, deren Berührungspunkte $U', V'$ sind, woraus $U_1', V_1'$ auf $s'$ bestimmt werden können. Doch sind die letzteren Punkte entbehrlich; man bestimmt in der Abwickelung $U_1$ als Schnitt der $US$ mit $s$, und die Tangente $UX$ an $k$, indem man in der Projektion die $NU'$ mit $e_1$ in $X'$ schneidet, und in der Abwickelung das Dreieck $SUX$ verzeichnet, worin $UX = U'X'$, $SX$ gleich dem wahren Abstande der Kegelspitze $(S)$ von $X'$ ($= S''X_1$, wenn $X_1$ auf $h_2$ und $S'X_1 = S'X'$). Dann ist auch $U_1X$ die Tangente der $s$ in ihrem Wendepunkte $U_1$ (und $U_1X$ Fig. b) $= U_1'''X'$ in Fig. a)).

**67.** *Aufg. Auf einem Kegel zweiten Grades die Kreisschnitte zu bestimmen.*

*Aufl.* Legt man durch die Spitze $S$ des Kegels senkrecht zur Ebene eines Kreisschnittes durch dessen Mittelpunkt eine Ebene, so ist diese eine Symmetrieebene des Kreises und des Kegels. Die Ebene eines Kreisschnittes steht daher senkrecht auf einer Symmetrie- oder Axenebene des Kegels, und diese müssen zur Auflösung der Aufgabe gegeben sein oder bestimmt werden (23). Es sei $SM$ die innere Axe, $MA = a$ die große und $MB = b$ die kleine Halbaxe eines darauf senkrechten (elliptischen) Schnittes des Kegels. In der Figur bilde die Ebene der Ellipse $BAB_1$ die Grundriß-, diejenige des Hauptschnittes $BSB_1$ die Aufrißebene ($\mathbf{P}_1$ und

Fig. 31.

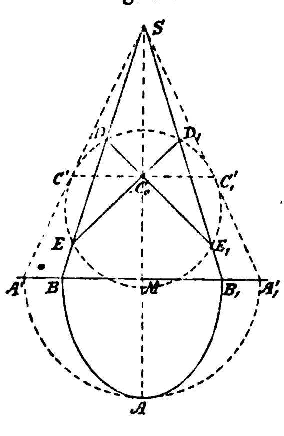



Fig. 31.

$P_2$), in welche auch der Hauptschnitt $ASA_1$ um $SM$ nach $A'SA_1'$ umgelegt sei. Auf der zu $SM$ senkrechten Hauptebene kann eine Kreisschnittebene nicht senkrecht stehen, weil solche Ebenen hyperbolische Schnitte liefern. Vielmehr erhält man Kreisschnittebenen senkrecht auf der Hauptebene $BSB_1$ und die Kreise sind die Schnitte des Kegels mit Kugeln, deren Mittelpunkte auf $SM$ liegen, und welche die Erzeugende $SA$ und dann auch die $SA_1$ und den Kegel berühren. Die größten Kreise einer solchen Kugel in den beiden Hauptebenen fallen nach deren Zusammenlegung in der Zeichnung zusammen. Der Kreis berührt $SA'$ und $SA_1'$ bezw. in $C'$ und $C_1'$ und schneidet die $SB$ und $SB_1$ bezw. in $D, E$ und $D_1, E_1$. Die Projektion von $C$ und $C_1$ liegt aber im Schnittpunkte $C_0$ der Sehnen $DE_1$ und $D_1E$, weil die Polare $C'C_1'$ von $S$ zu dem Kreise durch $C_0$ gehen muß. Die Ebene, welche die vier Punkte $D, E_1, C, C_1$ enthält, schneidet aber die Kugel in einem Kreise, und den Kegel in einem Kegelschnitte, welcher mit dem Kreise zusammenfällt, weil er mit ihm jene vier Punkte und die Tangenten in $C$ und $C_1$ gemein hat, da Kegel und Kugel in $C$ und $C_1$ gemeinschaftliche Berührungsebenen besitzen. — So sind durch einen die $SA'$ und $SA_1'$ berührenden Kreis die Stellungen $DE_1$ und $D_1E$ der Kreisebenen des Kegels bestimmt.

Kreisschnittebenen, die senkrecht auf der Hauptebene $ASA_1$ ständen, kann es aber nicht geben, weil durch zwei solche in Bezug auf die Ebene $BSB_1$ symmetrische Kreise wieder eine Kugel gehen müßte, welche die Erzeugenden $SB$ und $SB_1$ berührte und diejenigen $SA$, $SA_1$ schnitte, was offenbar unmöglich.

Man bemerkt, daß alle Kreisschnittebenen zur Axe des Kegels gleich geneigt sind, und daß in der zu den Kreisschnittebenen senkrechten Hauptebene zwei Kegelerzeugende und die Geraden irgend zweier untereinander nicht parallelen Kreisschnittebenen ein *Kreisviereck* bilden, weil die Summe je zweier Gegenwinkel sich zu zwei oder zu vier Rechten ergänzen. Man nennt zwei solche Kreisschnittebenen im Kegel *antiparallel*.

**68.** *Übungsaufgaben.*

1) Von einem Umdrehungskegel sind die Projektion $S'$ und die Höhe der Spitze über $P_1$, sowie die ersten Spuren dreier Erzeugenden gegeben, man soll die erste Spur eines Kreisschnittes des Kegels finden. Es geschieht durch Abtragen dreier gleichen Längen auf den Erzeugenden von der Spitze aus. Auf dieser Auflösung beruht das Verfahren des *Hyginus* (de limitibus) zur Bestimmung des Meridians aus drei Sonnenstrahlen*).

*) S. die Auslegung der betreffenden Schriftstelle durch den Verf. in der Zeitschr. für Vermessungswesen (Stuttg. 1875), B. 4, S. 299 u. 366.

2) Von einem Umdrehungscylinder oder Kegel sind drei Erzeugende je durch ihre beiden Projektionen gegeben; man soll seine Schnittlinie mit der Halbirungsebene $\mathbf{H}_2$ (I, 66) verzeichnen und die Axen ihrer Projektionen und ihrer wahren Gestalt bestimmen.

3) Einen Kegel, der durch seinen Schnitt mit der Halbirungsebene $\mathbf{H}_2$ und die beiden Projektionen seiner Spitze gegeben ist, mit einer gegebenen Ebene zu schneiden.

4) Einen Kegelschnitt $k$ zu verzeichnen, von welchem drei Punkte und ein Brennpunkt $F$ gegeben sind. Man betrachtet $k$ als die Projektion eines ebenen Schnittes eines Umdrehungskegels, dessen Spitze sich in $F$ projicirt, oder als die perspektiv-kollineare Figur eines Kreises, welcher $F$ zum Mittelpunkte hat.

**69.** *Aufg. Durch zwei gegebene Punkte $P$ und $Q$ eines Umdrehungskegels die geodätische Linie zu legen und ihre ausgezeichneten Punkte und Tangenten zu bestimmen.*

Wir wollen zunächst annehmen, daß die beiden Punkte auf demselben Aste des Kegels liegen, und daß von den verschiedenen geodätischen Linien diejenige genommen werden soll, deren Bogen zwischen $P$ und $Q$ der kleinste ist. Fig. 32a.

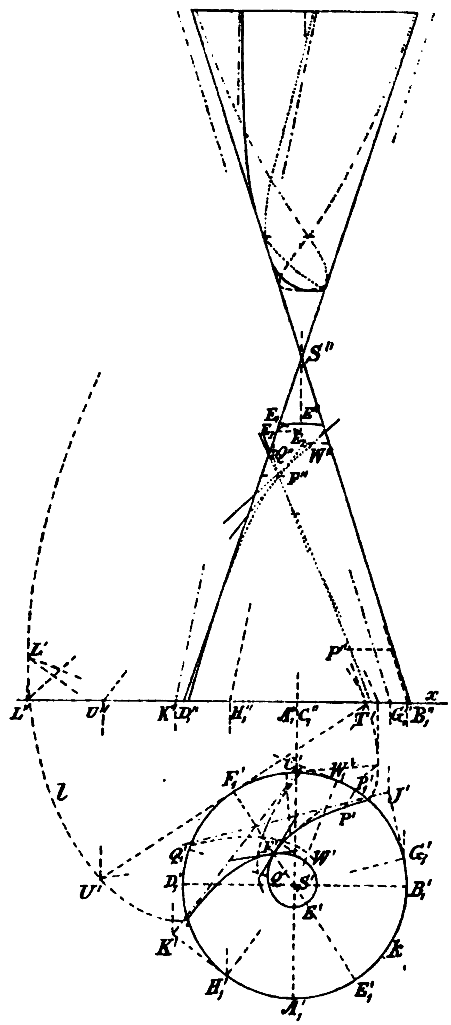
*Aufl.* Die Axe des Kegels stehe $\perp \mathbf{P}_1$; aus den gegebenen Projektionen $P'$ und $Q'$ bestimme man $P''$ und $Q''$ auf demselben (unteren) Flächenaste. Eine geodätische Linie wird bei der Abwickelung zu einer geraden. Daher bilde man die Abwickelung des Fig. 32b. Kegels, in welcher $P$ und $Q$ so oftmal vorkommen, als Abwickelungen des ganzen Kegelmantels aneinander gereiht sind, also unendlich oft oder eine endliche Anzahl mal, je nachdem der Winkel der Abwickelung des einfachen Kegelmantels mit $360^0$ kommensurabel ist oder nicht. Jede Verbindungsgerade eines $P$ mit jedem $Q$ wird beim Wiederaufwickeln auf den Kegel zu einer geodätischen Linie, die, je nachdem der eine oder der andere jener Fälle eintritt, unendlich oft oder eine endliche Anzahl mal durch das Unendliche hindurch von dem einen zum andern Kegelaste übergeht. Die kürzeste dieser Strecken $PQ$ verbindet zwei Punkte $P$ und $Q$, zwischen welchen weniger als ein halber Kegel, oder höchstens ein solcher liegt, und diese Gerade erzeugt die verlangte Kurve. Die Aufwickelung wird auf dem umgekehrten Wege, wie in Nr. 59 die Abwickelung, vorgenommen. $S$ ist die Spitze, $A_1B_1C_1D_1$ ein Parallelkreis $k$ des Kegels.

Bestimmen wir *die ausgezeichneten Punkte der Kurve.*

1) *Der nächste Punkt $E$ bei der Spitze* liegt in der Abwickelung auf der zu $PQ$ senkrechten Erzeugenden $SE_1$.

2) Die *Doppelpunkte* $F$ liegen in dem durch $E$ gehenden Meridiane; denn dessen Ebene ist die Symmetrieebene der Kurve, weil in der Abwickelung $SE$ die Symmetrielinie der $PQ$ ist. Man übertrage daher in die Abwickelung Bogen $E_1F_1$ = Halbkreis $E_1'F_1'$.

Fig. 32 a.



3) Die *unendlich fernen Punkte* liegen auf den zu $PQ$ parallelen Erzeugenden $SG_1$ und $SH_1$ der Abwickelung.

Die *Tangente* in einem Punkte, z. B. die beiden im Doppelpunkte $F$, erhält man durch Übertragen des rechtwinkligen Dreiecks $FF_1T$ und des damit kongruenten $FF_1U$. Entsprechend findet man die *Asymptoten* parallel mit den Erzeugenden $SG_1$ bezw. $SH_1$ und gehend durch die Punkte $J$ bezw. $K$ der Kreistangente in $G_1$ und $H_1$, wenn die Längen $G_1'J' = H_1'K' = G_1J$ aus der Abwickelung übertragen werden.

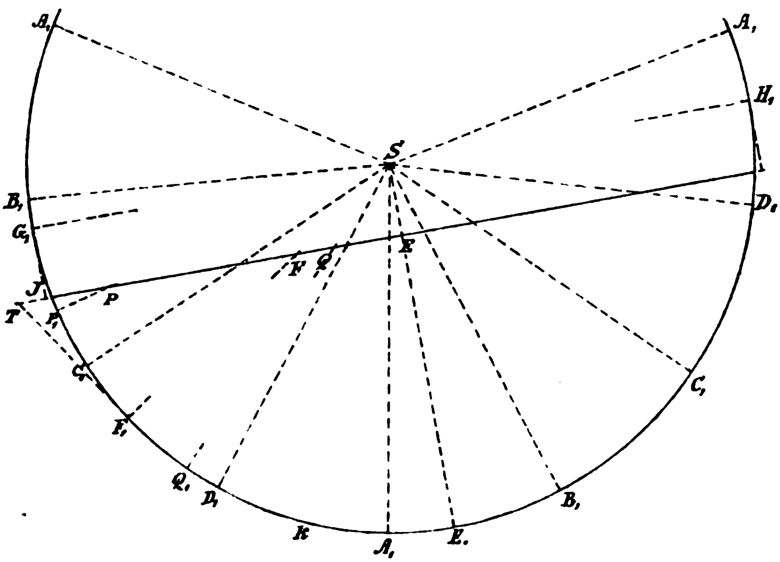
Den *Krümmungshalbmesser im Scheitel $E'$ des Grundrisses* findet man im Aufriß $= E_2E_3$, wenn man den Parallelkreis von $E''$ mit dem Kegelumriß in $E_1$ schneidet, $E_1E_2$ senkrecht zu diesem Umriß bis zu $E_2$ auf der Kegelaxe zieht, und $E_2E_3$ als Halbmesser des Parallelkreises von $E_2$ nimmt. Denn dreht man den Symmetriemeridian $SE$ in den Hauptmeridian, so ist $E_1E_2$ die zweite Projektion der auf $SE_1$ senkrechten Schmiegungsebene der geodätischen Linie (42); sie schneidet den Kegel in einem Kegelschnitte, dessen Krümmungshalbmesser in $E$ mit dem gesuchten übereinstimmt und in der angegebenen Weise gefunden wird (57).

Durchschreitet man in der Abwickelung den unendlich fernen

Punkt der Geraden $PQ$, so geht man entsprechend bei dem Kegel durch das Unendliche von dem einen zum andern Aste über. Die auf den beiden Kegelästen befindlichen Kurvenäste sind als Aufwickelungen derselben Geraden mit einander kongruent. Lägen die beiden gegebenen Punkte *P und Q auf den verschiedenen Kegelästen,* so müßte man in der *Abwickelung beider Äste* durch die verwandelten Punkte $P$ und $Q$ die Gerade legen.

**70.** *Die Wendepunkte der Projektionen der Kurve zu bestimmen.* Verfolgt man den Lauf der Kurve, so bemerkt man, daß weder der

Fig. 32b.



Punkt, noch die Tangente, noch die Schmiegungsebene ein Rückkehrelement besitzt. Doch bedarf die Asymptote noch einer Erörterung, die bei der Untersuchung der Rückkehrelemente (I, 257) nicht angestellt wurde. Es scheint nämlich nach dem Aufriß, als ob bei unserer Kurve, ebenso wie bei der Hyperbel, die Tangente den Sinn ihrer Drehung in der Schmiegungsebene in der Asymptote wechsele, und als ob zugleich der Punkt, ohne den Sinn seines Fortschreitens zu ändern, in dem unendlich fernen Punkte die Seite der Tangente, auf welcher er sich befindet, vertausche. Nach jedem dieser Anzeichen müßte der unendlich ferne Punkt als Wendepunkt angesehen werden. Da aber der Durchgang eines Punktes durch einen unendlich fernen, uneigentlichen Punkt nicht unmittelbar mit demjenigen durch einen endlich fernen, eigentlichen Punkt verglichen

werden kann, so stellen wir, wie früher bei dem Begriffe des bestimmt Unendlichgroßen (I, 72—74), eine Beziehung zu dem Endlichen her, und zwar in stetiger Weise eine projektive Beziehung, indem wir unsere Kurve als die Projektion einer zweiten Kurve betrachten, derart, daß dem unendlich fernen Punkte in der ersten ein endlich ferner Punkt in der zweiten entspricht. Indem wir die Schmiegungsebene unserer unebenen Kurve in ihrem unendlich fernen Punkte durch die Ebene einer ebenen Kurve ersetzen, wollen wir unsere Vorstellung auf eine Hyperbel richten, und diese als die Projektion eines Kreises ansehen. Ziehen wir aus dem Projektionsmittelpunkte *einseitig* den projicirenden Strahl und lassen ihn auf dem Kreise hingleiten, bis er mit der Ebene der Hyperbel parallel wird, also ihren unendlich fernen Punkt projicirt, und setzen dann die Bewegung des einseitigen Strahles auf dem Kreise hin in stetiger Weise fort, also ohne seinen Sinn umzukehren, so trifft derselbe die Projektionsebene erst, nachdem er einen unendlich fernen Punkt des Raumes durchschritten hat; er gelangt demnach von der anderen Seite her, als zu Anfang, auf die Projektionsebene, *so daß die Kurve beim Durchschreiten durch das Unendliche die Seite ihrer Schmiegungsebene wechselt, auf welcher sie liegt.* Betrachten wir auch die Kurve stets im Sinne des projicirenden Strahles, so ändert sich der Drehungssinn der Tangente beim Durchgang durch die Asymptote nicht; und denkt dabei der Beschauer seine Figur mit dem Kopfe voran in der Richtung der Kurve hinschwimmen, so ändert sich auch die Seite der Tangente, auf welcher die Kurve liegt, beim Durchgang durch den unendlich fernen Punkt nicht. — Indem wir so die *Eigentümlichkeit der Rückkehrelemente zu einer projektiven Eigenschaft gemacht haben*, bleibt das Kennzeichen des Rückkehrelementes der Tangente, daß sich in ihr deren Drehungssinn umkehrt, auch für die im unendlich fernen Punkte berührende Asymptote erhalten, wobei nur zu beachten, daß die Kurve beim Durchgang durch den unendlich fernen Punkt die Seite der Ebene wechselt. *Insbesondere sind der unendlich ferne Punkt der Hyperbel und derjenige der geodätischen Linie des Umdrehungskegels keine Wendepunkte, sondern gewöhnliche Punkte.*

Wenn nun die geodätische Linie des Umdrehungskegels kein Rückkehrelement besitzt, so ist im allgemeinen auch die Projektion eines Elementes kein Rückkehrelement (I, 258); und so sind auch die Asymptoten der zweiten Projektion keine Rückkehrtangenten. Im besonderen aber tritt in der Projektion eine Rückkehrtangente und ein Wendepunkt auf, wenn die Schmiegungsebene senkrecht auf der Projektionsebene steht (I, 260). Die auf der Berührungsebene des

Kegels stets senkrechte Schmiegungsebene der Kurve steht auf der zur Kegelaxe senkrechten $P_1$ nur dann senkrecht, wenn die Tangente der Kurve mit der Erzeugenden des Berührungspunktes den Winkel Null bildet, also *die Asymptote* ist; diese *ist daher eine Wendetangente und ihr unendlich ferner Punkt ein Wendepunkt der ersten Projektion der Kurve*, wie dies die Figur zeigt.

Um einen *Wendepunkt der zweiten Projektion der Kurve* zu finden, beachte man, daß jede Schmiegungsebene der Kurve eine Berührungsebene der abwickelbaren Fläche ihrer Tangenten ist. Man bestimme daher die erste Spur $l$ dieser Fläche durch die Spuren $U'$ von Tangenten derselben. Die auf der Projektionsaxe $x$ senkrechte Tangente der $l$ ist die erste Spur der gesuchten Schmiegungsebene. Bestimmt man durch eine Fehlerkurve ihren Berührungspunkt $L'$, legt aus $L'$ eine Tangente an den Grundkreis $k$ in dem durch die abwickelbare Fläche vorgeschriebenen Sinne, deren Berührungspunkt $W_1'$ sei, so liefert die Erzeugende $SW_1$ den Punkt $W$ der Kurve, in welchem die Tangente durch $L'$ geht. Die zugehörige zweite Projektion $L''W''$ ist eine Wendetangente der zweiten Projektion der Kurve. In gleicher Weise ist unweit $P''$ ein zweiter Wendepunkt bestimmt.

**71.** *Aufg. Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem Kegel zu bestimmen.*

*Aufl.* Man legt durch $g$ und die Spitze $S$ des Kegels (der bei dem Cylinder im Unendlichen liegt) eine Hilfsebene, schneidet diese mit der Ebene einer ebenen Kurve $k$ des Kegels in der Geraden $h$, so sind die Verbindungslinien von $S$ mit den Schnittpunkten von $k$ und $h$ die Schnitterzeugenden der Hilfsebene mit dem Kegel; dieselben schneiden die $g$ in den gesuchten Punkten.

# III. Abschnitt.

## Die Flächen zweiten Grades.

### I. Allgemeine Eigenschaften und Einteilung der Flächen zweiten Grades.

**72.** *Begriff. Eine Fläche zweiter Ordnung nennt man eine solche Fläche, welche von jeder Geraden, die nicht ganz in der Fläche liegt, in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird.*

Legt man durch die Gerade $g$ beliebig viele Ebenen, so schneidet jede derselben die Fläche zweiter Ordnung F in einer Kurve, und die beiden Schnittpunkte der $g$ mit der F sind offenbar zugleich die alleinigen Schnittpunkte der $g$ mit jeder von diesen Kurven. Daraus folgt auch, daß die Schnittlinie einer jeden Ebene mit einer Fläche zweiter Ordnung von jeder Geraden ihrer Ebene, die nicht selbst ein Bestandteil der Schnittlinie ist, in zwei Punkten getroffen wird, daß sie also selbst von der zweiten Ordnung ist. Eine solche Kurve ist nach der Analysis ein Kegelschnitt (I, 338, Anm.). Rein geometrisch können wir sagen: *Eine Fläche zweiter Ordnung ist eine solche Fläche, welche von jeder Ebene in einem (reellen oder imaginären) Kegelschnitte getroffen wird.* Man könnte sie in geometrischer Anschauung eine *Kegelschnittsfläche* nennen.

Hieraus folgt sogleich, daß *wenn drei Punkte einer Fläche zweiter Ordnung auf einer Geraden liegen, diese Gerade ganz in der Fläche liegt,* weil diese Gerade ein Bestandteil des Kegelschnittes sein muß, in welchem eine durch die drei Punkte gelegte Ebene die Fläche schneidet.

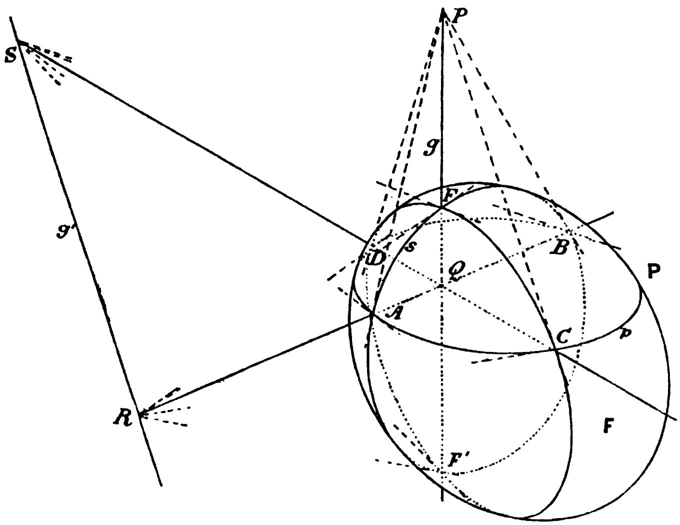
Indem wir imaginäre ebene Schnitte und imaginäre Flächen erst später untersuchen wollen, gehen wir zunächst von dem Begriffe aus: *Eine reelle Fläche zweiter Ordnung ist eine Fläche, auf welcher jede reelle ebene Kurve ein Kegelschnitt ist.*

Die *Kugel* ist offenbar und das *einschalige Hyperboloid* nach Nr. 31 eine solche Fläche.

**73.** Es sollen jetzt einige allen reellen Flächen zweiter Ordnung gemeinsame Eigenschaften aus ihrem Begriffe abgeleitet werden.

Zieht man aus einem nicht der Fläche zweiter Ordnung **F** angehörigen Punkte $P$ eine die **F** in zwei reellen Punkten $F, F'$ schneidende Gerade $g$ und legt durch $g$ eine Ebene **E**, welche die **F** in dem Kegelschnitte $s$ treffe, bestimmt die Polare $QR$ von $P$ zu $s$, welche die $g$ in $Q$ schneide, so ist $Q$ von $P$ durch $F$ und $F'$ harmonisch getrennt (I, 341). Jede durch $g$ gelegte Ebene liefert daher Fig. 33.

Fig. 33.




eine durch denselben Punkt $Q$ der $g$ gehende Gerade, und alle solche Punkte $Q$ und Gerade $QR$, welche durch beliebige, aus $P$ gezogene und die Fläche **F** reell schneidende Gerade und Ebenen geliefert werden, liegen in ein und derselben Ebene **P**. Denn seien $h_1$, $h_2$ zwei solche durch $Q$ gehende Gerade $QR$, sei $Q_3$ ein anderer solcher vierter harmonischer Punkt, und legt man durch $PQ_3$ eine Ebene, welche die $h_1$, $h_2$ in solchen Punkten $Q_1$, $Q_2$ und die **F** in einem Kegelschnitte $s_1$ trifft, so muß $Q_1 Q_2 Q_3$ die (gerade) Polare von $P$ zu $s_1$ sein, also $Q_3$ in der Ebene $h_1 h_2$ liegen. Diese Ebene **P** heißt die *Polarebene von $P$ in Bezug auf die Fläche* **F** *oder zu der Fläche* **F**.

Beachtet man nun, daß wenn eine Gerade $QR$ den Kegelschnitt $s$ in den Punkten $A$ und $B$ schneidet, diese die Berührungspunkte der aus $P$ an $s$ gezogenen Tangenten bilden; daß sich ferner die in $F$ und $F'$ an $s$ gelegten Tangenten in einem Punkte $R$ der $QR$, also in der Ebene **P** treffen, wobei $Q$ und $R$ durch $A$ und $B$ harmonisch getrennt sind, so folgt, *daß die Polarebene* **P** *des Punktes $P$ zu der Fläche* **F** *enthält:*

Fig. 33. 1) *Die Punkte* $Q$ auf den aus $P$ gezogenen die **F** in $F$ und $F'$ schneidenden Geraden $g$, welche *von* $P$ *durch* $F$ *und* $F'$ *harmonisch getrennt sind*;

2) *die Polaren* $QR$ von $P$ zu den Kegelschnitten $s$, in welchen die **F** von Ebenen, die durch $P$ gehen, geschnitten wird;

3) *die Berührungspunkte* $A, B \ldots$ der aus $P$ an **F** gelegten Tangenten und Berührungsebenen; da diese Punkte auf dem *Kegelschnitte* $p$ liegen, welchen **P** mit **F** gemein hat, so berührt der aus $P$ der Fläche umschriebene Kegel nach einem Kegelschnitte, ist also *vom zweiten Grade*;

4) *die Schnittpunkte* $R$ *zweier Tangenten* an einem auf **F** gelegenen Kegelschnitte, deren Berührungspunkte $F, F'$ mit $P$ auf einer Geraden liegen; alle Punkte $R$, weil sie von $Q$ (**P**, $g$) durch Punkte des Kegelschnittes $p$ (**P**, **F**) harmonisch getrennt sind, bilden die *Polare* $g'$ von $Q$ zu $p$, also eine Gerade;

5) *die Schnittgerade* $g'$ *je zweier Berührungsebenen* an **F**, deren Berührungspunkte $F$ und $F'$ mit $P$ auf einer Geraden liegen.

Jeder dieser Sätze gibt ein Mittel, die Polarebene **P** von $P$ zu **F** zu bestimmen. *Ist* $P$ *ein Punkt der Fläche* **F**, *so ist seine Polarebene die Berührungsebene der* **F** *in* $P$.

*Zus.* Aus diesen Sätzen folgt, daß *eine Fläche zweiter Ordnung* **F** *mit sich selbst perspektiv-kollinear* ist in Bezug auf einen Punkt $P$ und dessen Polarebene **P** zu **F** als Mittelpunkt und Ebene der Kollineation, wobei zwei entsprechende Elemente durch $P$ und **P** harmonisch getrennt sind. (Vergl. I, 346.)

**74.** So wie die *Ordnung einer Fläche* durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden angegeben wird, so ihre *Klasse* durch die Anzahl der Berührungsebenen, welche an sie durch eine Gerade gelegt werden können. *Eine Fläche zweiter Ordnung ist auch zweiter Klasse*, weil durch eine Gerade zwei Berührungsebenen an sie gelegt werden können, nämlich ebenso viele wie an einen Kegel (zweiten Grades), der aus einem Punkte der Geraden der Fläche umschrieben wird. Die Fläche soll daher *vom zweiten Grade* genannt werden.

**75.** Wenn **P** die Polarebene des Punktes $P$ zu der Fläche **F** ist, so heißt umgekehrt *der Punkt* $P$ *der Pol der Ebene* **P**. Von *einer Ebene* **P** *können nicht mehrere Punkte Pole sein.* Denn hätte **P** deren zwei, $P$ und $P'$, und legte man durch $PP'$ eine die **F** in einem Kegelschnitte $s$ und die **P** in der Geraden $QR$ schneidende Ebene, so müßte $QR$ die Polare zu $s$ zugleich von $P$ und von $P'$ sein, was unmöglich (I, 340).

*Jede Ebene* **P** *hat einen Pol* $P$, und man findet denselben durch

Umkehrung der in der vorigen Nummer gegebenen Verfahren. So Fig. 33. ergibt sich aus 5): Man schneide irgend eine Berührungsebene der **F**, deren Berührungspunkt $F$ nicht in **P** liegt, mit **P** in $g'$, lege durch $g'$ die stets mögliche zweite Berührungsebene an **F**, welche in $F'$ berühre, so ist $P$ der Punkt der Geraden $FF'$, welcher durch $F$ und $F'$ von **P** harmonisch getrennt ist.

**76.** *Die Polarebene* **Q** *eines jeden Punktes $Q$ einer Ebene* **P** *zu einer Fläche* **F** *geht durch den Pol $P$ der* **P**. Denn legt man durch die Gerade $PQ$ eine die **F** in einem Kegelschnitte $s$ schneidende Ebene, so geht die Polare von $P$ zu $s$, da sie in **P** liegt, durch $Q$; daher geht auch die Polare von $Q$ zu $s$, sowie die Polarebene von $Q$ zu **F**, weil sie diese Polare enthält, durch $P$. Und reciprok: *Der Pol $Q$ einer jeden durch einen Punkt $P$ gehenden Ebene* **Q** *liegt in der Polarebene* **P** *von $P$*; denn weil $P$ in **Q** liegt, geht **P** durch $Q$.

Zwei solche *Punkte $P$* und $Q$, wovon jeder in der Polarebene des anderen liegt, heißen *konjugirt in Bezug auf* **F**; *sie sind auch konjugirt in Bezug auf jeden Kegelschnitt $s$ der* **F**, *dessen Ebene durch sie geht.* Sie bilden ein Paar der Involution konjugirter Punkte auf der Geraden $PQ$, und die Doppelpunkte derselben sind die Schnittpunkte der Geraden mit **F**. — Ebenso heißen *zwei Ebenen in Bezug auf* **F** *konjugirt*, wenn jede durch den Pol der anderen geht; *ein Punkt und eine Gerade*, wenn die Gerade in der Polarebene des Punktes liegt; *eine Ebene und eine Gerade*, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene geht.

**77.** *Zwei Gerade $g$ und $g'$ heißen in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades* **F** *Polaren von einander oder gegenseitige Polaren zu* **F**, wenn die Polarebenen aller Punkte der $g$ durch $g'$ gehen, und die Pole aller durch $g$ gehenden Ebenen auf $g'$ liegen, und umgekehrt. Alle diese Bedingungen sind zugleich erfüllt; denn legt man durch $g$ zwei Ebenen **A** und **B**, deren Pole bezw. $A$ und $B$ sind, und bestimmt $g'$ als $AB$, so geht die Polarebene jedes Punktes der $g$, weil derselbe in **A** und **B** liegt, durch $A$ und $B$, also durch $g'$, und der Pol jeder durch $g$ gelegten Ebene liegt in der Polarebene jedes Punktes der $g$, also in $g'$. Das Umgekehrte gilt, weil $g$ die Verbindungslinie der Pole zweier durch $g'$ gehenden Ebenen ist.

*Von zwei Polaren $g$, $g'$ gilt:*

1) *Jeder Punkt der $g$ ist zu jedem Punkte der $g'$ in Bezug auf* **F** *konjugirt.*

2) *Beschreibt ein Punkt $P$ eine Gerade $g$, so beschreibt die Polarebene* **P** *des $P$ ein mit dieser Punktreihe projektives und involutorisches Ebenenbüschel $g'$*, weil **P** durch $g'$ und durch den zu $P$ konjugirten Punkt der $g$ geht, diese Punkte aber zugeordnete Punkte einer In-

Fig. 33. volution sind. Die Doppelpunkte dieser Involution sind zugleich die Schnittpunkte der $g$ mit der **F** und die Berührungspunkte der aus $g'$ an **F** gelegten Berührungsebenen, weil in jedem Doppelpunkte ein Punkt in seine Polarebene fällt. Die Spitzen $S$ der Kegel, welche einer **F** nach der Schnittkurve $s$ je einer durch $g$ gelegten Ebene **S** umschrieben sind, bilden als Pole der **S** auf $g'$ eine mit dem Büschel der **S** und mit der Reihe ihrer Schnittpunkte $R$ mit $g'$ projektive Punktreihe, und beide Reihen liegen in Involution.

3) *Berührt $g$ die* **F** *in $P$, so berührt auch $g'$ die* **F** *in $P$*; denn $g'$ ist der Schnitt der Polarebene des Punktes $P$ der $g$, d. i. der Berührungsebene der **F** in $P$, mit der Polarebene irgend eines anderen Punktes der $g$, welche Ebene ebenfalls durch $P$ geht (73, 3)); $g$ und $g'$ heißen dann *konjugirte Tangenten der* **F**. Die koncentrischen Strahlenbüschel $P$ der $g$ und $g'$ in der Berührungsebene bilden eine Involution. Die (reellen oder imaginären) Doppelstrahlen dieser Involution liegen ganz in der Fläche, weil jeder Punkt eines jeden derselben in seiner Polarebene liegt.

4) *Der Pol der $g$ zu einem Kegelschnitte der* **F**, *dessen Ebene durch $g$ geht, liegt auf $g'$*, so zu $s$ in $R$, weil dieser Punkt ($R$) als ein Punkt auf $g'$ zu jedem Punkte der $g$ in Bezug auf **F**, daher auch in Bezug auf $s$ konjugirt ist.

**78.** Ein Tetraeder $PQRS$ heißt in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades ein *Polartetraeder*, wenn jeder Eckpunkt desselben der Pol der gegenüberliegenden Fläche ist. Man erhält ein solches, wenn man einen Punkt $P$ willkürlich annimmt, in seiner Polarebene **P** einen Punkt $Q$ wählt, die Polarebene von $Q$ (welche durch $P$ geht) mit **P** schneidet, auf der Schnittlinie einen Punkt $R$ annimmt, und dessen Polarebene (die durch $P$ und $Q$ geht) mit jener Schnittlinie (in $S$) schneidet. Die Polarebene von $S$ geht dann durch $P$, $Q$ und $R$, und die Bedingung ist daher erfüllt. In einem Polartetraeder ist jeder Eckpunkt jedem anderen, jede Fläche jeder anderen konjugirt, und jede Kante ist die Polare ihrer Gegenkante; es gibt drei Paare von Gegenkanten und gegenseitigen Polaren.

Ein Dreieck des Tetraeders bildet ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt, in welchem die Ebene des Dreiecks die **F** schneidet, so $QRS$ zu $p$.

**79.** Aus den entwickelten Eigenschaften ergibt sich folgende *Entstehungsweise* einer Fläche **F**, wenn man beachtet, daß die Schnittkurve jeder durch $g$ gelegten Ebene mit **F** die $g$ in denselben Punkten $F, F'$ trifft, auch wenn diese imaginär sind (76). Es gilt: Eine reelle Fläche zweiten Grades **F**, welche den Kegelschnitt $p$ enthält, $P$ zum Pole der Ebene **P** desselben hat und von einer

durch $P$ gehenden Geraden $g$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten wird, die bezw. durch die reellen oder ideellen, durch $P$ und $\mathbf{P}$ harmonisch getrennten Punkte $F, F'$ dargestellt werden, wird durch einen Kegelschnitt $s$ erzeugt, dessen Ebene den Kegelschnitt $p$ in zwei reellen Punkten $A$ und $B$ schneidet, welcher durch $A$ und $B$ geht, von $PA$, $PB$ berührt wird, und den einen, und dann auch den anderen jener beiden durch $F, F'$ bestimmten reellen oder imaginären Punkte enthält.

**80.** Um nachzuweisen, daß auf die in der vorigen Nr. angegebene Art eine Fläche zweiten Grades auch dann entsteht, wenn $p, P, F$ willkürlich angenommen werden, bedürfen wir eines Satzes über *räumliche Kollineation.* Wir haben in I, 554 zwei räumliche Systeme $\Sigma, \Sigma'$, welche in perspektive Lage gebracht werden, *kollinear* genannt. In beiden Systemen entspricht jeder Punktreihe, jedem Strahlen- und Ebenenbüschel des einen ein damit projektives gleichartiges Gebilde des anderen, und jedem ebenen Systeme des einen ein damit kollineares des anderen. Man sagt nun unter *Erweiterung des Begriffes: Zwei räumliche Systeme $\Sigma, \Sigma'$ heißen kollinear, wenn fünf beliebigen Punkten $A, B, C, D, E$ des einen, von denen jedoch keine vier in einer Ebene liegen, bezw. fünf eben solche Punkte $A', B', C', D', E'$ des andern entsprechen, und wenn den drei Ebenenbüscheln des einen, deren Axen Verbindungslinien je zweier der fünf Punkte sind, aber nicht alle durch denselben Punkt gehen, drei damit projektive Ebenenbüschel des anderen entsprechen, deren Axen die entsprechenden Linien sind.*

Es gilt dann der Satz: *In zwei kollinearen räumlichen Systemen entspricht jedem ebenen Systeme des einen ein damit kollineares des anderen.* Denn durch die angegebene Bedingung ist zu jedem Punkte $X$ des einen Systems der entsprechende $X'$ des anderen bestimmt. Wählt man nämlich etwa $AB$, $BC$, $CA$ als jene Axen, so liefern die drei Paare projektiver Ebenenbüschel die Gleichungen

$$AB(CDEX) = A'B'(C'D'E'X'),$$
$$BC(ADEX) = B'C'(A'D'E'X'),$$
$$CA(BDEX) = C'A'(B'D'E'X'),$$

wodurch drei durch $X'$ gehende Ebenen, und damit $X'$ bestimmt ist. Dann entspricht auch *jeder geraden Punktreihe $g$ des einen Systems eine damit projektive gerade Punktreihe $g'$ des anderen.* Denn die Punktreihe $g$ wird durch drei mit ihr und daher auch unter einander projektive Ebenenbüschel $AB$, $BC$, $CA$ projicirt; diesen entsprechen drei mit ihnen und daher unter einander projektive Ebenenbüschel $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Drei entsprechende Ebenen be-

stimmen einen Punkt $F'$, drei andere einen zweiten Punkt $G'$, und ihre Verbindungslinie $F'G'$ ist die $g'$. Denn die drei Ebenenbüschel von $\Sigma'$ schneiden auf $F'G'$ drei unter einander projektive Punktreihen ein, welche alle entsprechenden Punkte gemein haben, weil es für drei solche gilt, nämlich für $F', G'$ und den Punkt der Ebene $A'B'C'$. Dann entspricht auch jeder Ebene von $\Sigma$ eine solche von $\Sigma'$, jedem Strahlen- und Ebenenbüschel von $\Sigma$ ein damit projektives ebensolches Gebilde von $\Sigma'$, da beide Gebilde projektive Punktreihen projiciren, einem ebenen Systeme von $\Sigma$ ein damit kollineares von $\Sigma'$, da man vier Punkte des einen stets mit den vier entsprechenden des anderen in perspektive Lage bringen kann, worauf wegen der Projektivität entsprechender Strahlenbüschel jeder Punkt des einen ebenen Systems sich in den entsprechenden des anderen projicirt (I, 310, 309).

*Zwei kollineare räumliche Systeme $\Sigma$, $\Sigma'$ kann man im allgemeinen nicht unter einander, wohl aber auf unendlich viele Arten jedes mit ein und demselben dritten Systeme in perspektive Lage bringen.*

Denn sind $\Sigma, \Sigma'$ durch je fünf Punkte $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ gegeben, welche sich paarweise entsprechen, und ist $Q$ der Schnittpunkt der Geraden $DE$ mit der Ebene $ABC$, und $Q'$ von $D'E$ mit $A'B'C'$, so kann man $\Sigma$ und $\Sigma'$ so legen, daß sich die ebenen Systeme $ABCQ$, $A'B'C'Q'$ in perspektiver Lage befinden, wobei $O$ der Mittelpunkt und $s$ die Axe der Kollineation sei. Bei der Drehung von $\Sigma'$ um $s$ bleiben $ABCQ$ und $A'B'C'Q'$ in perspektiver Lage, aber es gibt dabei im allgemeinen keine Lage, in welcher auch $D$ und $D'$, oder $E$ und $E'$ perspektiv liegen, oder in welcher $OD'$ durch $D$ oder $OE'$ durch $E$ geht. Denn bei der Drehung beschreiben $O$ und $D'$ zwei parallele Kreise (I, 304), in welchen diejenigen Halbmesser parallel sind, welche nach den derselben Lage von $\Sigma'$ zugehörigen Punkten $O$ und $D'$ laufen; daher beschreibt eine durch solche Punkte bestimmte Gerade $OD'$ einen schiefen Kreiskegel, auf welchem der willkürliche Punkt $D$ im allgemeinen nicht liegt; das gleiche gilt für $E$.

Zieht man aber in einer dieser Lagen von $\Sigma'$ in der Ebene $OQDE$, welche auch $Q'$ enthält, eine Gerade $Q'D''E''$, so daß $ODD''$, $OEE''$ Gerade sind, so ist mit $\Sigma'' = A'B'C'D''E''$ das $\Sigma = ABCDE$ aus dem Kollineationsmittelpunkte $O$, und das $\Sigma' = A'B'C'D'E'$ aus dem Schnittpunkte von $D'D''$ und $E'E''$, welche Linien sich treffen, da sie in der Ebene $Q'D'D''$ liegen, in Perspektive. Also ist $\Sigma''$ eines jener dritten Systeme.

**81.** Wir können nun den Satz von Nr. 79 verallgemeinern und sagen:

*Satz. Jede Fläche ist vom zweiten Grade, welche durch einen Kegelschnitt p und zwei nicht in dessen Ebene liegende reelle Punkte P und F bestimmt ist und durch einen veränderlichen Kegelschnitt erzeugt wird, dessen Ebene sich um PF dreht, der durch die Schnittpunkte A, B seiner Ebene mit p geht, von den Geraden PA, PB berührt wird, und den einen und dann auch den anderen der beiden reellen oder imaginären Punkte der Geraden PF enthält, welche, wenn reell, als F und als der von F durch P und* **P** *harmonisch getrennte Punkt F′ gegeben sind, wenn imaginär, durch ihre ideelle Darstellung F, F′ in Bezug auf P und* **P**.

Den *Beweis* führen wir dadurch, daß wir zeigen, daß eine so entstehende Fläche **F** entweder mit der Kugel **K** oder mit dem einschaligen Umdrehungshyperboloide **H** kollinear ist. Dann nämlich muß jeder ebene Schnitt von **F** kollinear sein mit einem ebenen Schnitte von **K** oder **H** (80), also mit einem Kegelschnitte (31); sie muß also selbst ein Kegelschnitt sein. Nun entstehen aber die Flächen **K** und **H** als solche zweiten Grades in der in unserem Satze angegebenen Weise (79); bei der **K** ist $p$ ein Kreis, $F$ ein reeller oder ideeller Punkt, je nachdem $PF$ die Ebene **P** in einem inneren oder äußeren Punkte des $p$ trifft; bei dem **H** kann man $p$ als einen Parallelkreis wählen, $P$ ist dann die auf der Umdrehungsaxe liegende Spitze des Kegels, welcher das **H** nach $p$ berührt, und $F$ ist augenscheinlich ein reeller oder ideeller Punkt, je nachdem $PF$ die **P** in einem äußeren oder inneren Punkte des $p$ trifft. Jede der Flächen **F**, **K**, **H** ist bestimmt durch drei Elemente $p$, $P$, $F$; und ihre gegenseitige Kollinearität ist nachgewiesen, wenn die drei Elemente der **F** kollinear auf diejenigen von **K** oder **H** bezogen werden können, und dies thun wir dadurch, daß wir fünf Punkte angeben, durch welche jedesmal $p$, $P$, $F$ bestimmt sind, da durch je fünf Punkte die Kollineation bestimmt ist (80).

Fig. 34.

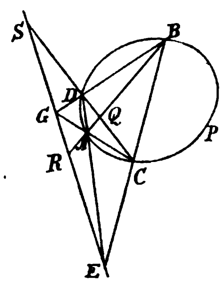



Fig. 34.

Der Kegelschnitt $p$ samt dem Schnittpunkte seiner Ebene **P** mit $PF$ kann durch diesen Schnittpunkt und noch drei Punkte bestimmt werden, nämlich noch durch die gemeinsamen Punkte der Polaren dieses Schnittpunktes zu $p$ mit $p$ und einen weiteren willkürlichen Punkt $A$ des $p$. Ist nämlich jener Schnittpunkt ein äußerer Punkt $R$ des $p$, so sind die gemeinsamen Punkte $C$, $D$ der Polaren von $R$ zu $p$ mit $p$ reell, und $p$ ist durch $R$, $A$, $C$, $D$ bestimmt, da $RC$, $RD$ Tangenten an $p$ sind. Ist jener Schnittpunkt ein innerer Punkt $Q$ von $p$,

so schneide man die Polaren $RS$ von $Q$ zu $p$ mit $QA$ in $R$, bestimme die (durch $Q$ gehende) Polare $QS$ von $R$, so daß $QRS$ ein Polardreieck zu $p$ ist, und gebe von den imaginären Schnittpunkten der $RS$ mit $p$ die ideelle Darstellung in Bezug auf $R$, $QS$ an, d. h. die in Bezug auf $p$ konjugirten durch $R$ und $QS$ harmonisch getrennten Punkte $E$, $G$. Man findet sie, indem man die $QR$, $QS$ mit $p$ bezw. in $A$, $B$ und $C$, $D$ schneidet; dann ist $E = AD, BC$; $G = AC, BD$. Durch die vier Punkte $Q$, $A$, $E$, $G$ ist $p$ bestimmt; denn $B$ ist der von $A$ durch $Q$ und $EG$ harmonisch getrennte Punkt; ferner ist $C = AG, BE$; $D = AE, BG$, und endlich sind $RC$, $RD$, $SA$, $SB$ Tangenten an $p$.

Indem man nun die fünf bestimmenden Punkte einer Fläche **F**, nämlich $P$, $F$, $A$, $C$, $D$ oder $P$, $F$, $A$, $E$, $G$, einzeln fünfen gleichbedeutenden einer **K** oder **H** als entsprechend zuordnet, entsprechen sich auch die $p$ und die ganzen Flächen als kollinear. Es ist dies aber nur dann möglich, wenn bei beiden Flächen die Punkte $F$ übereinstimmend reell oder ideell, und wenn die Punkte $PF$, **P** übereinstimmend innere oder äußere des $p$ sind. Daher gilt:

*Eine durch die drei Elemente: einen Kegelschnitt $p$, den Pol $P$ seiner Ebene* **P**, *und einen Punkt $F$ der Fläche bestimmte Fläche zweiten Grades ist kollinear mit der Kugel, wenn $F$ reell, und ($PF$,* **P**) *ein innerer Punkt des $p$, oder wenn $F$ ideell und ($PF$,* **P**) *ein äußerer Punkt des $p$ ist; dagegen ist sie kollinear mit dem einschaligen Umdrehungshyperboloide, wenn $F$ reell und ($PF$,* **P**) *ein äußerer Punkt des $p$, oder wenn $F$ ideell und ($PF$,* **P**) *ein innerer Punkt des $p$ ist.*

**82.** Indem die Flächen zweiten Grades entweder mit der Kugel oder mit dem einschaligen Umdrehungshyperboloide, von welchem der Umdrehungskegel eine Abart ist, kollinear sind, auf ersterem aber keine Gerade liegen, auf letzterem dagegen durch jeden Punkt zwei gehen, die beim Kegel zusammenfallen, und da sich diese Eigenschaften und andere auf die kollinearen Flächen übertragen, so gilt:

1) *Es gibt zwei Arten von Flächen zweiten Grades, nichtgeradlinige oder Nichtregelflächen, und geradlinige oder Regelflächen.* Die ersteren enthalten keine Geraden; bei letzteren gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Gerade, die ganz in der Fläche liegen und bei dem Kegel in eine einzige zusammenfallen.

2) Eine *Nichtregelfläche* zweiten Grades wird von einer Ebene in einer *reellen oder in einer imaginären Kurve* geschnitten und hat mit einer Berührungsebene nur den Berührungspunkt gemein. Eine *Regelfläche* wird von jeder Ebene in einer *reellen Kurve* geschnitten

und hat mit einer Berührungsebene zwei durch den Berührungspunkt gehende Gerade gemein.

3) An eine *Nichtregelfläche* geht aus einem Punkte $P$ ein berührender reeller oder imaginärer Kegel, wobei $P$ bezw. ein *äußerer oder ein innerer Punkt der Fläche* heißen soll. An eine *Regelfläche* geht aus jedem Punkte ein reeller berührender Kegel, so daß *jeder Punkt ein äußerer Punkt der Fläche* ist.

4) *Bei einer Nichtregelfläche* **F** *zweiten Grades schneidet von zwei Polaren* $g$, $g'$ *die eine die* **F**, *die andere schneidet sie nicht.* Die Berührungsebenen in den Schnittpunkten der ersten schneiden sich in der zweiten. *Bei einer Regelfläche schneiden entweder beide Gerade* $g$ *und* $g'$ *die* **F**, *oder beide schneiden sie nicht.* Denn schneidet die $g$ die **F** in zwei Punkten $A$ und $B$, so enthält die Berührungsebene in jedem Schnittpunkte zwei Erzeugende $a$, $a_1$ bezw. $b$, $b_1$, von jeder Schaar eine; daher schneiden sich $a$ und $b_1$, sowie $a_1$ und $b$ in Punkten der **F** (30), und die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte ist die $g'$, welche daher ebenfalls die **F** schneidet.

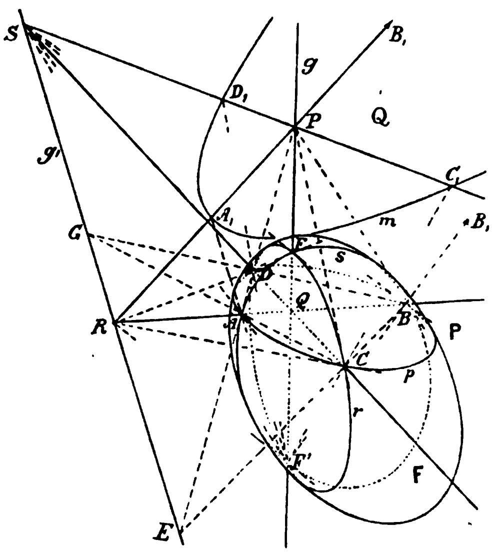
**83.** *Satz und Aufgabe. Sind alle reellen Schnittkurven einer Fläche* **F** *mit Ebenen Kegelschnitte, so sind es auch die imaginären. Es soll von einem solchen imaginären Kegelschnitte* $i$ *eine ideelle Darstellung* $m$ *gegeben werden.* (Vergl. I, 408.)

*Bew. und Aufl.* Die imaginäre Schnittkurve einer Ebene **Q** mit der Fläche **F** ist der (imaginäre) Kegelschnitt $i$, wenn alle Gerade der **Q** die **F** in denselben (imaginären) Punkten treffen, wie den $i$, d. h. wenn auf jeder Geraden der **Q** die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf **F** dieselbe ist, wie in Bezug auf $i$. Da nun in der Ebene **Q** die Gesamtheit der zu einem Punkte $H$ in Bezug auf **F** und in Bezug auf $i$ konjugirten Punkte je eine Gerade bilden, nämlich das eine Mal die Schnittgerade der **Q** mit der Polarebene von $H$ zu **F**, das andere Mal die Polare von $H$ zu $i$, so ist die oben bezeichnete Bedingung dafür, daß $i$ der Schnitt **QF** sei, dann erfüllt, wenn jedem Punkte $H$ dieselbe Gerade $h$ in Bezug auf **F** und in Bezug auf $i$ konjugirt ist, oder wenn **F** und $i$ in **Q** dasselbe Polarsystem der Paare $H$, $h$ besitzen. Beschreibt nun in **Q** der Punkt $H$ eine Gerade $PR$, so beschreibt seine Polarebene zu **F** ein Ebenenbüschel, und der zu $H$ konjugirte Strahl $h$ ein Strahlenbüschel, den Schnitt des Ebenenbüschels mit **Q**, und $H$ und $h$ bestimmen auf $PR$ zwei zugeordnete Punkte einer Involution. Ebenso beschreibt der zu $H$ in Bezug auf $i$ konjugirte Strahl $h$ (seine Polare) ein Büschel, welches mit den $H$ auf $PR$ eine Involution bildet. Dieses System der Reihe $PR$ von Punkten $H$ und des Büschels der Strahlen $h$ ist durch zwei Paare $H$, $h$ bestimmt, weil durch sie die Involution

auf $PR$ und der Mittelpunkt des Büschels der $h$ bestimmt ist. Wir wollen nun dieses System für die durch einen beliebigen Punkt $P$ der **Q** gehenden Strahlen $PR$ untersuchen.

Fig. 35. Bestimmen wir nach Nr. 73 den Pol $Q$ der Ebene **Q** zu **F**, so ist dieser als Pol einer nicht schneidenden Ebene ein innerer Punkt von **F**, so daß jede durch $Q$ gelegte Gerade und Ebene die **F** reell schneidet. Legt man dann die durch $Q$ gehende Polarebene **P** von $P$, schneidet diese mit **Q** in der Geraden $g'$ und mit **F** in dem Kegelschnitte $p = ABCD$, so ist $PQ = g$ die Polare von $g'$ zu **F** (77) und $Q$ der Pol von $g'$ zu $p$ (77, 4). Sei $PR$ ein beliebiger in **Q** durch $P$ gezogener Strahl, so schneidet die Ebene $PQR$ die **F** in dem reellen Kegelschnitte $s$, und die $PQ$ trifft die **F** und den $s$ in den reellen Punkten $F, F'$. Der Pol $S$ der Ebene $PQR$ (des $s$), weil

Fig. 35.




sie durch $g$ geht, liegt auf $g'$, und $PQRS$ ist ein Polartetraeder in Bezug auf **F**, so daß die Polarebenen aller Punkte $H$ der $PR$ zu **F**, daher auch die zu diesen Punkten $H$ gehörigen Strahlen $h$ durch $S$ gehen. Konjugirte Punkte $H$ auf $PR$ in Bezug auf $s$ (und **F**) erhält man mittelst Strahlen, die man aus irgend einem Punkte des $s$ durch $A$ und $B$ legt, da $AB$ in Bezug auf $s$ zu $PR$ konjugirt ist (I, 347). So bestimmen $F'A$ und $F'B$ auf $PR$ die konjugirten Punkte $A_1$ und $B_1$; ein anderes Paar ist $P$ und $R$, wobei noch zu beachten, daß $PRA_1B_1$ harmonisch sind als Projektion von $QRAB$ (aus $F'$). $FB$ und $FA$ hätten ebenfalls bezw. $A_1$ und $B_1$ geliefert. Zwei Paare $H, h$ in Bezug auf **F** sind also $P$, $SR$ und $A_1$, $SB_1$ (ein drittes $B_1, SA_1$). Projicirt man andererseits den Kegelschnitt $ABCD = p$ aus $F'$ (oder $F$) auf **Q** in den Kegelschnitt $A_1B_1C_1D_1 = m$, so ist $m$ die ideelle Darstellung eines imaginären Kegelschnittes $i$ in Bezug auf $P$ und $RS$, welcher auf dem beliebigen, also auf jedem aus $P$ gezogenen Strahle $PR$ dasselbe System $H, h$ besitzt, wie **F**. Denn $P$ und $RS$ sind Pol und Polare

zu $m$, weil $Q$ und $RS$ solche zu $p$ sind, und sie deren Projektion bilden; dann sind sie aber auch Pol und Polare zu $i$, weil sie den Mittelpunkt und die Axe der Imaginärprojektion von $m$ und $i$ bilden (I, 401). Ebenso sind $A_1$ und die Tangente $SB_1$ der $m$ im Gegenpunkte $B_1$ (auf $A_1P$) Pol und Polare zu $i$ (I, 408); $SB_1$ ist aber wirklich Tangente an $m$, weil $SB$ Tangente an $p$ ist, da $S$ der Pol von $RQAB$. — Die Kurven **QF** und $i$ sind daher dieselben, und $m$ ist eine ideelle Darstellung von $i$ in Bezug auf $P$ und $g'$. Daher gilt der

*Satz. Schneidet eine Ebene* **Q** *eine reelle Fläche zweiten Grades* **F** *in einem imaginären Kegelschnitte $i$, so ist die ideelle Darstellung $m$ des $i$ in Bezug auf irgend einen Punkt $P$ der* **Q** *und dessen Polare $g'$ zu $i$ die Projektion des Kegelschnittes $p$ der* **F** *aus $F'$ auf die Ebene* **Q**, *wenn $p$ die (stets reelle) Schnittkurve von* **F** *mit der Polarebene* **P** *von $P$ zu* **F**, *$g'$ die Schnittgerade von* **Q** *und* **P**, *und $F'$ einer der (stets reellen) Schnittpunkte $F$, $F'$ der* **F** *mit der Polaren $g$ der $g'$ zu* **F** *ist.*

Wir können nun auch sagen: *Eine reelle Fläche zweiten Grades ist eine solche, die von jeder Ebene in einem Kegelschnitte getroffen wird, der reell oder imaginär sein kann.*

**84.** Indem wir bei einem imaginären Kegelschnitte, wie bei einem reellen, den Pol der unendlich fernen Geraden seinen Mittelpunkt nennen, können wir den *Satz* aussprechen:

*Die ideelle Darstellung $m$ eines imaginären Kegelschnittes in Bezug auf seinen Mittelpunkt $U$ und die unendlich ferne Gerade $u$ ist eine Ellipse, welche $U$ ebenfalls zum Mittelpunkte hat.* Denn $U$ und $u$ sind Pol und Polare auch zu $m$ (I, 401), und $m$ besitzt keinen reellen Punkt auf $u$, weil $i$ keinen solchen besitzt. Diese Ellipse $m$ soll die *Mittelpunktsellipse* des $i$ heißen. Wird $m$ ein Kreis, so soll $i$ ein *imaginärer Kreis* heißen*).

*) Der imaginäre Kreis wird von *Chasles* in seiner Géométrie supérieure (1. Aufl. 1852, S. 546 ff.) als der Kreis von der Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$ bezeichnet. Chasles bestimmt die Mittelpunktsabstände $a$, $b$ von Pol und Polare durch die Gleichung $ab = -r^2$. Über konjugirte Kegelschnitte, insbesondere ihre mannigfachen Gestalten, hat Herr Prof. *Retali* eine eingehende Untersuchung veröffentlicht in den Denkschriften der Akademie der Wissenschaften zu Bologna (Ser. 4, B. 5, gelesen am 24. Jan. 1884) unter dem Titel: Sopra una serie particolare di coniche d'indice due. Er ging dabei von dem Begriffe aus, daß jeder der Kegelschnitte zu sich selbst reciprok in Bezug auf den anderen sei, welcher Begriff auch den beiden ersten gedruckten Veröffentlichungen über diese Kurven zu Grunde gelegt war, denen von *Steiner* und von *Ruffini*. (Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manu-

*Satz. Der imaginäre Schnitt einer Ebene mit einer Kugel ist ein imaginärer Kreis.*

Denn sucht man nach der vor. Nr. seine ideelle Darstellung $m$ in Bezug auf den Schnittpunkt $P$ der schneidenden Ebene $\mathbf{Q}$ mit dem zu $\mathbf{Q}$ senkrechten Kugeldurchmesser $FF'$, so sind die Polarebene $\mathbf{P}$ des $P$ und daher auch $p$ parallel zu $\mathbf{Q}$, und die Projektion von $p$ aus $F'$ (oder $F$) auf $\mathbf{Q}$ ist ein Kreis $m$ vom Mittelpunkte $P$.

**85.** Indem wir den Begriff der Imaginärprojektion von Kegelschnitten (I, 403) auf den Raum ausdehnen, und dabei zugleich eine Erweiterung für die Ebene gewinnen, sagen wir:

*Begriff. Zwei Kegelschnitte $k$, $k_1$ in derselben oder in verschiedenen Ebenen, zu welchen bezw. $G$, $g$ und $G_1$, $g_1$ Pol und Polare sind, befinden sich in der perspektiven Lage der Imaginärprojektion zu einander, wenn aus einem Projektionsmittelpunkte $O$ sich $G$ auf $G_1$, $g$ auf $g_1$, und der zu dem einen Kegelschnitte $k$ in Bezug auf $G$, $g$ konjugirte Kegelschnitt $l$ sich auf $k_1$ projiciren. Wir werden beweisen, daß dann auch der zu $k_1$ in Bezug auf $G_1$, $g_1$ konjugirte Kegelschnitt $l_1$ sich auf $k$ projicirt.*

*Satz. Haben zwei Kegelschnitte auf einer gemeinschaftlichen Geraden $g$ ihrer getrennten oder zusammenfallenden Ebenen die Involution konjugirter Punkte gemein, so projiciren sie sich aus zwei Punkten auf einander, welche auf der Verbindungslinie $g'$ der Pole $G$, $G_1$ von $g$ zu je einem der Kegelschnitte liegen und durch diese harmonisch getrennt sind.*

---

scripte *Jacob Steiners* bearbeitet von Dr. *H. Schröter*, 1876, — und *Ruffini*, di alcuni teoremi riferibili alla polarità reciproca delle coniche, nella Mem. dell' Accad. d. Sc. di Bologna, Ser. III, T. VI, letta 16. Gen. 1876.) Dabei sei bemerkt, daß dem Ursprunge nach Steiners Arbeit vorausgeht, da derselbe schon 1863 gestorben ist. Herr *Retali* hat dann über die Beziehung der konjugirten Kegelschnitte als gegenseitige Imaginärprojektionen eine Veröffentlichung gemacht in einer Nota sulle coniche conjugate (Mem. d. Acc. d. Sc. di Bologna, Ser. 4, T. 6, letta 21. Dic. 1884). Es geschah dies zwar nach dem Erscheinen des I. Bandes dieses Werkes, aber die Note war schon vorher der Akademie übersendet worden (siehe Schlußbemerkung derselben), so daß Herr Retali unabhängig von dem Verfasser diesen Gedanken faßte. — Ich erlaube mir noch zuzufügen, daß meine ersten Aufzeichnungen über Imaginärprojektionen von Kegelschnitten und von Flächen zweiten Grades aus dem Jahre 1865 herrühren, daß ich aber die damalige zwar umfassendere, aber nicht so einfache Darstellung nicht reif für die Veröffentlichung hielt, den Grundgedanken jedoch in meinem Aufsatze über scheinbare Unstetigkeit geometrischer Construktionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird (Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys., 1867, B. 2, S. 388), benutzte. Erst bei Gelegenheit der Bearbeitung (1881) des Abschnittes über die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades kam ich auf die im ersten Bande gegebene Form.

*Dabei ist die Projektion eine gewöhnliche oder reelle,*

1a) *wenn beide Kegelschnitte $k$ und $k_1$ reell sind, und wenn ein Punkt der $g$ zugleich für $k$ und $k_1$ innerer oder äußerer Punkt ist; oder*

1b) *wenn beide Kegelschnitte $i$ und $i_1$ imaginär sind.*

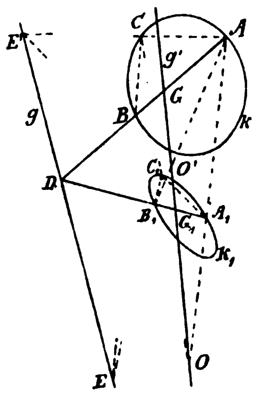
*Dagegen ist die Projektion eine imaginäre,*

2a) *wenn beide Kegelschnitte $k$ und $k_1$ reell sind, und wenn ein Punkt des $g$ innerer für $k$ und äußerer für $k_1$ ist; oder*

2a) *wenn der eine Kegelschnitt $k$ reell und der andere $i$ imaginär ist.*

*Bew.* 1a) Für diesen Fall wurde schon I, 386 der Beweis mittelbar durch Reciprocität geliefert; da er aber die Grundlage für die folgenden Fälle bildet, mag noch zur größeren Einsicht der unmittelbare Beweis gegeben werden. Nach I, 351, Zus., ist ein Kegelschnitt $k$ bestimmt durch die Involution der in Bezug auf $k$ kon- Fig. 36.
jugirten Punkte einer Geraden $g$, den Pol $G$ der $g$ zu $k$, und einen Punkt $A$ des $k$. Die $GA$ schneidet den $k$ noch in einem zweiten Punkte $B$, die $g$ in $D$, und es sind $A$ und $B$ harmonisch getrennt durch $G$ und $D$. Weil $GD$ den $k$ schneidet, muß von den zugeordneten Punkten $G$, $D$ der eine ein innerer, der andere ein äußerer des $k$ sein. Nun hat aber $D$ nach der Voraussetzung gegen $k$ und $k_1$ die übereinstimmende Lage, und ebenso $G$ und $G_1$, weil auf $g$ in Bezug auf $k$ und $k_1$ dieselbe Involution herrscht. Daher schneidet auch $DG_1$ den $k_1$, etwa in $A_1$ und $B_1$, und $k_1$ ist durch die Involution

Fig. 36.




$g$, durch $G_1$ und $A_1$ (oder $B_1$) bestimmt. Da in $k$ und $k_1$ die $g$ sich selbst, die Punkte $G$ und $A$ den Punkten $G_1$ und $A_1$ oder denen $G_1$ und $B_1$ entsprechen, so sind auf $GG_1$ die Schnittpunkte $O$, $O'$, bezw. mit $AA_1$, $AB_1$ die Projektionsmittelpunkte von $k$ und $k_1$. Es projiciren sich dann irgend zwei entsprechende Punkte $C$, $C_1$ von $k$, $k_1$ auf einander, d. i. solche, welche man aus zugeordneten Punkten $E$, $E'$ der Involution auf $g$ gewinnt, nämlich $C = E'A$, $EB$; $C_1 = E'A_1$, $EB_1$. $O$ und $O'$ sind aber durch $G$ und $G_1$ harmonisch getrennt, weil $OO'GG_1$ die Projektion aus $A$ von den vier harmonischen Punkten $A_1B_1DG_1$ ist. — Dieser Beweis ist unabhängig davon, ob $k$ und $k_1$ in verschiedenen oder in derselben Ebene liegen, und davon, ob die Doppelpunkte der Involution auf $g$ (durch welche Punkte $k$ und $k_1$ gehen) reell oder imaginär sind.

Liegt $g$ unendlich fern, so heißen die Kegelschnitte *ähnlich und ähnlich gelegen* (I, 387).

1b) Bildet man von den imaginären Kegelschnitten $i$, $i_1$ die ideellen Darstellungen $m$, $m_1$ in Bezug auf $g$, $G$ bezw. $g$, $G_1$, so haben $m$ mit $i$, $m_1$ mit $i_1$, und nach der Voraussetzung $i$ mit $i_1$, daher auch $m$ mit $m_1$ auf $g$ eine Involution konjugirter Punkte gemein; und da außerdem jeder Punkt von $g$ äußerer Punkt von $m$ und von $m_1$ ist (I, 405), so projiciren sich nach 1a) die $m$ und $m_1$, und daher auch die durch sie vollständig bestimmten $i$ und $i_1$, d. h. die Polarsysteme derselben, reell auf einander.

2a) Die reellen Kegelschnitte $k$, $k_1$ müssen sich auf $g$ in reellen Punkten schneiden, damit ein Punkt der $g$ innerer Punkt des einen und äußerer des anderen sein kann. Bildet man zu jedem von beiden den in Bezug auf $g$ konjugirten (reellen) Kegelschnitt $l$ bezw. $l_1$, so ist jener Punkt von $g$ zugleich für $k$ und $l_1$ innerer oder äußerer, und zugleich für $k_1$ und $l$ äußerer oder innerer Punkt (I, 402). Und da außerdem alle vier Kegelschnitte auf $g$ dieselbe Involution besitzen, so projiciren sich sowohl $k$ und $l_1$ als $k_1$ und $l$ auf einander, und zwar aus denselben Punkten $O$ und $O'$, weil, wenn sich zwei Kegelschnitte auf einander projiciren, sich auch zugleich die zu ihnen in Bezug auf entsprechende Gerade $(g, g)$ konjugirte auf einander projiciren. Wenn aber $k$ und $l_1$, sowie $k_1$ und $l$ reelle Projektionen von einander sind, so sind, zufolge des Begriffes, $k$ und $l$, sowie $k_1$ und $l_1$ imaginäre.

Ist $g$ unendlich fern, so mögen die Kegelschnitte *konjugirt ähnlich und ähnlich gelegen* genannt werden.

2b) Für den reellen Kegelschnitt $k$ und den imaginären $i$ ist $g$ eine imaginär schneidende Gerade. Der in Bezug auf $g$ zu $k$ konjugirte imaginäre Kegelschnitt $i'$ und der zu $i$ konjugirte reelle $k'$ schneiden daher die $g$ ebenfalls imaginär. Da außerdem alle vier Kegelschnitte auf $g$ dieselbe Involution besitzen, so sind $k$ und $k'$, sowie $i'$ und $i$ reelle, daher $k$ und $i$, sowie $i'$ und $k'$, imaginäre Projektionen von einander.

**86.** *Satz. Zwei Kegelschnitte einer Fläche zweiten Grades, mag einer derselben oder mögen beide reell oder imaginär sein, werden durch reelle oder imaginäre Projektion auf einander projicirt aus jedem von zwei Punkten, welche auf der Polaren der Schnittlinie der Ebenen der Kegelschnitte liegen und durch diese Ebenen harmonisch von einander getrennt sind.*

Denn (85) sie besitzen auf der Schnittlinie ihrer Ebenen eine gemeinschaftliche Involution konjugirter Punkte (76).

Es treten alle *vier Fälle* der vorigen Nr. ein. Bei einer Nichtregelfläche findet reelle Projektion statt für zwei reelle (85, 1a); 82, 3)), sowie für zwei imaginäre Schnitte (1b); imaginäre Projektion für einen reellen und einen imaginären Schnitt (2b). Bei einer Kegelfläche kann für die stets reellen Schnitte reelle (1a) und imaginäre (2a) Projektion stattfinden (82, 3)); erstere gilt z. B. bei dem einschaligen Umdrehungshyperboloide für zwei Parallelkreise, letztere für einen Parallelkreis und einen Meridian.

**87.** *Satz. Zwei Kegelschnitte $k_1$, $k_2$, welche sich in zwei (reellen oder imaginären) Punkten $A$, $B$ schneiden, und ein Punkt $F$ außerhalb derselben bestimmen eindeutig eine Fläche zweiten Grades* **F**, *welche durch $k_1$, $k_2$ und $F$ geht.*

Denn seien $Q_1$, $Q_2$ die Pole von $AB$ bezw. zu $k_1$, $k_2$, so schneide man die Ebene $Q_1Q_2F =$ **L** mit $k_1$ in den (reellen oder imaginären) Punkten $C_1$, $D_1$, und mit $k_2$ in $C_2$, $D_2$. Dann lege man durch $F$, $C_1$, $D_1$, $C_2$, $D_2$ den Kegelschnitt $l$, bestimme auf $AB$ den durch $A$ und $B$ von **L** harmonisch getrennten Punkt $L$, so ist derselbe der Pol von $C_1D_1$ zu $k_1$ und von $C_2D_2$ zu $k_2$. Die Fläche zweiten Grades **F**, welche nun durch den Leitkegelschnitt $l$, den Pol $L$ seiner Ebene und durch $A$ (sowie $B$) bestimmt ist, ist die gesuchte; denn sie enthält $k_1$, weil sie von ihm $C_1$, $D_1$, $A$, $B$ und die Tangenten $LC_1$, $LD_1$ enthält; ebenso $k_2$ und $F$.

**88.** Der Pol der unendlich fernen Ebene zu einer Fläche zweiten Grades **F** heißt deren *Mittelpunkt* und halbirt alle Sehnen der Fläche, welche durch ihn gehen (73, 1)); diese Sehnen werden Durchmesser genannt. Die Polarebene eines unendlich fernen Punktes heißt *Durchmesserebene* oder Diametralebene; sie geht durch den Mittelpunkt (76), halbirt alle nach dem unendlich fernen Punkte laufenden (parallelen) Sehnen und enthält die Berührungskurve des mit ihnen parallel der **F** umschriebenen Cylinders. — Die durch eine unendlich ferne Gerade $g'$, also unter einander *parallel gelegten Ebenen* schneiden die **F** *in ähnlichen oder konjugirt ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten* (85, 1a) und 2a)); sind die Kurven Ellipsen, so sind sie stets ähnlich, sind sie Hyperbeln, so sind sie ähnlich oder konjugirt ähnlich, je nachdem diese Kurven in den Winkelräumen der (parallelen) Asymptoten liegen, welche parallele Durchmesser enthalten oder nicht enthalten.

Die *Mittelpunkte* dieser parallelen Kegelschnitte liegen auf einem Durchmesser $g$, der Polaren der $g'$. Die Berührungspunkte der aus $g'$ an **F** gelegten Berührungsebenen liegen auf $g$. Die durch $g'$ gelegte *Durchmesserebene* ist dem *Durchmesser $g$ konjugirt* (76) und halbirt die zu $g$ parallelen Sehnen der Fläche.

Ist der Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades ein Eckpunkt eines Polartetraeders zu derselben, daher die unendlich ferne Ebene dessen Gegenfläche, so sind die drei Durchmesser der Fläche, welche Kanten des Polartetraeders bilden, *konjugirte Durchmesser*, die Ebenen je zweier derselben sind *konjugirte Durchmesserebenen*, und es ist von diesen zugleich eine jede dem nicht in ihr liegenden Durchmesser konjugirt (76). Jede Durchmesserebene halbirt die mit ihrem konjugirten Durchmesser parallelen Sehnen, und jeder Durchmesser enthält die Mittelpunkte der ähnlichen oder konjugirt ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte der F, deren Ebenen mit seiner konjugirten Durchmesserebene parallel sind.

Ein *Durchmesser* ist *reell* oder *imaginär*, je nachdem er die Fläche in reellen oder imaginären Punkten trifft. Im letzteren Falle bestimmen wir ihn durch die ideellen Doppelpunkte der auf ihm in Bezug auf F stattfindenden gleichlaufenden Involution und seine *ideelle Länge* als den Abstand dieser Punkte. Sind in einer Durchmesserebene (oder überhaupt in einer schneidenden Ebene) zwei konjugirte Durchmesser imaginär, so ist der *Kegelschnitt* dieser Ebene *imaginär*. Sind drei konjugirte Durchmesser der Fläche imaginär, so sind es auch die Kegelschnitte in den Ebenen je zweier und in jeder durch einen der Durchmesser gelegten Ebene. Die Fläche enthält daher im ganzen Raume keinen reellen Punkt und ist selbst *imaginär*, ein Fall, den wir später betrachten wollen.

*Durch drei konjugirte Durchmesser ist eine Fläche zweiten Grades bestimmt* und entsteht nach Nr. 79 z. B. derart, daß man den Kegelschnitt in der Ebene des ersten und zweiten Durchmessers als Leitlinie $p$ annimmt, so daß der unendlich ferne Punkt des dritten Durchmessers $P$ ist, und daß man die unendlich ferne Gerade der Ebene des dritten und zweiten Durchmessers als $g = PFF'$ (wobei $F, F'$ reell oder imaginär sein können) wählt; es werden dann die erzeugenden Kegelschnitte ähnlich oder konjugirt ähnlich und ähnlich gelegen.

**89.** *Satz und Aufg. Jede Fläche zweiten Grades* F *hat im allgemeinen drei auf einander senkrechte konjugirte Durchmesser, welche ihre Axen heißen. Im besonderen Falle kann sie deren auch unendlich viele besitzen, nämlich einen ausgezeichneten Durchmesser und jeden auf ihm senkrechten, oder auch jeden Durchmesser. Es sollen die Axen konstruirt werden.*

*Der Beweis und die Auflösung* werden auf diejenigen zu dem entsprechenden Satze und der Aufgabe über den Kegel zweiten Grades (23 ff.) zurückgeführt. Es geschieht dies mittelst des *Satzes, daß drei aus einem Punkte P gezogene, in Bezug auf eine Fläche*

*zweiten Grades* **F** *konjugirte Strahlen auch in Bezug auf den Kegel* **K** *konjugirt sind, welchen man aus P der* **F** *umschreiben kann.* Ist der Kegel und also auch seine Berührungskurve $p$ in der Polarebene **P** des $P$ *reell,* so gilt der Satz, weil durch irgend einen Punkt in **P** und seine Polare zu $p$ bezw. ein Strahl und eine Ebene aus $P$ gehen, welche in Bezug auf **F** und auf **K** konjugirt sind. Dann sind auch zwei durch $P$ gehende Strahlen in Bezug auf die eine Fläche konjugirt, wenn sie es in Bezug auf die andere sind. Wählt man nun den Mittelpunkt $M$ als Punkt $P$, so daß die unendlich ferne Ebene **M** die Polarebene **P** wird, so ist **K** reell, wenn die unendlich ferne Kurve der **F** reell ist, was bei den Regelflächen stets stattfindet. Dann sind die Axen des **K** auch die Axen der **F**.

Den Fall, daß **K** *imaginär* sei, erledigen wir durch Betrachtungen, welche auch für reelle Kegel gelten. Dabei geben wir dem $P$ sogleich die für uns wesentliche Lage in dem Mittelpunkte $M$; aus den Ergebnissen folgt dann durch räumliche Kollineation auch unser Satz für jeden Punkt $P$.

Sei **F** durch drei reelle oder ideelle konjugirte Halbdurchmesser $a$, $b$, $c$ gegeben, so ist durch diese in jeder Ebene je zweier eine Involution konjugirter Durchmesser bestimmt, vermittelst welcher zu jedem Durchmesser $g$ die konjugirte Durchmesserebene **G** leicht ermittelt wird. Zu dem Ende schneidet man die Ebene $ga$ mit derjenigen $bc$ in $a_1$, sucht in $bc$ den zu $a_1$ konjugirten Durchmesser $a_2$; derselbe ist in Bezug auf **F** zu der Ebene $ga$ konjugirt, liegt also in **G**. Bestimmt man ebenso $b_2$, $c_2$, so ist **G** $= a_2 b_2 c_2$. Da zwei der Strahlen $a_2$, $b_2$, $c_2$ zur Bestimmung von **G** hinreichen, so ergibt sich, daß das System der konjugirten Durchmesser und Durchmesserebenen von **F** durch zwei von den Involutionen $bc$, $ca$, $ab$ bestimmt ist. Nun kann man aber einen Kegel zweiten Grades angeben, welchem dieselben Involutionen konjugirter Durchmesser angehören. Legt man nämlich durch den Endpunkt des einen Halbdurchmessers, etwa des $c$, parallele und gleiche Strecken $a'$ und $b'$ bezw. mit $a$ und $b$ und betrachtet $a'$ und $b'$ als reellen oder ideellen Halbdurchmesser eines Kegelschnittes $k$, je nachdem bezw. $c$ und $a$, oder $c$ und $b$ ungleichartig (der eine reell und der andere ideell), oder gleichartig (beide reell oder beide ideell) sind, so besitzt der Kegel **K** $= Mk$ in den Ebenen $Maa'$, $Mbb'$ die gegebenen Strahleninvolutionen. Denn bei ungleichartigen $c$ und $a$ ist die Strahleninvolution $ca$ ungleichlaufend, besitzt reelle Doppelstrahlen, und diese sind reelle Erzeugende des Kegels, und ihre Schnittpunkte mit der Linie $a'$ sind die Endpunkte zweier Strecken $a'$, und sind reelle Scheitel von $k$. Bei gleichartigen $c$, $a$ sind die Doppelstrahlen

und die Scheitel ideell. Durch beide Strahleninvolutionen *ca*, *cb* ist aber zu jedem Durchmesser *g* die konjugirte Durchmesserebene (Polarebene) auf dieselbe Weise wie bei **F** bestimmt. Also sind die Axen von **K** auch solche von **F**.

Nun kann aber *k* reell oder imaginär sein; von diesem Umstande ist jedoch die Bestimmung der Kegelaxen ganz unabhängig, da sie nur durch Pol und Polare ausgeführt wird. (Wäre so in der Fig. 13 der *k*, welcher dort mit *c* bezeichnet ist, die ideelle Darstellung eines imaginären Kegelschnittes, so müßte nur die $GU_1$, als Polare von *U*, durch ihre in Bezug auf den dortigen Punkt *M* symmetrische Gerade ersetzt werden.)

Da nun **F** dieselben Axen wie **K** besitzt, so sind dies nach Nr. 22 im allgemeinen drei, im besonderen auch eine ausgezeichnete und die unendlich vielen darauf senkrechten; es gilt dies für Umdrehungsflächen, welche die erstere Axe zur Umdrehungsaxe haben. Dadurch, daß der Kegel **K** auch imaginär sein kann, tritt noch eine neue Möglichkeit ein, die bei reellem **K** nicht vorhanden ist. *a*, *b*, *c* bilden nämlich das gemeinschaftliche Polardreikant zu **K** und zu einem imaginären Hilfskegel *Mk*, bei welchem jedes Polardreikant rechtwinklig ist (23). Fällt nun **K** mit *Mk* zusammen, so ist jeder Durchmesser der **F** eine Axe und **F** eine *Kugel*.

Da **K** dasselbe Polarsystem *M* (Durchmesser und Durchmesserebene) wie **F** besitzt, so besitzt es auch dasselbe in der unendlich fernen Ebene **M**, oder der (reelle oder imaginäre) Kegel **K** projicirt die (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Kurve der **F**. So projicirt im letzten Falle der imaginäre Kegel (*Mk*) den (imaginären) *unendlich fernen Kugelkreis*. Die ideelle Darstellung des Kegels, welche die **M** in einer ideellen Darstellung des unendlich fernen Kugelkreises schneidet, ist ein Umdrehungskegel, dessen Mittelpunkt *M*, dessen Axe irgend ein Durchmesser der Kugel ist, und dessen Erzeugende 45° mit der Axe bilden.

Liegt *der Mittelpunkt M der* **F** *im Unendlichen*, so daß jede nach ihm laufende Gerade ein Durchmesser ist, so hat eine Axe *a* ebenfalls die Richtung nach *M*. Eine darauf senkrechte Ebene ist dann mit den beiden anderen Axen parallel; schneidet man sie mit der Fläche **F** in einem Kegelschnitte, bestimmt dessen Mittelpunkt *M'*, so ist *M'M* die Axe *a*, die Ebenen *ab*, *ac* gehen durch die Axen jenes Kegelschnittes, und *b* und *c* liegen dann im Unendlichen.

Die Ebenen je zweier Axen heißen die *Axen-* oder *Hauptebenen*, ihre Schnitte mit **F** die *Hauptschnitte*, die Endpunkte der Axen in **F** die *Scheitel* der **F**.

**90.** Zur *Erzeugung und Einteilung der Flächen zweiten Grades*

gehen wir von *drei gegebenen konjugirten Durchmessern* $2a$, $2b$, $2c$ aus (88, Ende), nehmen den Kegelschnitt $ab$ (oder $ac$) als *Leitlinie* $p$, den Kegelschnitt $bc$ als eine Lage der *Erzeugenden* $s$ an, die sich so bewegt, daß sie parallel, ähnlich oder konjugirt ähnlich und ähnlich gelegen zu ihrer Anfangslage $bc$ bleibt, daß ihr Mittelpunkt den Durchmesser $a$ und ein Punkt derselben den Kegelschnitt $ab$ (ein anderer den $ac$) beschreibt. — Wir wollen im folgenden als die drei konjugirten Durchmesser die *Axen* annehmen; die Erörterungen gelten aber auch für andere konjugirte Durchmesser, abgesehen von den der rechtwinkeligen Lage zukommenden Eigentümlichkeiten.

Je nach der Lage des Mittelpunktes $M$ im Endlichen oder im Unendlichen und nach der reellen oder imaginären Beschaffenheit der Axen ergeben sich *fünf Arten der reellen Flächen zweiten Grades*, wozu noch die *imaginäre Fläche* als sechste Art hinzukommt.

*A.* Der *Mittelpunkt* liegt *im Endlichen:*

1) die drei Axen sind reell: *das Ellipsoid;*
2) zwei Axen sind reell, eine ist imaginär: *das einschalige Hyperboloid;*
3) eine Axe ist reell, zwei sind imaginär: *das zweischalige Hyperboloid;*
4) die drei Axen sind imaginär: *die imaginäre Fläche zweiten Grades.*

*B.* Der *Mittelpunkt* liegt *im Unendlichen:*

5) die drei Axen sind reell, oder, was keinen Unterschied in der Fläche hervorbringt, eine Axe ist reell und zwei sind imaginär: *das elliptische Paraboloid;*
6) zwei Axen sind reell, eine ist imaginär: *das hyperbolische Paraboloid.*

Fig. 37.

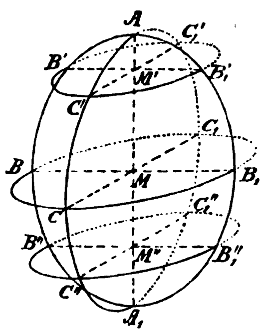


Fig. 37.

Wenn der Mittelpunkt im Unendlichen, also in seiner Polarebene liegt, ist er ein reeller Punkt der Fläche; also können dann nicht die Fläche und somit auch nicht die drei Axen imaginär sein.

**91.** 1) Das *Ellipsoid* besitzt drei reelle Axen und hat drei Ellipsen zu Hauptschnitten. Für die verschiedenen Lagen der Erzeugenden ist das Verhältnis

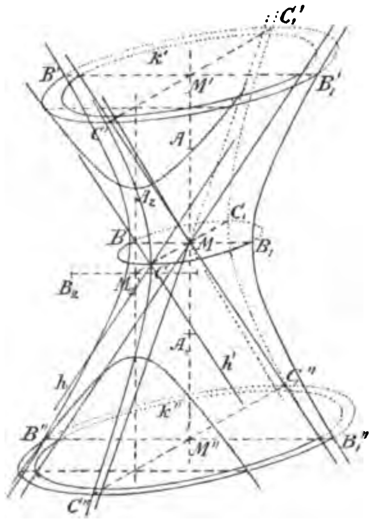
$$\frac{b}{c} = \frac{MB}{MC} = \frac{M'B'}{M'C'} = \frac{M''B''}{M''C''} \cdots$$

unveränderlich. — Ist $b = c$, so wird die Erzeugende ein Kreis und die Fläche ein *Umdrehungsellipsoid.* Dasselbe heißt *verlängert*, wenn $a > b$, *abgeplattet* oder ein *Sphäroid*,

wenn $a < b$. Für $a = b = c$ entsteht die *Kugel*, für $c = 0$ die *doppelte Ebene ab* (entsprechend für $b$ oder $a = 0$). Für $b = c = 0$ die *Gerade a*, für $a = b = c = 0$ der *Punkt*, für $c = \infty$ der *Cylinder*, für $b = c = \infty$ *zwei parallele Ebenen*, für $a = b = c = \infty$ die *doppelte unendlich ferne Ebene*.

Fig. 38. **92.** 2) Das *einschalige Hyperboloid* (einmantelige, einfache H.) besitzt zwei reelle Axen $2b$ und $2c$, und eine imaginäre, deren ideelle Darstellung $2a$ ist. Die Hauptschnitte $ab$ und $ac$ sind daher Hyperbeln, derjenige $bc$ und die damit parallelen Erzeugenden Ellipsen. Von den letzteren ist $bc$ die kleinste und heißt *Kehlellipse*; von ihr an wächst die Erzeugende nach beiden Seiten bis ins Unendliche. Weil die Fläche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Kegelschnitte trifft, so ist der aus dem Mittelpunkte $M$ ihr umschriebene, sie nach dieser Kurve berührende Kegel $Mk'k''$ reell; er heißt der *Asymptotenkegel*, weil er die Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln der Fläche enthält, deren Ebenen durch $M$ gehen, z. B. der durch $a$ gelegten. — Für $b = c$ entsteht das *einschalige Umdrehungshyperboloid*, für $c = 0$ die *doppelte Ebene ab*, für $b = c = 0$ die *Gerade a*, für $a = b = c = 0$ (bei ungeändertem Verhältnisse) der *Asymptotenkegel* der ursprünglichen Fläche, für $a = \infty$ der *elliptische Cylinder*, für $c = \infty$ der *hyperbolische Cylinder*, für $a = b = c = \infty$ die *doppelt unendlich ferne Ebene*, für $a = b = 0$ zwei sich in $c$ *schneidende Ebenen*.

Fig. 38.



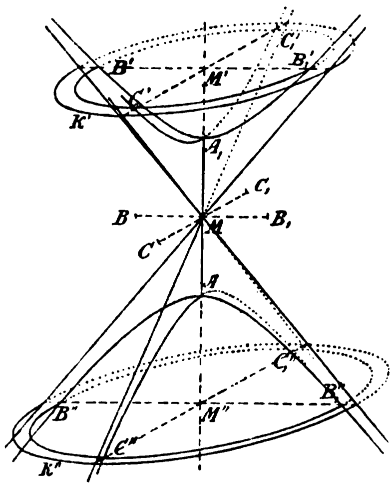

Man kann auch die Hyperbel $ab$ (oder $ac$) als Erzeugende und die Ellipse $bc$ oder die Hyperbel $ac$ (bezw. $ab$) als Leitlinie ansehen. Die hyperbolischen Erzeugenden $ab$ haben parallele Asymptoten; während ihr Mittelpunkt auf der endlichen Strecke $CC_1$ liegt, ist ihre reelle Axe mit $b$, ihre imaginäre mit $a$ parallel; während er auf der unendlichen Strecke $C \cdot C_1$ liegt, ist ihre reelle Axe mit $a$ und ihre imaginäre mit $b$ parallel. Eine der ersteren und eine der letzteren Art sind konjugirt ähnlich. Das Verhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{MA}{MB} = \frac{M_2A_2}{M_2B_2} \cdots$$

der reellen und ideellen Axe ist unveränderlich.

**93.** 3) Das *zweischalige Hyperboloid* (zweimantelige, zweifache Fig. 39.
H.) besitzt eine reelle Axe $2a$ und zwei imaginäre, deren ideelle Darstellungen $2b$, $2c$ sind. Die Hauptschnitte $ab$ und $ac$ sind daher Hyperbeln, derjenige $bc$ eine imaginäre Ellipse und die damit parallelen Erzeugenden für die endliche Strecke $AA_1$ sind imaginäre, für die unendliche $A.A_1$ reelle Ellipsen. Der aus $M$ der Fläche umschriebene, sie im Unendlichen berührende Kegel $Mk'k''$ heißt wieder der *Asymptotenkegel*. — Für $b = c$ entsteht das *zweischalige Umdrehungshyperboloid*, für $c = 0$ die *doppelte Ebene* $ab$, für $b = c = 0$ die *Gerade* $a$, für $a = b = c = 0$ (bei ungeändertem Verhältnisse) der *Asymptotenkegel*, für $c = \infty$ der *hyperbolische Cylinder*, für $b = c = \infty$ zwei *parallele Ebenen*, für $a = b = 0$ zwei sich in $c$ *schneidende Ebenen*. — Man kann auch die Hyperbel $ab$ als Erzeugende und die imaginäre Ellipse $bc$ oder die Hyperbel $ac$ als Leitlinie ansehen.

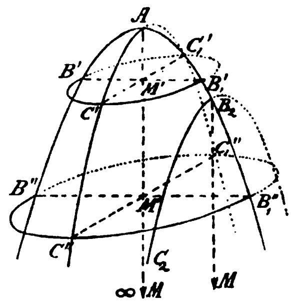
Fig. 39.



4) *Die imaginäre Fläche* soll erst später untersucht werden.

**94.** 5) Das *elliptische Paraboloid* besitzt einen unendlich fernen Fig. 40.
Mittelpunkt $M$, eine reelle Axe $MA$, deren Scheitel $A$ im Endlichen liegt, und zwei unendlich ferne Axen $2b$ und $2c$, welche beide als reell oder beide als imaginär anzusehen sind. Die Hauptschnitte $ab$ und $bc$ sind daher Parabeln, welche sich von $A$ aus in demselben Sinne ins Unendliche erstrecken müssen, weil eine mit $bc$ parallele Ebene die Fläche in einer mit der reellen oder imaginären Ellipse $bc$ ähnlichen oder konjugirt ähnlichen Ellipse schneidet, so daß sie jene beiden Parabeln entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten, den Scheiteln der Ellipse, schneidet. — Für $b = c$ entsteht das *Umdrehungsparaboloid*, für $M'C' = 0$ die *doppelte Ebene* $ab$, für $M'B' = M'C' = 0$ die *Gerade* $a$, für $M'C' = \infty$ der *parabolische Cylinder*

Fig. 40.

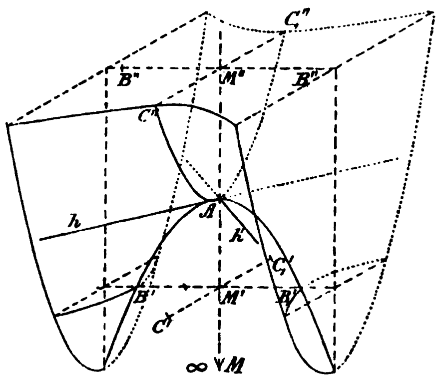


für $M'B' = M'C' = \infty$ die auf $a$ senkrechte durch $A$ gehende *Ebene*, verbunden mit der unendlich fernen Ebene.

Alle durch $a$ gelegten Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln, welche $a$ zur Axe haben und sich in übereinstimmendem Sinne von $A$ aus erstrecken; und eine durch $a$ und eine mit ihr parallel gelegte Ebene schneiden die Fläche in *kongruenten Parabeln.* Denn der Punkt, aus welchem sich beide Parabeln auf einander projiciren (86), ist unendlich ferne, da er in der Polare der Schnittlinie ihrer Ebenen liegt, diese Linie aber und folglich auch ihre Polare eine unendlich ferne Tangente der Fläche ist (77, 3)). Daher kann man auch die *Parabel ac* als *Erzeugende* ansehen, welche parallel und kongruent mit ihrer Anfangsgestalt sich so bewegt, daß ihr Scheitel die Parabel $ab$ beschreibt; $B_2 C_2$ ist eine Lage derselben.

Fig. 41. **95.** 6) *Das hyperbolische Paraboloid* besitzt einen unendlich fernen Mittelpunkt $M$, eine reelle Axe $MA$, deren Scheitel $A$ im Endlichen liegt, während von den beiden anderen im Unendlichen liegenden Axen $2b$ und $2c$ die eine reell, die andere imaginär ist. Der unendlich ferne Hauptschnitt $bc$ ist daher eine Hyperbel, während diejenigen $ab$ und $ac$ Parabeln sind, welche sich von $A$ aus in entgegengesetztem Sinne ins Unendliche erstrecken, indem die eine derselben von einer zu $bc$ parallelen und ähnlichen erzeugenden Hyperbel in deren reellen, die andere in deren imaginären Scheiteln getroffen wird. So besitzt die erzeugende Hyperbel $M'B'B_1'$ auf der Parabel $ab$ ihre reellen Scheitel $B'$, $B_1'$, und auf der Parabel $ac$ ihre imaginären Scheitel, von welchen $C'$, $C_1'$ die ideellen Darstellungen sind. Entfernt sich ihr Mittelpunkt $M'$ von $A$, so wachsen ihre Axen bis zu jeder beliebigen Größe; bei der Annäherung gegen $A$ werden sie in $A$ Null, die Hyperbel wird zu zwei Geraden $h$ und $h'$, und bei Überschreitung von $A$ liegen ihre reellen Scheitel $C''$, $C_1''$ auf der Parabel $ac$, ihre imaginären (ideell dargestellt durch $B''$, $B_1''$) auf der $ab$. Da die erzeugenden Hyberbeln unter einander ähnlich oder konjugirt ähnlich sind, so gilt: $M'B' : M'C' = M''B'' : M''C''$. Die ideellen Punkte $B''B_1''$ bilden eine mit der Parabel $ab$ kongruente und in Bezug auf $A$ symme-

Fig. 41.



trische Kurve, als konjugirt zu $ab$ in Bezug auf den unendlich fernen Punkt von $B'B_1'$ und $B''B_1''$ (I, 402). Ebenso bilden die Punkte $C'$, $C_1'$ eine zur Parabel $ac$ kongruente und in Bezug auf $A$ symmetrische Kurve.

Auch dieses Paraboloid wird von der unendlich fernen Ebene, welche die unendlich fernen Tangenten der Parabeln $ab$ und $ac$ enthält, in dem unendlich fernen Punkte von $a$ berührt, welcher ihr Pol und der Mittelpunkt $M$ der Fläche ist.

Diese Fläche kann von einer Ebene E nie in einer Ellipse (oder einem Kreise) geschnitten werden, da die unendlich ferne Gerade der E die unendlich ferne Hyperbel der Fläche stets in zwei getrennten oder zusammenfallenden reellen Punkten trifft. Denn diese unendlich ferne Gerade und die Hyperbel projiciren sich aus $A$ bezw. durch eine zu E parallele Ebene und durch zwei Ebenen $ah$ und $ah'$ (weil $a$ die Projicirende der unendlich fernen Punkte der Parabeln $ab$ und $ac$ ist), und die erstere Ebene schneidet die beiden letzteren in zwei reellen durch $A$ gehenden Geraden, welche die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve projiciren. Man muß daher die unendlich ferne Hyperbel der Fläche als aus zwei Geraden gebildet ansehen, denjenigen der Ebenen $ah$ und $ah'$, welche Gerade sich in dem unendlich fernen Punkte der $a$ und der F schneiden. Für $b = c$ werden die beiden Hauptschnitte $ab$ und $ac$ kongruent; zu einer Umdrehungsfläche kann die Fläche nicht werden, da keine Kreise auf ihr möglich sind; für $M'C' = 0$ entsteht die *doppelte Ebene* $ab$, für $M'B' = M'C' = 0$ die *beiden Ebenen* $ah$ und $ah'$, für $M'C' = \infty$ der *parabolische Cylinder*, für $M'B' = M'C' = \infty$ die auf $a$ senkrechte durch $A$ gehende *Ebene*, verbunden mit der unendlich fernen Ebene.

Eine durch $a$ gelegte und eine damit parallele Ebene schneiden, ebenso wie beim elliptischen Paraboloide, die Fläche in *kongruenten Parabeln*. Daher kann man wieder die Parabel $ab$ (oder $ac$) als Erzeugende ansehen, nur daß sie sich mit der Leitparabel $ac$ (oder $ab$), im Unterschiede gegen die vorige Fläche, in entgegengesetztem Sinne erstreckt.

## II. Konjugirte Flächen zweiten Grades und die Imaginärprojektion im Raume.

**96.** In I, 400 ff. nannten wir *die ideellen Schnittpunkte einer Geraden $g$ mit einem Kegelschnitt $k$* in Bezug auf einen Punkt $P$ der $g$ und dessen Polare $p$ zu $k$ diejenigen beiden Punkte der $g$, welche in Bezug auf $k$ zu einander konjugirt und durch $P$ und $p$

harmonisch getrennt sind. Die auf allen aus $P$ gezogenen Strahlen aufgetragenen ideellen Schnittpunkte mit $k$ bilden den zu $k$ in Bezug auf $P$ konjugirten Kegelschnitt $l$, und die reciproke Beziehung von $k$ und $l$ ergibt (I, 401), daß die reellen Schnittpunkte $g$, $k$ die ideellen Darstellungen der Schnittpunkte $g$, $l$, d. i. auch die ideellen Darstellungen der imaginär gewordenen ideellen Schnittpunkte $g, k$ sind. Dieser Begriff überträgt sich auf die Schnittpunkte einer Geraden $g$ mit einer Fläche zweiten Grades **F**, indem dieselben auch die Schnittpunkte der $g$ mit jedem Kegelschnitte der **F** sind, dessen Ebene durch $g$ geht. In weiterer Anwendung des Begriffes der konjugirten Kegelschnitte und der Imaginärprojektion können wir sagen:

*Begriff und Satz. Zu einer Fläche zweiten Grades* **F** *nennen wir diejenige Fläche* **H** *in Bezug auf einen Punkt P und dessen Polarebene* **P** *zu* **F** *konjugirt, welche der geometrische Ort der ideellen Schnittpunkte der* **F** *mit den aus P gezogenen Strahlen in Bezug auf P und* **P** *ist.*

*Die* **P** *schneidet die* **F** *und die* **H** *in demselben reellen oder imaginären Kegelschnitte p. Ist p reell, so ist die konjugirte Fläche* **H** *eine reelle Fläche zweiten Grades, welche P und* **P** *zu Pol und Polarebene besitzt, und die* **F** *entlang p berührt. Die konjugirte Fläche der* **H** *in Bezug auf P ist wieder* **F**. *P und* **P** *heißen der Mittelpunkt und die Ebene der Konjunktion.*

Jede durch $P$ gelegte Ebene **E** schneidet die **F** und **H** in zwei Kegelschnitten, die in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Pol und Polare $P$ und **PE** zu einander konjugirt sind. Daher ist auf jeder Geraden **PE** die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf diese beiden Kegelschnitte dieselbe (I, 406). Die reellen oder imaginären Doppelpunkte jeder solchen Involution sind aber die gemeinsamen Punkte jener Kurven (in **E**) mit **P**, alle zusammen bilden die Schnittlinie von **P** zugleich mit **F** und **H**. Daher schneidet **P** die **F** und die **H** in derselben reellen oder imaginären Kurve $p$, welche für **F** (83), daher auch für **H** ein Kegelschnitt ist. Für den Fall, daß $p$ reell, lege man durch $P$ eine Gerade $g$, welche durch einen *inneren* Punkt des $p$ geht und die **F** in den Punkten schneidet, welche reell oder ideell durch $F, F'$ dargestellt sind; dann schneidet jede durch $g$ gelegte Ebene **E** die **F** in einem reellen Kegelschnitte, welcher durch die reellen Schnittpunkte der **E** mit dem $p$ und durch $F, F'$ geht. Andererseits schneidet sie die **H** in dem zu diesem Kegelschnitte in Bezug auf $P$ konjugirten Kegelschnitte, welcher durch dieselben Punkte **E** $p$, dagegen durch die Punkte der Geraden $g$ geht, welche bezw. ideell oder reell durch $F$, $F'$ dargestellt sind. Die Fläche **H**, welche durch diese Kurve erzeugt wird, ist vom zweiten Grade (81)

und berührt die **F** entlang $p$, da jene beiderlei erzeugenden Kurven zwei Punkte der $p$ und in denselben die nach $P$ laufenden Tangenten gemein haben. Indem aber die beiden Kurven gegenseitig konjugirt sind, ist auch **F** zu **H** konjugirt.

Zugleich ergibt sich: *Die Schnittlinien zweier in Bezug auf P und* **P** *konjugirten Flächen zweiten Grades mit einer durch P gelegten Ebene* **E** *sind Kegelschnitte, die in Bezug auf P und* **PE** *zu einander konjugirt sind.*

**97.** *Zwei in Bezug auf den Punkt P und die Ebene* **P** *konjugirte Flächen zweiten Grades* **F** *und* **H** *sind gegenseitig Imaginärprojektionen mit P und* **P** *als Mittelpunkt und Ebene der Kollineation* (I, 554) *und mit der Charakteristik* $\delta = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, weil dies für jeden aus $P$ gezogenen Strahl gilt (I, 403). Jede reelle Projektion von **H** mit $P$ und **P** als Mittelpunkt und Ebene der Kollineation mit der reellen Charakteristik $a$ ist ebenfalls eine Imaginärprojektion von **F** in Bezug auf $P$ und **P** mit der Charakteristik $\delta = \pm ai$ (I, 403).

**98.** *Von zwei konjugirten reellen Flächen zweiten Grades ist stets die eine geradlinig, die andere nicht geradlinig.* Denn ein aus dem Konjunktionsmittelpunkte $P$ nach einem inneren Punkte des $p$ gezogener Strahl schneidet die eine der Flächen in imaginären, die andere in reellen Punkten, daher ist die erstere Fläche geradlinig, die zweite nicht geradlinig (81).

**99.** *Die zu einer Fläche zweiten Grades* **F** *in Bezug auf einen Punkt P konjugirte Fläche ist imaginär, wenn* **F** *nicht geradlinig und P ein innerer Punkt derselben ist; in jedem anderen Falle ist sie reell.* Denn nur im ersteren Falle schneidet jeder Strahl aus $P$ die **F** in reellen (82, 3)), daher die **H** in imaginären Punkten (96).

*Jede durch P gehende Ebene* **E** *schneidet die imaginäre Fläche* **H** *in demjenigen imaginären Kegelschnitte, welcher zu dem reellen Kegelschnitte* **EF** *in Bezug auf P und* **EP** *konjugirt ist.* Derselbe ist bestimmt durch die der **F** und der **H** gemeinsamen (imaginären) Punkte auf **EP**, durch den Pol $P$ zu dieser Linie, und durch den einen der beiden konjugirt imaginären Punkte der **H** auf irgend einem Strahle $g$ aus **P**, von welchen Punkten sie dann auch den anderen enthält. Läßt man die **E** sich um $g$ drehen, so erzeugen jene imaginären Punkte auf **EP** den imaginären Kegelschnitt $p =$ **PF**, und der imaginäre Kegelschnitt der Ebene **E** erzeugt *die imaginäre Fläche, welche demnach auf dieselbe Art, wie eine reelle Fläche zweiten Grades entsteht* (96). Es soll alsbald nachgewiesen werden, daß auch jede nicht durch $P$ gehende Ebene die Fläche **H** in einem imaginären Kegelschnitte trifft, daß also auch die **H** vom zweiten Grade ist.

**100.** *Satz. Ist* H *die (reelle oder imaginäre) zu einer reellen Fläche zweiten Grades* F *in Bezug auf einen Punkt P und eine Ebene* P *konjugirte Fläche, ist p der Kegelschnitt, den* P *mit* F *und* H *gemein hat, und zieht man aus einem beliebigen Punkte Q Strahlen, so ist der Ort des auf jedem dieser Strahlen zu Q in Bezug auf* H *konjugirten Punktes eine Ebene, die Polarebene* Q *von Q zu* H, *und sie enthält die Polare von Q zu der Schnittkurve jeder durch PQ gelegten Ebene mit* H. *Die* Q *schneidet die Polarebene* Q′ *von Q zu* F *in einer Geraden der* P, *der Polare des Punktes (PQ,* P*) zu p, und wird von ihr durch P und* P *harmonisch getrennt. Liegt Q in* P, *so gehen beide Polarebenen* Q *und* Q′ *durch P und fallen zusammen.* Denn jene zu $Q$ konjugirten Punkte auf Strahlen, die in einer durch $PQ$ gehenden Ebene E liegen, bilden die gerade Polare von $Q$ zu dem Kegelschnitte EH. Diese Polare und diejenige von $Q$ zum Kegelschnitte EF treffen sich aber in einem Punkte der EP und sind durch $P$ und EP harmonisch getrennt (I, 406, 1), auch für einen reellen Kegelschnitt $i$ giltig). Da aber diese Polaren zu EF in allen Ebenen E die Polarebene Q′ von $Q$ zu F bilden, so gehen alle jene Polaren zu EH durch die gerade Schnittlinie der P mit der Q′, welche Schnittlinie die Polare des Punktes ($PQ$, P) zu $p$ ist, und bilden diejenige Ebene Q, welche von Q′ durch $P$ und P harmonisch getrennt wird.

Durch diesen Satz übertragen sich alle *Polareigenschaften* einer reellen Fläche zweiten Grades F auf eine zu derselben in Bezug auf $P$ und P *konjugirte Fläche* H, wenn dieselbe auch *imaginär* ist. Insbesondere:

1) Zu einer zu F konjugirten Fläche H hat eine Ebene Q nur einen Pol $Q$, von welchem Q die Polarebene ist; denn hätte sie deren zwei, so müßten diese Punkte auch zu der reellen Fläche F ein und dieselbe Polarebene haben, nämlich die von Q durch $P$ und P harmonisch getrennte, was unmöglich (75).

2) Die Polarebene R eines Punktes $R$ der Ebene Q zu H geht durch den Pol $Q$ der Q; denn $R$ und $Q$ sind konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt der H in der Ebene $PQR$.

3) Die Pole $Q$ und $Q'$ einer Ebene Q bezw. zu H und F liegen auf einer Geraden mit $P$ und sind durch $P$ und P harmonisch getrennt. Denn $Q$ und $Q'$ können bezw. als die Schnittpunkte der Polarebenen dreier Punkte von Q bestimmt werden; die drei zu F gehörigen schneiden sich in $Q'$, daher müssen die drei zu H gehörigen durch den Punkt $Q$ der Geraden $PQ'$ gehen, welcher von $Q'$ durch $P$ und P harmonisch getrennt ist. — Geht Q durch $P$, so fallen $Q$ und $Q'$ in P zusammen.

4) Die Polaren $g'$ und $g_1$ einer Geraden $g$ bezw. zu **H** und **F** liegen in einer Ebene mit $P$, schneiden sich auf **P** und sind durch $P$ und **P** harmonisch getrennt. Liegt $g$ in **P** oder geht durch $P$, so fallen $g'$ und $g_1$ zusammen und gehen bezw. durch $P$ oder liegen in **P**.

5) Die Büschel $g'$ und $g_1$ der Polarebenen der Punkte einer Geraden $g$ bezw. zu **H** und **F** sind projektiv mit dieser Punktreihe und zu einander perspektiv mit $P$ und **P** als Mittelpunkt und Ebene der Kollineation.

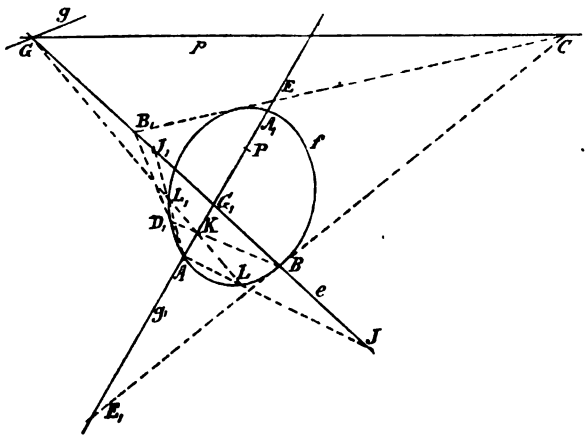
**101.** *Ist* **F** *eine reelle Fläche zweiten Grades und* **H** *ihre in Bezug auf $P$ und* **P** *konjugirte Fläche, und schneidet ein durch $P$ gezogener Strahl die* **F** *in den reellen Punkten $Q$ und $Q'$, so ist die Polarebene von $Q$ zu* **H** *die Berührungsebene der* **F** *in $Q'$.* Denn die Polarebene **Q** zu **F** ist die Berührungsebene der **F** in $Q$. Die Berührungsebenen der **F** in $Q$ und in $Q'$ schneiden sich aber in einer Geraden der **P** (73, 5)) und sind durch $P$ und **P** harmonisch getrennt, weil $Q$ und $Q'$ es sind; folglich ist die Berührungsebene der **F** in $Q'$ die Polarebene von $Q$ zu **H** (100).

**102.** *Satz und Aufg. Eine zu einer reellen Fläche zweiten Grades* **F** *in Bezug auf einen Punkt $P$ und eine Ebene* **P** *konjugirte imaginäre Fläche wird von jeder Ebene* **E** *in einem imaginären Kegelschnitte getroffen und ist deswegen ebenfalls eine Fläche vom zweiten Grade. Es soll von einer solchen imaginären Schnittkurve eine ideelle Darstellung bestimmt werden.*

*Bew. und Aufl.* **F** muß eine nicht geradlinige Fläche und $P$ ein innerer Punkt derselben sein (99). Von der Schnittlinie **PE** $= g$ geht die gemeinschaftliche Polare $g_1$ zu **F** und zu **H** durch $P$ (100, 4)); Fig. 42. eine durch $g_1$ beliebig gelegte Ebene **Q** treffe die **F**, **H**, **P**, **E**, $g$ bezw. in dem reellen Kegelschnitte $f$, dem imaginären Kegelschnitte $h$, den Geraden $p$, $e$ und dem Punkte $G$, wobei $P$ und $G$ bezw. die Pole von $p$ und $g_1$ zu $f$ und zu $h$ sind (100, 2)). Die imaginäre Schnittkurve **EH** $= i$ wollen wir durch eine ideelle Kurve in Bezug auf $G_1$ $(= eg_1)$, $g$ darstellen, indem wir auf jedem in **E** durch $G_1$ gezogenen Strahle, so auf dem Strahle **EQ** $= e$ die in Bezug auf **H** und dann auch auf $h$ konjugirten (100) und durch $G_1$ und $g$ harmonisch getrennten Punkte $J$, $J_1$ bestimmen und nachweisen, daß dieselben einen Kegelschnitt bilden, wodurch $i$ als der zu ihm in Bezug auf $G_1$, $g$ konjugirte imaginäre Kegelschnitt nachgewiesen ist. Sei $E_1$ der Pol von **E** zu **F**, welcher auf $g_1$ liegen muß, da **E** durch $g$ geht, der also auch der Pol von $e$ zu $f$ ist, so ist $E$ der Pol von **E** zu **H**, wenn $E_1$ und $E$ durch $P$ und **P** (oder $p$) harmonisch getrennt sind. Man erhält nun auf $e$ außer $G$, $G_1$ noch ein Paar in Bezug auf **H** und $h$

konjugirte Punkte $B$, $B_1$, wenn man von $B$ die Polare $E_1 C$ zu $f$ zieht und sie mit $p$ in $C$ schneidet; dann ist $EC$ die Polare von $B$ zu $h$ und bestimmt $B_1$ auf $e$. Wählt man, wie in der Figur, $B$ als einen Schnittpunkt von $e$ mit $f$, so sind die Polaren von $B$ zu $f$ und $h$ die Tangenten an $f$ bezw. in $B$ und die zweite aus $C$ gezogene (I, 408), so daß man die Punkte $E_1$ und $E$ entbehren kann. Um nun in der Involution $G, G_1$; $B, B_1$ die ideellen Doppelpunkte in Bezug auf $G, G_1$, d. h. die durch $G, G_1$ harmonisch getrennten zugeordneten Punkte zu finden, projicire man $G, G_1$; $B, B_1$ aus einem der Schnittpunkte $A, A_1$ von $g_1$ mit $f$, etwa aus $A$, auf $f$ in die Punkte $A, A_1$; $B, D_1$, bestimme den Mittelpunkt $K$ dieser Involution als Schnittpunkt von $AA_1$ mit $BD_1$ (im Inneren von $f$), ziehe die $GK$, schneide sie mit $f$ in $L$ und $L_1$, so liefern $AL$ und $AL_1$ auf $e$ die gesuchten

Fig. 42.




Punkte $J$ und $J_1$; denn sie bilden ein Paar der Involution, weil $LL_1$ durch $K$ geht, und sie sind durch $G, G_1$ harmonisch getrennt, weil $L, L_1$ durch $G, K$ harmonisch getrennt sind. — Läßt man nun die Ebene **Q** sich um $g_1$ drehen, so geht $f$ in eine andere Kurve $f'$ der **F** über, und es projiciren sich aus einem Punkte der $g$ auf einander die Kegelschnitte $f$ und $f'$ (85), ebenso $G$ und ein ihm entsprechender Punkt $G'$ der $g$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$, $B_1$ und $B_1'$, $D_1$ und $D_1'$, daher auch $BD_1$ und $B'D_1'$, so daß diese Linien sich in dem Punkte $K$ der Kollineationsaxe schneiden müssen. Daher bilden die Geraden $GK, G'K$ die Ebene $gK$, die Punkte $L, L_1$; $L', L_1'$ den (reellen) Kegelschnitt, in welchem die Ebene $gK$ die **F** trifft, und die Punkte $J, J_1$; $J', J_1'$ die Projektion dieses Kegelschnittes aus $A$ auf **E**, also wieder einen Kegelschnitt, w. z. b. w.

**103.** Indem wir den Begriff der *Reciprocität* (I, 285, 353 f.) auf

den Raum anwenden, und dabei eine Fläche zweiten Grades **F** als *Direktrix der Reciprocität* annehmen, erhalten wir als *reciproke Gebilde* zu einem Punkte seine Polarebene zu **F**; zu einer Ebene ihren Pol; zu einer Geraden ihre Polare; zu einer geraden Punktreihe $g$ das damit projektive Ebenenbüschel mit der Polaren $g'$ von $g$ als Axe; zu einer Fläche von Punkten von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung (welche von einer Geraden in $n$ Punkten geschnitten wird) eine Fläche von Ebenen von der $n^{\text{ten}}$ Klasse (von deren Ebenen $n$ durch eine Gerade gehen), nämlich die einhüllende Fläche der Polarebenen jener Punkte; zu einer Kurve von Tangenten (abwickelbaren Fläche) eine Kurve, welche von den Polaren jener Tangenten berührt wird (abwickelbare Fläche); zu einer Kurve von Punkten von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung (welche von einer Ebene in $n$ Punkten geschnitten wird) eine Kurve von Ebenen von der $n^{\text{ten}}$ Klasse (von deren Ebenen $n$ durch einen Punkt gehen); die Ebenen sind die Polarebenen der Punkte der ersten und die Schmiegungsebenen der zweiten Kurve; den Tangenten der ersten Kurve und ihrer abwickelbaren Fläche entsprechen die Schnittlinien je zweier benachbarten Schmiegungsebenen, d. i. die Tangenten der zweiten Kurve und ihre abwickelbare Fläche.

Eine Fläche **H** nennt man *reciprok zu sich selbst*, wenn von jedem ihrer Punkte die Polarebene zur Direktrix **F** Berührungsebene der **H** ist. Um diesen Begriff auch auf den Fall einer imaginären Fläche zweiten Grades anwendbar zu machen, geben wir ihm eine allgemeinere Form.

*Begriff. Eine Fläche zweiten Grades* **H** *ist reciprok zu sich selbst in Bezug auf die Direktrixfläche* **F**, *wenn von einem Punkte $R$ und seiner Polarebene* **R** *zu* **H** *bezw. die reciproke Ebene* **R**$'$ *und der reciproke Punkt $R'$ (Polarebene und Pol von $R$ und* **R** *zu* **F**) *wieder gegenseitig Polarebene und Pol zu* **H** *sind.* Es gilt dann der

*Satz: Sind* **F** *und* **H** *zwei in Bezug auf den Punkt $P$ und die Ebene* **P** *konjugirte Flächen zweiten Grades, von denen eine imaginär sein mag oder nicht, so ist jede derselben die reciproke Fläche von sich selbst in Bezug auf die andere Fläche.*

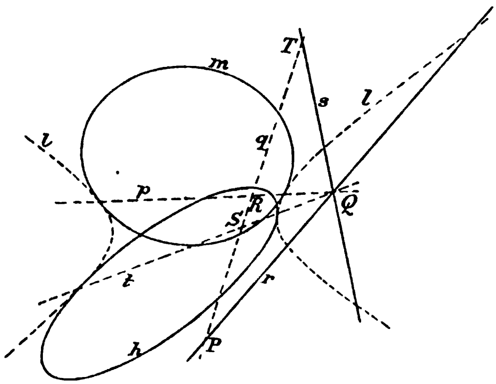
Denn sind der Punkt $Q$ und die Ebene **Q** Pol und Polarebene zu **F**, sind $Q'$ und **Q**$'$ durch $P$ und **P** harmonisch getrennt bezw. von $Q$ und **Q**, wobei die Verbindungslinie $QQ'$ durch $P$ geht und die Schnittlinie **QQ**$'$ in **P** liegt, so sind auch $Q'$ und **Q**$'$ Pol und Polarebene zu **F**, weil **F** mit sich selbst perspektiv-kollinear ist in Bezug auf $P$ und **P**, wobei die entsprechenden Elemente durch $P$ und **P** harmonisch getrennt sind (73, Zus.). Da nun $Q$ und **Q**$'$ und ebenso $Q'$ und **Q** Pol und Polarebene zu **H** sind (100), so ist jede

der beiden Flächen (H) reciprok mit sich selbst in Bezug auf die andere Fläche (F).

**104.** *Satz u. Aufg. Ist ein imaginärer Kegelschnitt i als konjugirte Kurve zu einem reellen Kegelschnitte m in Bezug auf einen (inneren) Punkt R desselben gegeben, so ist die ideelle Darstellung des i in Bezug auf einen beliebigen Punkt S seiner Ebene ebenfalls ein Kegelschnitt; derselbe soll bestimmt werden*).*

Fig. 43. *Bew. u. Aufl.* Wäre $S$ ein Punkt $Q$ der Polaren $r$ von $R$ zu $m$ und zu $i$, so wäre die ideelle Darstellung von $i$ in Bezug auf $Q$ der Kegelschnitt $l$, welcher zu $m$ in Bezug auf $RQ = p$ (und dessen Pol $P$ zu $m$) konjugirt ist (I, 407). Liegt aber $S$ nicht auf $r$, so ziehe man die Gerade $SR$, schneide sie mit $r$ in $P$, dann ist der in Bezug auf $P$ und $p$ zu $m$ konjugirte Kegelschnitt $l$ die ideelle Darstellung des $i$ in Bezug auf $RS = q$ und dessen Pol $Q$. Nun liegt aber $S$ auf der Polaren $q$ von $Q$ zu $l$ und zu $i$ (und zu $m$); daher ist der zu $l$ in Bezug auf $QS = t$ und deren Pol $T$ (auf $q$) konjugirte Kegelschnitt $h$ die verlangte ideelle Darstellung des $i$ in Bezug auf $S$ und seine Polare $QT = s$ zu $i$.

Fig. 43.




**105.** *Satz u. Aufg. Die ideelle Darstellung eines imaginären Kegelschnittes i in Bezug auf einen Punkt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem dieser Punkt innerhalb, auf oder außerhalb der Mittelpunktsellipse m von i liegt* (84)**). *Sind P und Q zwei in Bezug auf i konjugirte Punkte eines Durchmessers von i (und m), so*

---

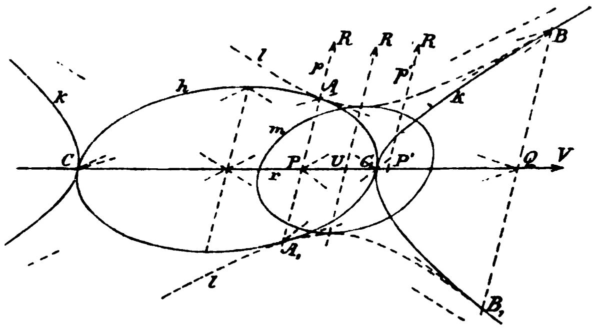
*) In B. I, Nr. 408 wurde eine Konstruktion dieser Kurve angegeben und dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß sie ein Kegelschnitt sei. Es soll eine andere Konstruktion gegeben werden, welche den Beweis einschließt.

**) Herr Prof. *Retali* hatte die Freundlichkeit, mir in einem Schreiben vom 18. März 1885 diesen Satz mitzuteilen, und ich erkenne ihm gerne die Priorität in Bezug auf denselben zu. Ich stieß später auf den Satz bei Gelegenheit der Auflösung der obigen Aufgabe, welche denselben einschließt. Herr Retali teilte mir noch andere interessante Sätze mit, insbesondere solche über die Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes, in Bezug auf welche der konjugirte Kegelschnitt ein Kreis ist.

*sind die ideellen Darstellungen h und k von i in Bezug auf P bezw. Q zu einander konjugirt in Bezug auf PQ. — Es sollen diese Kegelschnitte konstruirt werden.*

*Bew. u. Aufl.* Sei $U$ der Mittelpunkt von $i$ und $m$ und sei auf der Durchmesserlinie $UQ$ oder $r$ der Punkt $Q$ ein äußerer von $m$, $P'$ sein konjugirter in Bezug auf $m$, so ist sein konjugirter $P$ in Bezug auf $i$ von $P'$ harmonisch getrennt durch $U$ und dessen Polare $u$ zu $i$ und $m$; und da $u$ unendlich fern, so ist $UP = P'U$. $P'$ und $P$ sind dann innere Punkte von $m$. Die Polaren $p' = P'R$ und $p = PR$ von $Q$ bezw. zu $m$ und $i$ laufen nach dem unendlich Fig. 44.

Fig. 44.




fernen Pole $R$ der $r$ zu $m$ und $i$. Um nun die zu $i$ in Bezug auf $P$ und $Q$ konjugirten Kegelschnitte bezw. $h$ und $k$ zu bestimmen, verzeichne man (oder denke sich auch nur verzeichnet) den zu $m$ in Bezug auf den Schnittpunkt $V$ der $r$ mit $u$ und dessen Polare $UR$ zu $m$ konjugirten Kegelschnitt $l$, der entweder nach I, 401 oder als diejenige Hyperbel verzeichnet wird, welche die in $UR$ und $UP$ liegenden Durchmesser des $m$ bezw. zu einem reellen und zu dessen konjugirtem ideellen Durchmesser hat (I, 379). Nach der Konstruktion der vor. Nr. sind dann die ideellen Darstellungen $h$ und $k$ von $i$ in Bezug auf $P$ bezw. $Q$ auch die konjugirten Kegelschnitte zu $l$ in Bezug auf $Q$ bezw. $P$; und da $PQR$ ein Polardreieck zu $l$, so sind $h$ und $k$ zu einander konjugirt in Bezug auf $R$ und $r$ (I, 407). $h$ und $k$ berühren aber die $l$ bezw. in den Punkten $A, A_1$ und $B, B_1$, welche auf den Strahlen $RP, RQ$ liegen, und die Tangenten in diesen Punkten gehen bezw. nach $Q$ und $P$. Hat man $l$ nicht verzeichnet, so bestimmt man $A, A_1$ und $B, B_1$ als Doppelpunkte je einer Involution, oder einfacher nach I, 371, indem man die Abscissen der Hyperbel aus ihren (hier schiefen) Ordinaten ermittelt. Weil $A, A_1$ und $B, B_1$ zwei konjugirte Punktepaare der konjugirten Kegelschnitte $h, k$ sind, so bestimmen die Linien $AB$, $AB_1$ (und $A_1B_1$, $A_1B$) auf

$r$ die Berührungspunkte $C, C_1$ beider Kegelschnitte, in welchen die Tangenten nach $R$ laufen (I, 401). Da nun die nach dem Pole $R$ von $CC_1$ gerichtete reelle Sehne $APA_1$ des $h$ die endliche Strecke $CC_1$ trifft, ist die ideelle Darstellung $h$ des $i$ in Bezug auf den *inneren* Punkt $P$ eine *Ellipse*, die $k$ in Bezug auf den *äußeren* $Q$, weil zu der $h$ in Bezug auf den unendlich fernen Punkt $R$ konjugirt, eine *Hyperbel*. Zur Verzeichnung von $h$ bestimmt man den zu $CC_1$ konjugirten Durchmesser vermittelst Affinität zu einem Kreise vom Durchmesser $CC_1$; und jener Durchmesser gehört als ideeller auch der Hyperbel $k$ an. — Ist $Q$ *ein Punkt der* $m$, so ist $p'$ deren Tangente in demselben, $p$ die im diametral gegenüberliegenden Punkte; dann wird $AA_1 = BB_1$, $BA \parallel r$, $C$ rückt ins Unendliche und die $h$ oder $k$ wird zu einer *Parabel*.

**106.** Aus Nr. 84 und den beiden vorhergehenden Nummern ergibt sich:

1) Der Pol $U$ der unendlich fernen Ebene **U** zu einer imaginären Fläche **H** ist ihr *Mittelpunkt*; die ideelle Darstellung der **H** in Bezug auf $U$ ist ein Ellipsoid, welches $U$ zum Mittelpunkte hat, dasselbe soll das *Mittelpunktsellipsoid* der **H** heißen.

2) *Die ideelle Darstellung einer imaginären Fläche zweiten Grades* **H** *in Bezug auf irgend einen Punkt* $P$ *ist ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem* $P$ *innerhalb, auf oder außerhalb des Mittelpunktsellipsoides der* **H** *liegt.*

**107.** *Begriff. Wir wollen diejenige Fläche* **H** *konjugirt zu einer Fläche zweiten Grades* **F** *in Bezug auf eine Gerade* $g$ *nennen, welche den Ort des Kegelschnittes bildet, der in jeder durch* $g$ *gelegten Ebene zu deren Schnittkurve mit* **F** *konjugirt in Bezug auf* $g$ *ist.*

*Satz. Sind die Geraden* $g$ *und* $g'$ *gegenseitige Polaren zu einer Fläche zweiten Grades* **F**, *so sind die in Bezug auf* $g$ *und die in Bezug auf* $g'$ *zu* **F** *konjugirten Flächen ein und dieselbe; diese Fläche* **H** *ist vom zweiten Grade, sie berührt die* **F** *in deren Schnittpunkten mit* $g$ *und mit* $g'$, $g$ *und* $g'$ *sind auch gegenseitige Polaren zu* **H**, *und es ist auch* **F** *zu* **H** *in Bezug auf* $g$ *und* $g'$ *konjugirt*).*

*Bew.* Jede Gerade $i$, welche die $g$ und die $g'$, bezw. in den Punkten $G$ und $G'$, schneidet, trifft beide konjugirte Flächen in denselben beiden Punkten, nämlich in denen, welche in Bezug auf **F** zuein-

*) Diesen Begriff und Satz teilte mir Herr Prof. *Retali* in einem Schreiben vom 26. Nov. 1884 freundlichst mit. Er war mir neu, schien mir aber dem Inhalte meines Buches ferne zu liegen. Bei der letzten Überarbeitung des zweiten Bandes jedoch führte mich die nähere Untersuchung der Imaginärprojektion ebener Kurven der Flächen 2. Grades auf diesen Begriff und ich zog ihn in der oben gegebenen Weise in das Buch herein.

ander konjugirt und durch $G$ und $G'$ harmonisch getrennt sind. Denn die zu **F** in Bezug auf $g$ und die in Bezug auf $g'$ konjugirte Fläche enthalten bezw. in den Ebenen $gi$, $g'i$ die Kegelschnitte $h$, $h'$, welche zu den Schnittkurven dieser Ebenen mit **F** bezw. zu $g$, $G'$ und $g'$, $G$ konjugirt sind, indem $G'$ und $G$ bezw. von $g$ und $g'$ zu den Schnittkurven die Pole bilden. Diese konjugirten Kurven $h$, $h'$, und daher auch **H**, schneiden aber die $i$ in den bezeichneten Punkten (I, 400). Indem durch jeden Punkt des Raumes eine Gerade $i$ gelegt werden kann, fallen beide Flächen mit allen ihren Punkten zusammen.

Da alle Kegelschnitte $h$ dieselbe Involution konjugirter Punkte auf $g$ besitzen, wie **F**, deren reelle oder ideelle Doppelpunkte $F$, $F'$ heißen mögen, so projiciren sich je zwei derselben auf einander aus jedem von zwei Punkten der Verbindungslinie der Pole von $g$ zu ihnen (85), d. h. der $g'$. Läßt man zwei $h$ ineinander fallen, so findet man, daß die Fläche **H** entlang einer Kurve $h$ von einem Kegel berührt wird, dessen Spitze auf $g'$ liegt; ebenso entlang eines Kegelschnittes $h'$ (dessen Ebene durch $g'$ geht) durch einen Kegel mit der Spitze auf $g$. Alle $h$ erzeugen nun eine Fläche zweiten Grades **H**, da sie alle durch dieselben beiden Doppelpunkte $F$, $F'$ auf $g$, sowie durch zwei Punkte eines Leitkegelschnittes $h'$ gehen, und in letzteren Punkten Tangenten besitzen, die nach demselben Punkte der $g$ (der dann der Pol der Ebene von $h'$ ist) laufen (81). Ebenso alle $h'$. — $g$ und $g'$ sind Polaren von einander auch zu **H**, weil der Pol von $g$ zu jeder Kurve $h$ auf $g'$ liegt, und umgekehrt. Die durch $g$ gelegten Berührungsebenen an **F** und **H** berühren beide Flächen in den Doppelpunkten der zu diesen Flächen gemeinschaftlichen Involution auf $g'$, und umgekehrt. Es ist die Fläche **F** in reciproker Weise zu **H** in Bezug auf $g$ und $g'$ konjugirt, weil in reciproker Weise in jeder durch $g$ oder durch $g'$ gelegten Ebene die Kegelschnitte $f$ und $h$ zueinander konjugirt sind.

**108.** *Satz. Von zweien in Bezug auf zwei Gerade $g$, $g'$ zueinander konjugirten Flächen zweiten Grades* **F** *und* **H** *ist jede mit sich selbst reciprok in Bezug auf die andere.*

*Bew.* Durch einen beliebigen Punkt $Q$ des Raumes lege man eine die $g$ und $g'$ bezw. in $G$ und $G'$ schneidende Gerade $i$, durch $i$ und eine der Geraden $g$, $g'$, etwa $g$, die Ebene $gi$, so schneidet diese die **F** und **H** in den Kegelschnitten $f$ und $h$, welche in Bezug auf $G'$, $g$ konjugirt sind. Sei auf $i$ zu $Q$ der Punkt $Q'$ in Bezug auf $h$ und daher auch auf **H** konjugirt, seien die Punkte $Q_1$, $Q_1'$ durch $G'$ und $G$ harmonisch getrennt bezw. von $Q$, $Q'$, so sind auch $Q_1$, $Q_1'$ konjugirt in Bezug auf $h$ und **H**, weil $h$ mit sich selbst perspektiv-kollinear in Bezug auf $G'$ und $g$ ist (I, 346), und es sind

$Q$ und $Q_1'$, sowie $Q'$ und $Q_1$ konjugirt in Bezug auf $f$ (I, 406, 1)) und **F**. Sind nun noch auf $g$ zu $G$ der Punkt $G_1$ und auf $g'$ zu $G'$ der Punkt $G_1'$ konjugirt in Bezug auf **F** und dann auch auf **H**, so muß die Polarebene eines jeden Punktes der Geraden $GG'$ in Bezug auf **F** und auf **H** die Gerade $G_1 G_1'$ enthalten, weil diese die Schnittlinie der Polarebene $G_1 g'$ von $G$ und $G_1' g$ von $G'$ ist. Daher sind die Polarebenen von $Q$ zu **H** und **F** bezw. $G_1 G_1' Q'$ und $G_1 G_1' Q_1'$, und die von $Q_1$ zu **H** und **F** bezw. $G_1 G_1' Q_1'$ und $G_1 G_1' Q'$. Da nun $Q$, $G_1 G_1' Q'$ Pol und Polarebene zu **H** sind, $G_1 G_1' Q_1'$, $Q_1$ bezw. deren Polarebene und Pol zu **F**, diese aber auch Polarebene und Pol zu **H**, so ist nach dem Begriffe von Nr. 103 die eine (**H**) der beiden Flächen mit sich selbst reciprok in Bezug auf die andere (**F**).

**109.** *Die besonderen Fälle der in Bezug auf zwei gegenseitige Polaren $g$, $g'$ konjugirten Flächen* **F** *und* **H**.

1) Ist **F** *geradlinig* und wird von $g$ und dann auch von $g'$ in zwei reellen Punkten geschnitten (82, 4)), so gilt das letztere auch von **H**, und **H** ist daher ebenfalls *geradlinig*. **F** und **H** haben in jenen vier Punkten die bezw. durch $g'$ und $g$ gehenden Berührungsebenen, daher auch das unebene Viereck von Erzeugenden gemein, welche jeden der beiden Schnittpunkte auf $g$ mit jedem der beiden auf $g'$ verbinden.

2) Ist **F** *geradlinig* und wird nicht von $g$ und daher auch nicht von $g'$ in reellen Punkten geschnitten, so sind $g$ und $g'$ nicht reell schneidende Gerade für alle Kegelschnitte $f$, $f'$; und da diese reell sind, so sind die $h$ und $h'$ und damit die Fläche **H** *imaginär*.

3) Ist **F** *nicht geradlinig*, so wird sie von einer der Geraden $g$, $g'$ reell, von der anderen imaginär geschnitten, dann gilt dieses auch von **H**, und **H** ist ebenfalls *nicht geradlinig*.

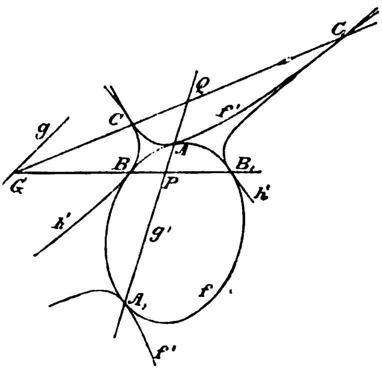
4) Ist **F** *imaginär*, so wird sie von $g$ und von $g'$ nicht reell geschnitten; daher auch nicht die **H**, und da alle Kegelschnitte $f$ imaginär sind, so sind alle $h$ und $h'$ reell, und **H** *geradlinig*.

**110.** *Satz. Sind in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades* **F** *die Geraden $g$ und $g'$ gegenseitige Polaren, sind ferner die Punkte $P$ und $Q$ der $g'$ in Bezug auf* **F** *zu einander konjugirt, also $P$ und $gQ$ =* **P**, *sowie $Q$ und $gP$ =* **Q** *Pol und Polarebene, sind endlich zu* **F** *konjugirt die Fläche* **F**$'$ *in Bezug auf $g$ und $g'$, die* **H** *in Bezug auf $P$, $gQ$, die* **H**$'$ *in Bezug auf $Q$, $gP$, so sind auch die Flächen der drei anderen Paare zu einander konjugirt, und zwar die* **H**, **H**$'$ *in Bezug auf $g$, $g'$, die* **F**$'$, **H**$'$ *in Bezug auf $P$, $gQ$, die* **F**$'$, **H** *in Bezug auf $Q$, $gP$. Schneiden $g$ und $g'$ die* **F** *(und* **F**$'$*) reell, so sind alle vier Flächen reell, in den anderen Fällen ist eine derselben imaginär. Ist $G$ irgend ein Punkt auf $g$, so schneidet die Ebene $g'G$ die vier*

*Flächen in vier paarweise zu einander konjugirten Kegelschnitten mit dem gemeinschaftlichen Polardreiecke GPQ.*

*Bew.* Es seien $f, f', h, h'$ die Schnittkurven der Ebene $g'\,G$ bezw. mit den Flächen **F**, **F**$'$, **H**, **H**$'$, von welchen Kurven sich stets eine, hier die $h$, als imaginär ergeben wird. Da $g$ und $g'$ gegenseitige Polaren zu **F** sind, so sind sie es auch zu **F**$'$ (107), und auch zu **H** und **H**$'$, weil $g'$ durch die Konjunktionspunkte $P$ und $Q$ geht (100, 4)); ebenso sind $P$ und $Q$ konjugirt in Bezug auf jede der vier Flächen. Schneidet $g'$ die **F** in den Punkten $A, A_1$, die reell oder in Bezug auf $P, Q$ ideell sein können, so enthält **F**$'$, weil zu **F** in Bezug auf $g'$ konjugirt, die gleichartigen Punkte $A, A_1$, wie **F**; dagegen enthalten **H** und **H**$'$, weil zu **F** bezw. in Bezug auf $P$ und $Q$ konjugirt, die ideellen oder reellen Punkte $A, A_1$, also ungleichartige mit denen von **F**. Nun enthält **F**$'$ als konjugirt zu **F** in Bezug auf $g$ in der Ebene **P** $= gQ$ die zum Kegelschnitte **PF** in Bezug auf $g$ (und $Q$) konjugirte Kurve, es enthält **H**$'$ als konjugirt zu **F** in Bezug auf $Q$ in **P** die zum Kegelschnitte **PF** in Bezug auf $Q$ (und $g$) konjugirte Kurve, also enthalten **F**$'$ und **H**$'$ in **P** denselben Kegelschnitt; außerdem ist zu beiden Flächen $P$ der Pol von **P**, und endlich enthalten beide auf dem Strahle $g'$ aus $P$ die ungleichartigen Punkte $A, A_1$. Diese dreierlei Elemente bestimmen aber bezw. die Flächen **F**$'$ und **H**$'$ (81) und bezeichnen sie als konjugirt in Bezug auf $P$ und **P** $= g\,Q$ (96). Vertauscht man $P$ mit $Q$, so vertauscht sich auch **H**$'$ mit **H**, und es ergeben sich **F**$'$ und **H** als in Bezug auf $Q$ und **Q** $= g\,P$ konjugirt. Endlich sind **H**, **H**$'$ konjugirt in Bezug auf $g$, $g'$. Denn **H**, als konjugirt zu **F** in Bezug auf $P$, **P**, enthält in **P** die Kurve **PF**, und **H**$'$, als konjugirt zu **F** in Bezug auf $Q$**Q**, enthält in der durch $Q$ gehenden Ebene **P** die zur Kurve **PF** in Bezug auf $g$ konjugirte Kurve; daher besitzen **H** und **H**$'$ in **P** Kegelschnitte, die in Bezug auf $g$ konjugirt sind; ferner ist zu beiden Flächen $P$ der Pol von **P**, und endlich besitzen beide auf $g'$ die übereinstimmenden Punkte $A, A_1$. Folglich sind sie in Bezug auf $g$, $g'$ konjugirt (107). Fig. 45.

Fig. 45.




Eine durch $g'$ und einen Punkt $G$ der $g$ gelegte Ebene enthält die in Bezug auf jede der vier Flächen, daher auch in Bezug auf

jede der vier Schnittkurven konjugirten Punkte $G$, $P$, $Q$, welche demnach ein gemeinschaftliches Polardreieck der Kurven bilden. Da je zwei der Flächen und daher auch der Kurven in Bezug auf $P$ und $Q$ konjugirt sind, nämlich bezw. $f$, $h$ und $f$, $h'$, so sind diese vier Kurven zu zwei in Bezug auf einen der Punkte $G$, $P$, $Q$ konjugirt (I, 407) und eine der Kurven ist imaginär.

Es leuchtet ein:

*Satz. Unter den vier paarweise zu einander konjugirten Flächen zweiten Grades* $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$ *ist stets eine reelle nicht geradlinige, etwa* $\mathbf{F}$, da dies bei zweien in Bezug auf einen Punkt konjugirten stattfindet (98, 99). *Dann ist auch* $\mathbf{F}'$ *reell und nicht geradlinig* (109, 3)); *dabei werde* $\mathbf{F}$ *und dann auch* $\mathbf{F}'$ *von* $g$ *imaginär, daher von* $g'$ *reell geschnitten. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:*

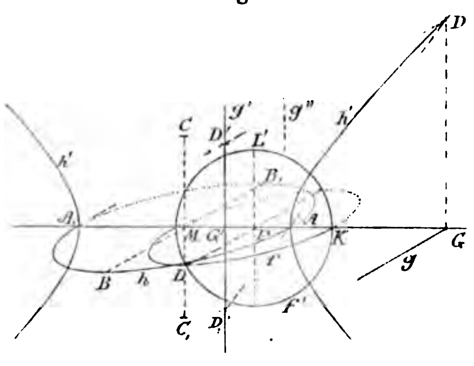
1) *$P$ und $Q$ liegen auf $g'$, und $P$ sei der innere, $Q$ der äußere Punkt von* $\mathbf{F}$, *so ist* $\mathbf{H}$ *imaginär* (99), $\mathbf{H}'$ *geradlinig* (98), *und beide werden von $g$ und $g'$ imaginär geschnitten.*

2) *$P$ und $Q$ liegen auf $g$, so sind* $\mathbf{H}$ *und* $\mathbf{H}'$ *geradlinig und werden von $g$ und $g'$ reell geschnitten.*

**111.** *Aufg. Zu einer Fläche zweiten Grades* $\mathbf{H}$, *welche als konjugirt in Bezug auf einen Punkt $P$ und dessen Polarebene* $\mathbf{P}$ *zu einer reellen Fläche* $\mathbf{F}$ *gegeben ist, die in Bezug auf eine nicht durch $P$ gehende und nicht in* $\mathbf{P}$ *liegende Gerade $g$ konjugirte Fläche* $\mathbf{H}'$ *darzustellen.*

Fig. 46. Es sei $\mathbf{F}$ eine Kugel vom Halbmesser $r$, $P$ ihr Mittelpunkt, daher $\mathbf{P}$ die unendlich ferne Ebene und $\mathbf{H}$ *eine imaginäre Kugel* mit dem Mittelpunkte $P$, und es sei $g$ eine nicht durch $P$ gehende und nicht in $\mathbf{P}$ liegende Gerade. Dann sind die durch $P$ und $g$, und die durch $P$ und $\perp g$ gelegten Ebenen Symmetrieebenen zu $\mathbf{F}$ und $g$, und daher auch zu $\mathbf{H}$ und $\mathbf{H}'$, und es sollen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{H}'$ durch ihre in diesen Ebenen liegenden Hauptschnitte und zwar in schiefer Projektion auf die Ebene $(P, \perp g)$ verzeichnet werden. Die Schnittlinie $PG$ beider Ebenen ist die von $P$ auf $g$ gefällte Senkrechte, deren Fußpunkt $G$ sei.

Fig. 46.




*Aufl.* Die Ebenen $Pg$ und $(P, \perp g)$ schneiden die $\mathbf{F}$ in größten

Kreisen $f, f'$. Von diesen erscheint $f'$ in seiner wahren Gestalt mit dem Halbmesser $PK = r$ in $PG$ und dem darauf senkrechten $PL' = r$; $f$ erscheint als Ellipse mit dem einen Halbdurchmesser $PK$, und mit dem dazu konjugirten, also zu $g$ parallelen, der ebenfalls in seiner wahren Größe $PL$ gezeichnet werden soll. Die Polare $g''$ von $g$ zu **F** ist auch die Polare von $G$ zu $f'$; und die Polare $g'$ von $g$ zu **H** ist von $g''$ harmonisch getrennt durch $P$ und **P** (100), also zu $g''$ symmetrisch in Bezug auf $P$; sie treffe die $PG$ in $G'$. Die Zeichenebene (**P**, $\perp g$) ist daher auch die Ebene $Pg'$. Die Schnittlinien $h, h'$ der Fläche **H**$'$ mit den Ebenen $Pg$ und $Pg'$ sind daher die Kegelschnitte, welche bezw. zu den imaginären Kreisen, deren ideelle Darstellungen in Bezug auf $P$ die $f$ und $f'$ sind, in Bezug auf $g, G'$ und $g', G$ konjugirt sind (107); sie bilden daher, wenn man sie um $GG'$ in eine und dieselbe Ebene umlegt, konjugirte Kegelschnitte in Bezug auf $GG'$ und werden nach Nr. 105 konstruirt. Man bestimme beide in der Ebene $Pg'$, ziehe daher $GD \parallel g'$, schneide $GD$ und $g'$ mit der zum Kreise $f'$ in Bezug auf den unendlich fernen Punkt von $PG$ konjugirten (gleichseitigen) Hyperbel bezw. in $D$ und $D', D_1'$, wobei $GD = GL'$ und $G'D' = G'D_1' = G'L'$ bezw. die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke sind von den Katheten $r$ und $PG$, $r$ und $PG'$ (105; I, 371). Dann erhält man die Scheitel $A$ und $A_1$ von $h$ und $h'$ auf $PGG'$ durch die Geraden $DD_1'$ und $DD'$. Ist $G$ ein äußerer, so ist $G'$ ein innerer Punkt der Kugel **F** und des Kreises $f$, und es ist $h$ eine Ellipse, welche in ihrer umgelegten Gestalt durch $D'$ geht; hieraus wird mittelst Affinität zu dem Kreise vom Durchmesser $AA_1$ ihre kleine Halbaxe $MC$, und nach der Zurückdrehung $MB = MC$ bestimmt. $h'$ ist dann eine Hyperbel, welche durch $D$ geht und $MC$ zur halben ideellen Axe hat. — Die Fläche **H**$'$ ist nun durch ihre beiden Hauptschnitte, die Ellipse $h$ und die Hyperbel $h'$, oder durch ihre Halbaxen $MA$, $MB$, $MC$ (ideell) bestimmt.

### III. Die Berührungsebenen, ebenen Schnitte und Berührungskegel der Flächen zweiten Grades, insbesondere der Nichtregelflächen.

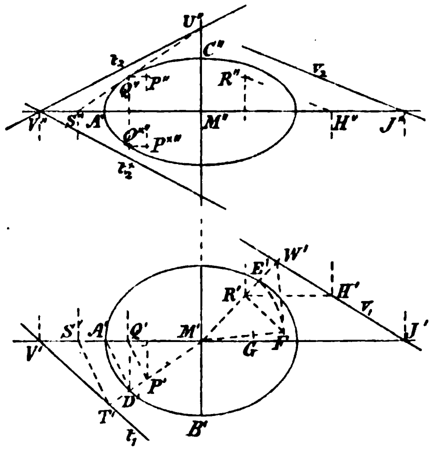
**112.** Die folgenden Konstruktionen können auf die Nichtregelflächen und auf die Regelflächen angewendet werden; doch werden wir als Beispiele nur Nichtregelflächen wählen, weil die Regelflächen durch ihre geradlinigen Erzeugenden besondere Vorteile gewähren. Wir werden diese daher später getrennt behandeln.

*Aufg. An ein durch seine drei Halbaxen* $MA$, $MB$, $MC$ *gege-* Fig. 47.

*benes Ellipsoid* F *in einem durch die eine Projektion gegebenen Punkte der Fläche eine Berührungsebene zu legen.*

*Aufl.* 1. Man benutze die Ebene $MAB$ als $P_1$ und die $MAC$ als $P_2$, so sind der erste und zweite Umriß bezw. die Ellipsen $AB$ und $AC$, die man zweckmäßig und ohne Verminderung der Genauigkeit für die folgende Konstruktion benutzen kann, wenn sie zum Behufe der Darstellung der Fläche scharf (mittelst der Scheitelkrümmungskreise und des Kurvenlineals) verzeichnet sind. In diesem Falle führe man durch den in seiner ersten Projektion $P'$ gegebenen Punkt $P$ und durch die Axe $MC$ eine Ebene, welche den Hauptschnitt $AB$ in $D$ und das Ellipsoid in einer Ellipse $DC$ schneidet.

Fig. 47.



Um deren Verzeichnung zu vermeiden, projicirt man dieselbe durch Projicirende parallel zu $DA$ in dem Hauptschnitt $AC$, und dabei $P'$ nach $Q'$ durch $P'Q' \parallel D'A'$. Aus $Q'$ ergeben sich auf der Ellipse $A''C''$ die zwei Punkte $Q''$, $Q^{*''}$, und aus diesen die beiden zu $P'$ gehörigen zweiten Projektionen $P''$, $P^{*''}$, wobei $Q''P'' \parallel Q^{*''}P^{*''} \parallel A''M''$.

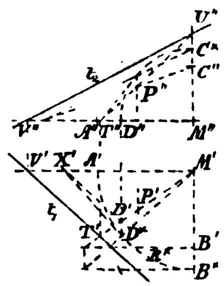
Die Tangente an die Ellipse $CP$ in $P$ erhält man aus der Tangente $QS$ an die $CQ$ in $Q$; die erste Spur $T'$ der ersteren folgt aus derjenigen $S'$ der letzteren durch $S'T' \parallel Q'P'$; worauf man die erste Spur $t_1$ der Berührungsebene als $T'V'$ parallel zur Tangente an die Ellipse $A'D'$ in $D'$ zieht, da die Berührungsebene die Tangente der zu $P_1$ parallelen Ellipse $QP$ in $P$ enthält, diese aber mit derjenigen von $AD$ in $D$ parallel ist. Die zweite Spur $t_2$ ist dann $V''U''$, wenn $Q''S''$ die Axe $M''C''$ in $U''$, und $t_1$ die $P_2$ in $V$ trifft. Die Berührungsebene in $P^*$ ist $t_1 t_2^*$, wobei $t_2^*$ symmetrisch zu $t_2$ in Bezug auf $A''M''$.

*Aufl.* 2. $t_1$ ist die Polare von $P'$ zur Ellipse $A'B'$, und $t_2$ von $P''$ zu $A''C''$. Denn $t_1$ ist die Polare von $PP^*$ zur Fläche F, als Schnittlinie der Berührungsebenen in $P$ und $P^*$, folglich ist in der durch $t_1$ gehenden Ebene $P_1$ der Schnittpunkt $P'$ mit $PP^*$ der Pol von $t_1$ zur Schnittkurve $AB$ mit F (77, 4)). Für den Punkt $R'$ (statt $P'$) sind daher auf $M'R'$ die Punkte $R'$ und $W'$ auf $v_1$ (statt $t_1$)

harmonisch getrennt durch die beiden Ellipsenpunkte, deren einer $E'$. Daher $E'F$ Kreis aus $M'$, $MR'F = 90^0$, $FW'$ Tangente des Kreises, $W'J' = v_1$ konjugirt zu $M'R'$ (wird erhalten durch konjugirte Sehnen der $A'B'$). Abstand $R''$ von $M''A''$ ist = Abstand $G$ von $M'R'$, wenn auf $M'F$ die $M'G = M''C''$ gemacht wird. Dann zieht man $v_2 \parallel H''R''$ durch $J''$, wenn $R'H' \parallel M'A'$ (s. Fig.).

*Aufl.* 3. Sind die Ellipsen $AB$, $AC$ nicht verzeichnet, so benutzt man ihre Affinität (oder, wenn ein Hauptschnitt eine Hyperbel ist, deren Kollineation) mit dem Kreise. Den Schnittpunkt $D'$ von $M'P'$ mit der Ellipse $A'B' = k$ erhält man durch Affinität der mit dem Kreise $A'B^* = k^*$ mittelst des Strahles $M'D^*$ aus $D^*$ (unter Benutzung Paralleler zu $M'A'$ aus $B'$ und $B^*$) und die Tangente $D'X'$ der Ellipse vermittelst derjenigen $D^*X'$ an den Kreis $k^*$. Man erhält $P''$ auf der Ellipse $D''C''$ durch Affinität dieser Linie mit dem Kreise $D''C^*$, ebenso die Tangente $U''P''T''$ an dieselbe Ellipse, dann $T'$, $t_1 = T'V' \parallel D'X'$, und $t_2 = V''U''$. Fig. 48.

Fig. 48.



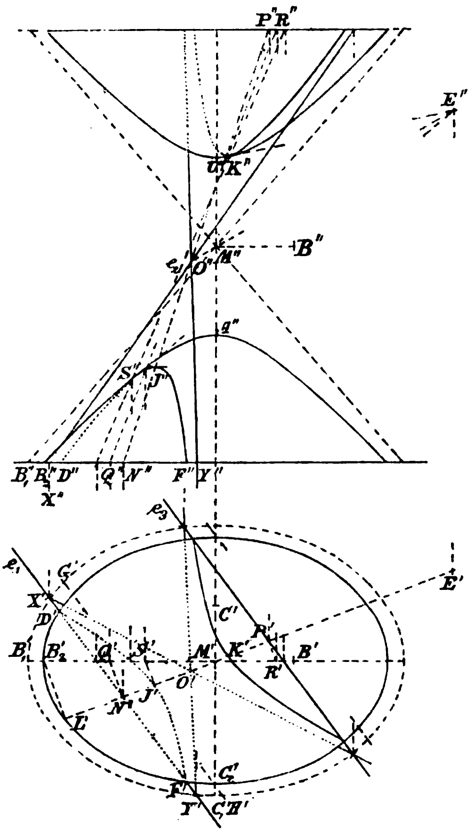
**113.** *Um die Schnittlinie einer Fläche zweiten Grades mit einer Ebene* zu konstruiren, kann man eine Schaar paralleler Hilfsebenen anwenden; dieselben lassen sich stets so legen und eine Projektionsrichtung läßt sich so wählen, daß die Projektionen der Schnittlinien entweder gerade Linien oder Kreise sind. Noch zweckmäßiger aber ist es, die Eigenschaft der Schnittkurve, daß sie ein Kegelschnitt ist, zu benutzen, fünf Elemente derselben, die man möglichst günstig wählt, zu ermitteln, und die Kurve aus ihnen zu verzeichnen.

*Aufg. Die Schnittlinie eines zweischaligen Hyperboloids mit einer Ebene zu bestimmen.*

*Aufl.* 1. Sei $M$ der Mittelpunkt, seien $MA$ die reelle, $MB$, $MC$ die beiden ideellen Halbaxen, sei $\mathrm{P}_2$ die Hauptebene $MAB$, seien $\mathrm{P}_1$ und $\mathrm{P}_3$ parallel zu $MBC$ in gleichen Abständen von $M$, so können von dem (hyperbolischen) Hauptschnitte $AB$ die Asymptoten ($M''B_1'' \parallel A''B''$) gezeichnet werden, deren eine die erste Spur $B_1$ besitzt. Hieraus ergibt sich von der Hyperbel selbst eine erste Spur $B_2$ durch $M'B_2'^2 = M'B_1'^2 - M''B''^2$ (I, 371), und ebenso von der Hyperbel $MAC$ eine erste Spur $C_1'$ der Asymptote und $C_2'$ der Kurve durch $B_1'C_1' \parallel B_2'C_2' \parallel B'C'$. Damit mögen die Hyperbel $A''B_2''$ und die in der ersten Projektion zusammenfallenden ersten und dritten Spuren des Asymptotenkegels und der Fläche Fig. 49.

als koncentrische ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen $B_1'C_1'$, $B_2'C_2'$ gezeichnet werden. Von der Schnittebene **E** sind die untereinander parallelen erste und dritte Spur $e_1$, $e_3$ gegeben, woraus sich $e_2$ ergibt. $e_1$ bestimmt auf $B_2'C_2'$ zwei Punkte $D$, $F$ der Schnittlinie, ebenso $e_3$ zwei, und $e_2$ zwei solche auf der Hyperbel $AB$, und aus diesen sechs Punkten könnte die Schnittkurve verzeichnet werden. Es mögen aber noch ihre Punkte $J$, $K$ auf der zu $e_1$ konjugirten Durchmesserebene, welche durch $MA$ und die Mitten $N$ und $P$ der Sehnen $e_1$ und $e_3$ geht, und die Ellipse $B_2C_2$ in $L$ schneidet, bestimmt werden. Sie ergeben sich, wie in der vorigen Nr., vermittelst Projektion auf die Hauptebene $AB$ durch Projicirende $\parallel L'B_2'$ aus den Schnittpunkten $S$, $U$ der Hyperbel $AB_2$ mit der Geraden $QR$. Die Tangenten an die Schnittkurve in $J, K$ sind $\parallel e_1$. Zur Bestimmung der *Asymptoten* legt man eine zu **E** parallele Ebene durch den

Fig. 49.



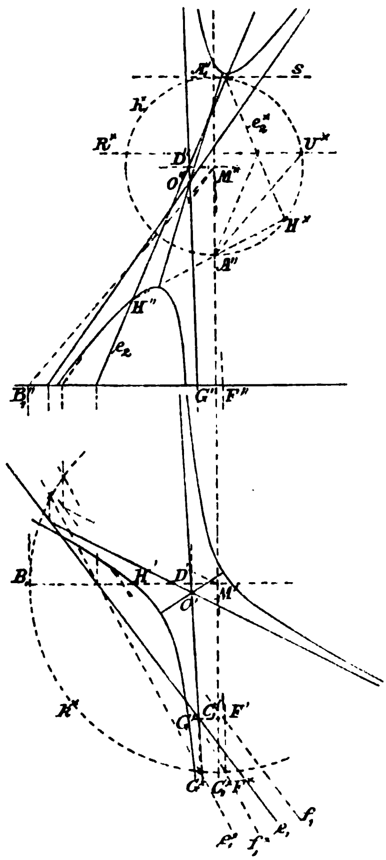

Mittelpunkt $M$ (des Asymptotenkegels), deren erste und dritte Spur $\parallel e_1$ laufen und von $M'$ Abstände besitzen $= \frac{1}{2}$ Abstand $e_1 e_3$. Sie schneiden die gleichnamigen Spuren des Asymptotenkegels in vier Punkten, darunter $G$, $H$, den Kegel selbst in zwei Erzeugenden $MG$, $MH$; die Berührungsebenen des Asymptotenkegels nach diesen Erzeugenden berühren in deren unendlich fernen Punkten zugleich das Hyperboloid; sie enthalten die Tangenten der Ellipse in $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3$ in jenen vier Punkten, diese treffen bezw. $e_1$ und $e_3$ in vier Punkten, darunter $X$, $Y$, deren Verbindungslinien ($\parallel MG$ bezw. $MH$) die Asymptoten $OX$, $OY$ sind, und sich in $O$ auf $NP$ treffen. Je nachdem die $\parallel$ **E** durch $M$ gelegte Ebene mit dem Asymptotenkegel

keine, eine oder zwei Erzeugende gemein hat, wird die Schnittkurve eine *Ellipse*, *Parabel* oder *Hyperbel* sein.

Der Pol $E$ der Ebene **E** zu der Fläche liegt auf der Geraden $MO$ (88) und in der Berührungsebene der Fläche in jedem Punkte der Schnittkurve, z. B. in derjenigen eines Punktes des zweiten Umrisses $A''B_2''$ der Fläche.

*Aufl.* 2. Sollen die Ellipsen und die Hyperbel nicht verzeichnet werden, so benutzt man wieder die *Kollineation mit dem Kreise.* Fig. 50.

Fig. 50.



Gegeben $M$, $A$, $B_1'$, $C_1'$, $e_1$, $e_2$. Die $e_2$ treffe die durch $M$ parallel $\mathbf{P}_1$ gelegte Ebene in $D$. Der Ellipse $B_1'C_1' = k$ entspricht der Kreis $B_1'C_1^* = k^*$, der $e_1$ die $e_1^*$; die durch $M$ parallel **E** gelegte Ebene schneidet $\mathbf{P}_1$ in $f_1$ ($\parallel e_1$), welcher $f_1^*$ ($\parallel e_1^*$) entspricht (Verschiebung $\#\ D'M'$). $f_1^*$ trifft den Kreis $k^*$ in zwei Punkten, deren einer $F^*$ ist, die Tangente an $k^*$ in $F^*$ trifft $e_1^*$ in $G^*$, und den Punkten $F^*$ und $G^*$ entsprechen $F$ und $G$, so daß $GO \parallel FM$ die eine Asymptote ist; ebenso wird die andere bestimmt; beide schneiden sich im Mittelpunkte $O$ der Schnittkurve.

Zur Bestimmung eines Punktes der Kurve im Endlichen muß die bisher nicht benutzte Axe $MA$ benutzt werden. Man suche einen der Schnittpunkte $H$ der Hyperbel $AB = h$ mit der Spur $e_2$, indem man $h$ als perspektiv betrachtet zu dem Scheitelkreise $A''A_1'' = h^*$ vom Durchmesser $A''A_1''$ mit $A''$ als Kollineationsmittelpunkt und mit der Kreistangente $s$ in $A_1''$ als Kollineationsaxe. Dem einen unendlich fernen Punkte von $h$ entspricht $U^*$ auf $k^*$ vermittelst $A''U^* \parallel M''B_1''$; $U^*R^* \parallel s$ ist dann die Gegenaxe in der Ebene des Kreises. Der $e_2$ entspricht $e_2^*$, und deren einem Schnittpunkte $H^*$ mit $h^*$ der gesuchte Punkt $H''$, woraus $H'$ folgt. Mittelst der Asymptoten und eines Kurvenpunktes $H$, der aber der Genauigkeit halber un-

weit des Scheitels liegen muß (der zweite Schnittpunkt von $e_2^*$ ist genauer als $H$ und wurde nur wegen geringerer Deutlichkeit vermieden), bestimmt man nach I, 379 die Axe einer jeden Projektion der Schnitthyperbel.

**114.** *Aufg. Von einer Fläche zweiten Grades* **F** *sind der Umriß k (der wahre oder scheinbare) und die Projektionen C, D, E dreier Punkte (C), (D), (E) der Fläche gegeben; man soll die Projektion l der Schnittkurve (l) der durch diese drei Punkte gelegten Ebene mit der Fläche bestimmen.*

Da die Projektion der Schnittkurve den scheinbaren Umriß in zwei (reellen oder imaginären) Punkten berührt, kann man die Aufgabe auch so ausdrücken:

*Es sind ein Kegelschnitt k und drei Punkte C, D, E seiner Ebene gegeben; man soll durch die Punkte einen Kegelschnitt l legen, welcher den gegebenen Kegelschnitt k in zwei Punkten berührt.*

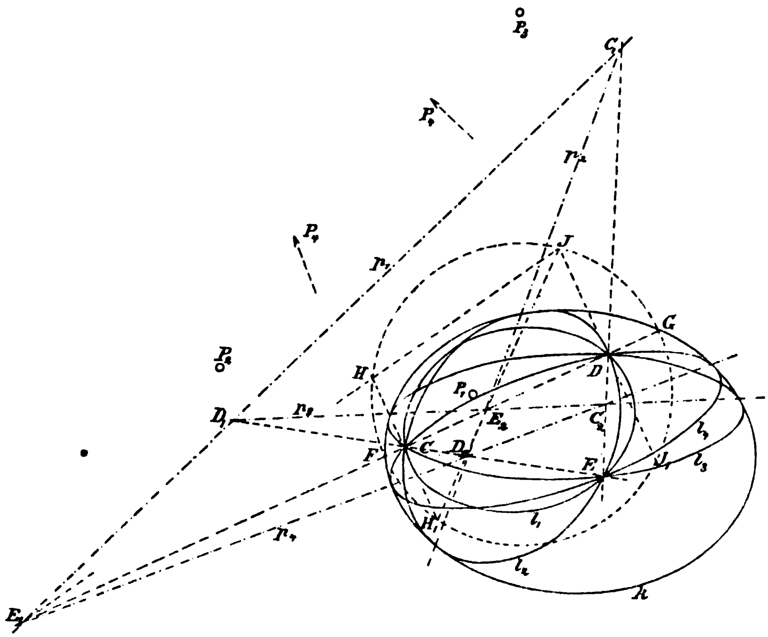
Die Art, wie man bei der ersten Form der Aufgabe die Projektion der Fläche gebildet denkt, ob central oder irgendwie parallel, und die noch freistehende Wahl eines Maßes der Fläche sind gleichgiltig. Denn denkt man sich unter $k$ den *wahren Umriß* der **F** für den Projektionsmittelpunkt $O$, wobei $O$ der Pol der Ebene von $k$ zu **F** ist, so ist **F** durch $k$, $O$ und einen Punkt $(C)$ bestimmt (79); für einen anderen Projektionsmittelpunkt $O_1$ sei $\mathbf{F}_1$ die Fläche, $(C)_1$ der Punkt, derart daß $(C)$ und $(C)_1$ dieselbe Projektion $C$ besitzen, oder daß $O(C)$ und $O_1(C)_1$ sich in $C$ in der Ebene von $k$ schneiden; dann sind **F** und $\mathbf{F}_1$ perspektiv mit der Ebene von $k$ als Kollineationsebene und mit dem Schnittpunkte von $OO_1$ und $(C)(C)_1$ als Kollineationsmittelpunkt. Dabei entsprechen sich die Punkte $(D)$, $(D)_1$; ferner $(E)$, $(E)_1$, sowie die Ebenen $(C)(D)(E)$ und $(C)_1(D)_1(E)_1$, und ihre Schnittlinien $(l)$, $(l_1)$ bezw. mit **F**, $\mathbf{F}_1$, so daß dieselben aus den entsprechenden Punkten $O$, $O_1$ dieselbe durch $C, D, E$ gehende Projektion $l$ auf die Ebene von $k$ besitzen müssen. Bedeutet $k$ den *scheinbaren Umriß*, so ist mit der soeben betrachteten Fläche **F** eine andere in den Kegel $Ok$ einbeschriebene perspektiv, so daß auch die Kegelschnitte der den Punkten $C, D, E$ entsprechenden Punkte perspektiv sind und dieselbe Projektion besitzen.

Die Unabhängigkeit von der Art der Projektion und von der Ausdehnung der Fläche wird auch durch die *Eindeutigkeit der folgenden Konstruktionen* nachgewiesen.

Fig. 51. *Aufl.* Es seien z. B. der gegebene Kegelschnitt $k$ eine Ellipse und die gegebenen Punkte $C, D, E$ innere von $k$. Man betrachte $k$ als wahren Umriß einer senkrecht projicirten Fläche **F**, die, weil $C, D, E$

innere Punkte sind, ein Ellipsoid **F** sein muß. Jeder der Punkte $C$, $D$, $E$ stellt zwei Punkte der Fläche dar, so daß acht Kombinationen dreier Punkte, nämlich eines von jedem Paare, und auch acht Ebenen durch die zweideutig bestimmten Punkte möglich sind.

Fig. 51.



Diese Ebenen liegen paarweise symmetrisch zur Ebene **P** von $k$; die beiden eines Paares besitzen eine gemeinsame Spur $p$ in **P**, und ihre Schnittlinien mit **F** eine gemeinsame Projektion $l$ auf **P**, welche die $k$ in deren (reellen oder imaginären) Schnittpunkten mit $p$ berührt. Zwei Kegelschnitte $k$ und $l$ liegen daher perspektiv mit $p$ als Axe und mit deren Pole $P$ zu $k$ als Mittelpunkt der Kollineation, so daß $l$ hierdurch und durch einen der Punkte $C$, $D$, $E$ bestimmt ist. Es gibt offenbar $8:2 = 4$ Kurven $l$.

Suchen wir die Spuren der durch zwei der Punkte $(C)$, $(D)$, $(E)$ gehenden Sehnen der Fläche **F**. Die Gerade $CD$ trifft die Ellipse $k$ in den Punkten $F$, $G$, die projicirende Ebene von $CD$ trifft die **F** in einem Kegelschnitte, dessen eine Axe $FG$ bildet, und den wir als Kreis annehmen dürfen, da hierdurch erst die noch unbestimmte auf **P** senkrechte Axe der **F** bestimmt wird. Der Kreis (in der Umlegung) wird von den Ordinaten von $C$ und $D$ bezw. im $H$, $H_1$ und $J$, $J_1$, getroffen, und die Linien $HJ$, $H_1 J$ (sowie $H_1 J_1$, $HJ_1$) bestimmen auf $CD$ die beiden Punkte $E_1$, $E_2$, die beiden Spuren der vier Sehnen $(C)$ $(D)$

von F. Hätte man über $FG$ als Axe statt des Kreises irgend eine Ellipse angenommen, so hätte man wegen ihrer Affinität zum Kreise dieselben Punkte $E_1$, $E_2$ erhalten. Sucht man in gleicher Weise auf $DE$ die Punkte $C_1$, $C_2$, auf $EC$ diejenigen $D_1$, $D_2$, so sind die viererlei Spuren der acht möglichen Schnittebenen die Geraden $C_1D_1E_1 = p_1$, $C_1D_2E_2 = p_2$, $D_1E_2C_2 = p_3$, $E_1C_2D_2 = p_4$, deren Pole zu $k$ bezw. $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, woraus man die vier Kurven $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ konstruiren kann als perspektiv zu $k$ bezw. mit $p_1$, $P_1$; $p_2$, $P_2$ ... als Axe und Mittelpunkt der Kollineation, und gehend durch $C$, $D$, $E$; oder man bestimmt ihre Axen nach I, 378.

Die Punkte $E_1$, $E_2$ sind die Doppelpunkte der Involution $C, D$; $F, G$, da sie harmonisch getrennt sind durch $C, D$ wegen des vollständigen Vierecks $HH_1J_1J$, und durch $F$, $G$ wegen des Kreises $FG$. Es ist dadurch eine einfachere *Konstruktion der Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe* gegeben, als in I, 302 und 327.

Faßt man die Aufgabe in der zweiten Form, so findet man für $l_1$ und $k$ auf dem Strahle $CD$ die Punkte $E_1$, $E_2$, durch deren einen die Berührungssehne und Kollineationsaxe beider Kurven gehen muß, als diejenigen beiden Punkte, welche in Bezug auf $l_1$ und $k$ konjugirt, also durch die Schnittpunkte von $CD$ mit jeder der Kurven harmonisch getrennt sind. Denn jeder Punkt der Kollineationsaxe hat zu $l_1$ und zu $k$ dieselbe Polare, weil dieser Punkt sich selbst, seine Polaren sich daher unter einander entsprechen, daher einen Punkt auf der Kollineationsaxe gemein haben, außerdem aber durch den Pol dieser Axe gehen, der zu beiden Kurven derselbe ist. Auf jeder Geraden, so auf $CD$, muß daher ihrem Punkte der Kollineationsaxe derselbe Punkt in Bezug auf $l_1$ und $k$ zugeordnet sein, also muß diese Axe durch $E_1$ oder $E_2$ gehen.

**115.** Um die Benutzung der Kegelschnitte zu vermeiden, und die Axen der gesuchten Kegelschnitte zu erhalten, wollen wir zunächst eine Aufgabe lösen, zu welcher wir den *Begriff eines einzelnen imaginären Punktes auf einer Geraden g oder auf einem Kegelschnitte k und seiner ideellen Darstellung* nötig haben. Aus dem Begriffe der ideellen Schnittpunkte eines Kegelschnittes $k$ mit einer denselben nicht reell schneidenden Geraden $g$ (I, 400) ergibt sich, daß wenn $P$, $P_1$ zwei zugeordnete Punkte einer (gleichlaufenden) Involution auf $g$ sind, unter der ideellen Darstellung eines imaginären Punktes auf $g$ in Bezug auf $P$, $P_1$ einer der beiden einander zugeordneten und durch $P$, $P_1$ harmonisch getrennten Punkte der Involution zu verstehen ist; und, wenn $P$, $p$ Pol und Polare zu $k$ sind, unter der ideellen Darstellung eines imaginären Punktes von $k$ auf einer durch $P$ gehenden Geraden, einer der beiden in Bezug auf

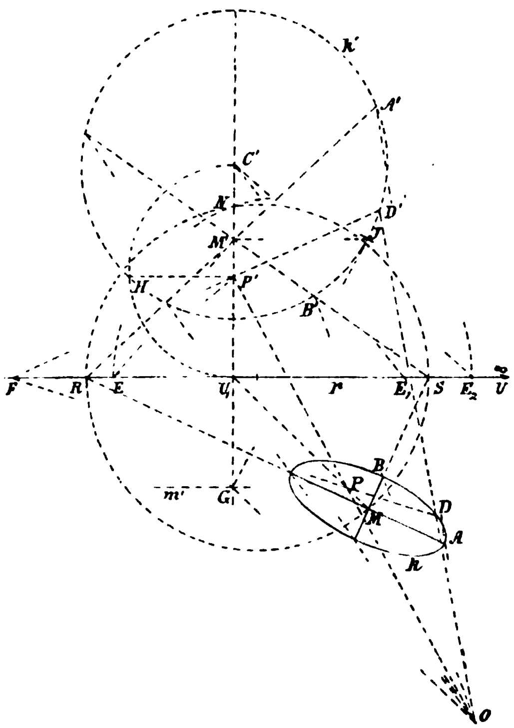
$k$ einander zugeordneten und durch $P$, $p$ harmonisch getrennten Punkte der $g$, welche also dem Kegelschnitte angehören, der dem $k$ in Bezug auf $P, p$ konjugirt ist. Die ideellen Punkte sind reell, wenn bezw. die Involution gleichlaufend ist, oder die $g$ den $k$ nicht reell schneidet, sonst imaginär (s. 96). Durch den gegebenen einen ist auch der zugeordnete ideelle Punkt bestimmt, sowie beide imaginären, von denen jeder einem der ideellen als entsprechend zugewiesen sei.

**116.** *Aufg. Die Axen eines Kegelschnittes $k$ zu bestimmen, welcher eine gegebene Gerade $p$ in zwei gegebenen (reellen oder imaginären) Punkten schneidet, durch einen weiteren gegebenen (reellen oder imaginären) Punkt $D$ geht, wenn noch der Pol $P$ von $p$ zu $k$ gegeben ist.*

Sind der Punkt $D$ und die Punkte auf $p$ und dann die aus $P$ nach ihnen gehenden Tangenten des $k$ reell, so kann man nach I, 378 verfahren; die folgende Auflösung ist aber anwendbar, mögen diese Punkte reell oder imaginär sein.

Fig. 52.

Fig. 52.




*Aufl.* Man lege durch die gegebenen Punkte der $p$ einen Kreis $k'$ und bestimme zu ihm den Pol $P'$ von $p$. Sind die Punkte der $p$ reell, so ist die Art der Ausführung selbstverständlich; sind sie aber imaginär, so seien sie durch zwei Paare zugeordneter Punkte $E$, $E_1$; $U$, $U_1$ gegeben. $U$ sei der unendlich ferne Punkt, also $U_1$ der Mittelpunkt der Involution. Ist $U_1$ nicht unmittelbar gegeben, so bestimme man ihn nach I, 302. Es müssen dann der Mittelpunkt $C'$ des Kreises $k'$, sowie der Pol $P'$ von $p$ zu $k'$ auf der $\perp p$ durch $U_1$ gezogenen Geraden liegen; wir können auf derselben $P'$ willkürlich wählen und finden dann $C'$ durch $E_1C' \perp EP'$, weil hierdurch $EP'$ die Polare von $E_1$ zu $k'$, und $E$, $E_1$ konjugirte Punkte in Bezug auf $k'$ werden.

$k'$ geht durch den Schnittpunkt $H$ von $P'H$ ($\perp U_1 P'$) mit dem Kreise, von welchem $U_1 C'$ ein Durchmesser. $k$ ist nun die Projektion von $k'$ mit der Kollineationsaxe $p$, und zwar die reelle oder imaginäre Projektion, je nachdem $D$ ein reeller oder ideeller Punkt von $k$ ist (85). Im letzteren Falle ist $k$ imaginär und seine ideelle Darstellung in Bezug auf $P$, $p$ ist der durch $D$ als reellen Punkt bestimmte Kegelschnitt, den wir daher als Auflösung für beide Fälle zu betrachten haben. Bei der Perspektivkollineation der reellen Kurven $k$ und $k'$ entspricht der Geraden $PD$ die $P'D'$, wenn sich beide Gerade auf $p$, in $F$, treffen; dem $D$ entspricht einer der Schnittpunkte, etwa $D'$, von $P'F$ mit $k'$; der zugehörige Kollineationsmittelpunkt ist dann der Schnittpunkt $O$ von $PP'$ und $DD'$. Der Mittelpunkt $M$ des $k$ ist der Pol der unendlich fernen Geraden $m$ der Ebene von $k$ und liegt daher auf der Polaren $U_1 P$ von $U$. Der $m$ entspricht die Gegenaxe $m'$ in der Ebene von $k'$, deren Schnittpunkt $G$ mit $U_1 P'$ man durch $OG \parallel U_1 P$ erhält, und dem $M$ entspricht der auf $U_1 P'$ liegende Pol $M'$ von $m'$ zu $k'$ ($J$ der Berührungspunkt einer Tangente aus $G$ an $k'$, $JM' \perp U_1 P'$). $M$ ergibt sich dann als Schnittpunkt von $OM'$ mit $U_1 P$. Die Involution $M$ konjugirter Durchmesser des $k$, und die Involution $M'$ konjugirter Sehnen des $k'$ sind perspektiv mit $p$ als Kollineationsaxe; zwei Paare zugeordneter Punkte sind $U$, $U_1$ und $E$, $E_2$, wenn $C'E_2 \perp EM'$. Diese Punktinvolution auf $p$ wird durch eine rechtwinklige Strahleninvolution aus dem Punkte $N$ der $U_1 P'$ projicirt, wenn $N$ auf dem Kreise vom Durchmesser $EE_2$ liegt. Beschreibt man nun einen Kreis durch $N$ und $M$, dessen Mittelpunkt sich auf $p$ befindet, und schneidet ihn mit $p$ in $R$, $S$, so sind $MR$, $MS$ die Axen von $k$; $M'R$, $M'S$ sind ihre entsprechenden Kreissehnen, aus deren Endpunkten $A'$, $B'$ durch Strahlen aus $O$ die Scheitel $A$, $B$ bestimmt werden. — Bei der Wahl von $P'$ auf $U_1 P'$ ist darauf zu achten, daß nicht $C'$ in $P'$ fällt, wodurch $k'$ ein Punkt würde; vielmehr muß $k'$ zu $k$ eine angemessene Größe erhalten.

Liegt $M$ auf $p$, so versagt das Verfahren; man gelangt aber dann einfacher zum Ziele für die Ellipse durch Affinität mit dem Kreise (I, 373 und 377), und für die Hyperbel durch Bestimmung der Asymptoten (I, 379 oder 371).

**117.** *Aufg. Die Axen der Projektion $l$ eines (reellen oder imaginären) Kegelschnittes zu bestimmen, der durch drei (reelle oder imaginäre) Punkte einer (reellen oder imaginären) Fläche zweiten Grades* **F** *geht, wenn der (reelle oder imaginäre) scheinbare Umriß $k$ der Fläche und die Projektion $C$, $D$, $E$ der drei Punkte gegeben sind.*

Oder, was dasselbe:

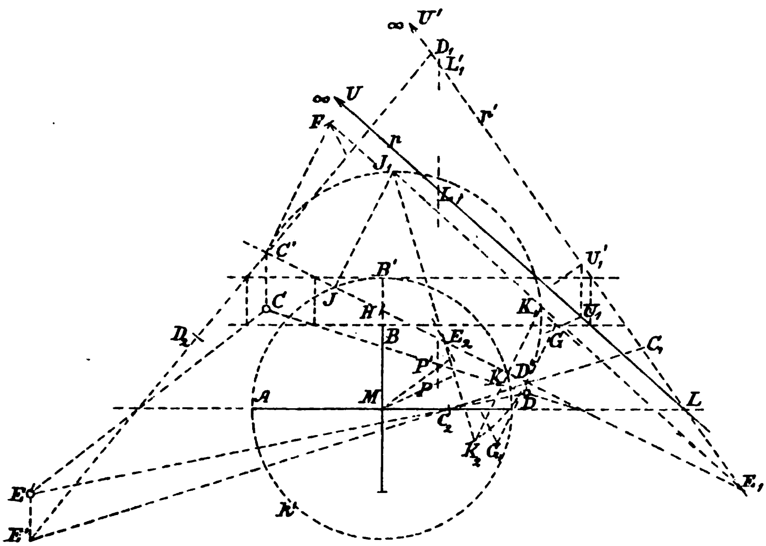
*Die Axen eines Kegelschnittes $l$ zu bestimmen, welcher durch drei gegebene (reelle oder imaginäre) Punkte $C$, $D$, $E$ geht und einen gegebenen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt $k$ in zwei Punkten berührt.*

Die Aufgabe ist auf die vorhergehende (116) zurückgeführt, sobald wir die (mehrdeutig bestimmte) Spur $p$ der Ebene der drei Punkte, d. i. auch die Berührungssehne der Kurven $k$ und $l$, sodann die auf ihr durch $k$ bestimmte Involution konjugirter Punkte, und den Pol $P$ der $p$ zu $k$ ermittelt haben. Die Verzeichnung eines Kegelschnittes soll dabei vermieden werden. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) *$k$ ist eine Ellipse, $C$, $D$, $E$ sind reelle innere Punkte derselben.* Die Aufgabe wird durch Kollineation mit einem über der (großen) Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise und nach Nr. 114 gelöst. Wir begnügen uns, in Bezug auf die Einzelheiten auf den folgenden Fall zu verweisen.

2) *$k$ ist eine Ellipse mit den Halbaxen $MA$, $MB$; $C$, $D$, $E$ sind reelle äußere Punkte derselben.* Wir bilden die kollineare Figur mit der Kollineationsaxe $MA$, worin der Ellipse $k$ der Kreis $k'$ vom Fig. 53.

Fig. 53.



Halbmesser $MA$ entspricht. Dem $B$ entspricht $B'$, einer Parallelen zu $MA$ durch $B$ eine solche durch $B'$, und vermittelst ihrer bestimmen wir zu dem Dreiecke $CDE$ das entsprechende $C'D'E'$. Die zu dem Umrisse $k'$ und den äußeren Punkten $C'$, $D'$, $E'$ gehörige Fläche **F** ist ein einschaliges Umdrehungshyperboloid, welches wir gleichseitig annehmen wollen. Legen wir die projicirende

Ebene von $C'D'$ in die Ebene **P** der Figur um, so kommen die Ordinaten von $C'$ und $D'$ in die zu $C'D'$ senkrechten Linien $C'F$, $D'GG_1$, deren Längen aus den durch sie gehenden Meridianhyperbeln ermittelt werden, z. B. für $C'F$, indem man auf $C'D'$ die $C'H = MA = a$ und $HF = MC'$ macht (I, 371, hier aus $x^2 - y^2 = a^2$). $FG$ und $FG_1$ bestimmen dann auf $C'D'$ die Punkte $E_1$, $E_2$. Ebenso bestimmt man auf $D'E'$ die Punkte $C_1$, $C_2$, auf $E'C'$ die $D_1$, $D_2$.

Wenn $C'D'$ den Kreis $k'$ in rellen Punkten $J$, $K$ schneidet, so kann man die Doppelpunkte $E_1$, $E_2$ der Involution $C'$, $D'$; $J$, $K$ außer durch das soeben angegebene Verfahren auch durch das der Nr. 114 finden, indem man über der größeren Strecke $C'D'$ als Durchmesser einen Kreis zeichnet und darin die Ordinaten $JJ_1$, $KK_1K_2$ zieht; $J_1K_1$, $J_1K_2$ gehen bezw. durch $E_1$, $E_2$. Jener Kreis $C'D'$ steht in keiner Beziehung zum Hyperboloide **F**. Dieses Verfahren ist bei der den $k'$ imaginär schneidenden Geraden $C'E'$ nur auf einem Umwege (s. 119) anwendbar. Das vorher angegebene Verfahren mit den Hyperbelordinaten kann also dazu dienen, *auf einer Geraden $C'E'$ das Punktepaar $D_1$, $D_2$ zu finden, welches zugleich einer ungleichlaufenden Involution von den Doppelpunkten $C'$, $E'$, und einer gleichlaufenden angehört, welche als die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf einen die $C'E'$ imaginär schneidenden Kreis $k'$ gegeben ist.*

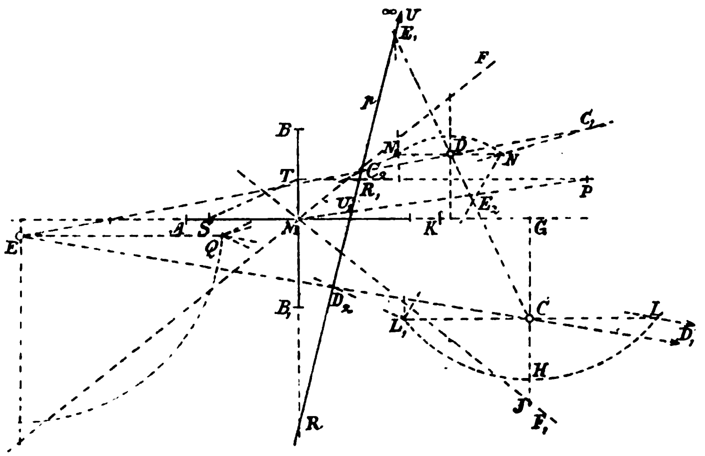
Man sucht nun zu jeder der vier Geraden, welche durch die drei Punkte je eines der drei Punktepaare $C_1$, $C_2$; $D_1$, $D_2$; $E_1$, $E_2$ geht, so zu $p' = C_1D_1E_1$, den Pol $P'$ und zwei Paare konjugirter Punkte in Bezug auf $k'$. Dem unendlich fernen $U'$ entspricht $U_1'$ ($MP'U_1' \perp p'$), dem Punkte $L$ auf $MA$ der Punkt $L_1'$ auf der durch $P'$ gehenden Senkrechten zu $MA$. Dann sucht man durch die Affinität zwischen $k'$ und $k$ zu $p'$, $P'$, $U'$, $U_1'$, $L$, $L_1'$ die entsprechenden Elemente $p$, $P$, $U$, $U_1$, $L$, $L_1$, so ist $l$ bestimmt durch $p$, $P$, die Involution $U$, $U_1$; $L$, $L_1$, und durch einen der Punkte $C$, $D$, $E$; seine Axen werden dann nach Nr. 116 ermittelt.

**118.** 3) *$k$ ist eine Hyperbel mit der reellen Halbaxe $MA$ und der ideellen $MB = MB_1$; $C$, $D$, $E$ sind reelle und alle innere, oder alle äußere Punkte der $k$.*

Fig. 54. Sind die Punkte, wie in der Figur, innere, so betrachtet man **F** als zweischaliges Umdrehungshyperboloid, sind sie äußere, als einschaliges; die Konstruktion ist in beiden Fällen im wesentlichen dieselbe. Die Asymptoten von $k$ sind $MF \parallel AB$ und $MF_1 \parallel AB_1$. Die auf der Ebene **P** der Figur senkrechte Ordinate eines Punktes $C$ der **F** ist durch den durch $C$ gehenden Parallelkreis bestimmt, des-

sen Projektion $CG \perp MA$, und dessen Halbmesser die Ordinate $GH$ der Hyperbel $k$ ist ($GJ$ = Ordinate der Asymptote, auf $MA$ die $GK = MB$, $KH = GJ$). Der in die **P** umgelegte Parallelkreis bestimmt die mit umgelegte Ordinate $= CL = - CL_1$. In gleicher

Fig. 54.



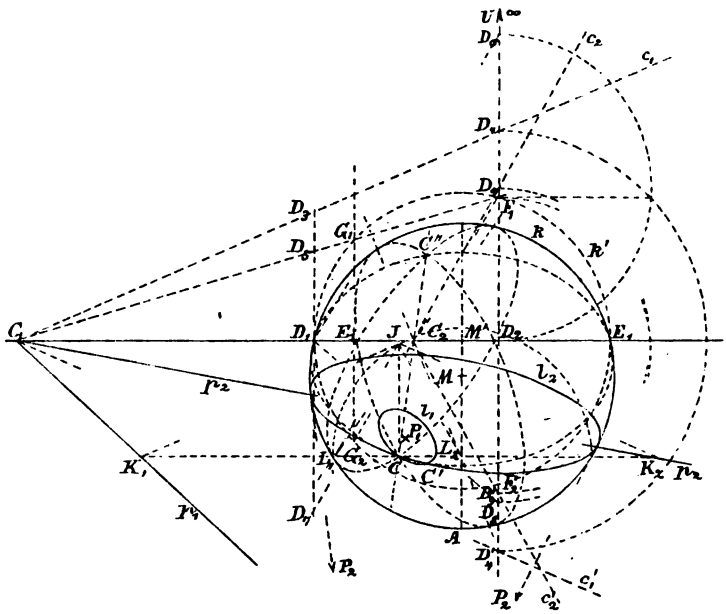
Weise werden die umgelegten Ordinaten von $D$ und $E$ bezw. $= DN = - DN_1$ und $EQ$ bestimmt. Auf $CD$ erhält man dann die Punkte $E_1$, $E_2$ durch $L_1 N_1$ und $L_1 N$, da offenbar die Ordinaten $CL$, $DN$ nur unter einander parallel, nicht aber $\perp CD$ gezogen sein müssen. Gezeichnet ist unter den vier Geraden $p$ diejenige $E_1 C_2 D_2$; ihrem unendlich fernen Punkte $U$ entspricht als konjugirt zu $k$ der Mittelpunkt $U_1$ ihrer Strecke zwischen den Asymptoten, und ihrem Schnittpunkte $R$ mit $MB$ der Punkt $R_1$, den man erhält, wenn man auf $MB$ den zu $R$ konjugirten Punkt $T$ bestimmt durch $MR \cdot MT = - MB^2$ (auf $MA$ die $MS = MB$, $ST \perp RS$), und die Polare von $R$ als $TR_1 \perp MB$ zieht. Der Pol $P$ von $p$ ist der Schnittpunkt von $MU_1$ mit $TR_1$. Der Kegelschnitt $l$ ist nun durch $p(U, U_1; R, R_1)$, $P$; $C$, $D$, $E$ überschüssig bestimmt.

**119.** 4) *$k$ ist ein reeller Kegelschnitt, $C$ ein reeller Punkt, $D$, $E$ sind imaginäre Punkte, gegeben durch eine gleichlaufende Involution auf einer Geraden.*

Nachdem wir bei reellen Elementen schon die verschiedenen Fälle für $k$ und $C$ verfolgt haben, genügt es, bei imaginären $D$, $E$ nur einen Fall für $k$ und $C$ zu betrachten. Es möge $k$ ein Kreis vom Fig. 55.
Mittelpunkte $M$ und vom Halbmesser $MA$, und $C$ ein innerer Punkt desselben sein. Die imaginären Punkte $D$, $E$ sind durch zwei Paare zugeordneter Punkte $D_1$, $D_2$; $E_1$, $E_2$ einer gleichlaufenden Involu-

tion auf einer Geraden gegeben; und indem auch $k$ auf dieser Geraden eine Involution konjugirter Punkte bestimmt, ist man imstande, nach I, 350 dasjenige Punktepaar $C_1$, $C_2$ zu bestimmen, welches beiden Involutionen zugehört. Doch kann man die Punkte $C_1$,

Fig. 55.



$C_2$ auch anders erhalten. In dem Falle, in welchem die Gerade den Kreis $k$ imaginär schneidet, sind sie Punkte desjenigen Kreises, welcher durch die beiden Punkte geht, aus deren jedem eine der Punktinvolutionen durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt wird, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt. In dem Falle dagegen, in welchem die Gerade den Kreis reell in Punkten $D_1$, $E_1$ schneidet, sucht man zuerst auf, oder gibt an diejenigen Punkte $D_2$, $E_2$, welche in der Involution der Geraden bezw. den Punkten $D_1$ und $E_1$ zugeordnet sind. Dann zeichnet man über der größeren der beiden Strecken $D_1E_1$, $D_2E_2$, hier über $D_1E_1$, als Durchmesser einen Kreis, zieht $D_2F_1$ und $E_2G_1 \perp D_1E_1$, schneidet sie mit dem Kreise bezw. in $F_1$, $F_2$ und $G_1$, $G_2$, so gehen $F_1G_1$ (und $F_2G_2$) durch $C_1$, und $F_1G_2$ (und $F_2G_1$) durch $C_2$. Denn wegen der gegebenen Involution oder wegen I, 279 ist

$$(D_1D_2E_1E_2) = (D_2D_1E_2E_1), \tag{1}$$

und weil durch die Konstruktion $C_1$, $C_2$ sowohl durch $D_1$, $E_1$, als durch $D_2$, $E_2$ harmonisch getrennt sind, gilt

$$-1 = (D_1 E_1 C_1 C_2) = (D_2 E_2 C_1 C_2) = (D_1 E_1 C_2 C_1) = (D_2 E_2 C_2 C_1); \quad (2)$$

daher $$(D_1 D_2 E_1 E_2 C_1 C_2) = (D_2 D_1 E_2 E_1 C_1 C_2), \quad (3)$$

indem an jede von zweien unter einander projektiven Punktreihen, so an (1), dieselben zwei Elemente zugefügt werden dürfen, so $C_1$, $C_2$ in (3), wenn diese neuen Elemente in der einen Reihe mit irgend zwei vorhergehenden zweimal dieselben Doppelverhältnisse erzeugen, wie die entsprechenden Elemente in der anderen Reihe, so in (2), da zwei neue Elemente durch zwei Doppelverhältnisse mit früheren eindeutig bestimmt sind. Da nun $C_1$, $C_2$ nach (3) ein Punktepaar der gegebenen Involution und durch die Konstruktion eines der Involution in Bezug auf den Kreis bilden, so sind sie die gesuchten Punkte.

Als Fläche F, welche dem Umrisse $k$ und dem inneren Punkte $C$ genügt, wählt man eine Kugel; diese wird von der projicirenden Ebene der $D_1 E_1$ in einem Kreise geschnitten, der in der Umlegung $k'$ (mit dem Mittelpunkte $M'$) ist, und der in unserem Falle mit einem schon gezeichneten Kreise zusammenfällt. In dieser umgelegten Ebene ziehe man nun durch $C_1$ und $C_2$ diejenigen Geraden, so $c_1$ durch $C_1$, welche die F (und den $k'$) in Punkten schneiden, deren Projektion die gegebenen Punkte $D$, $E$ sind, oder, da diese imaginär, diejenigen Geraden, auf welchen eine gleichlaufende Involution der in Bezug auf F (und $k'$) konjugirten Punkte stattfindet, deren Projektion $D_1$, $D_2$; $E_1$, $E_2$; $C_1$, $C_2$ ist. $C_1$, $C_2$ sind für jede durch $C_1$ oder $C_2$ gezogene Gerade die Projektionen konjugirter Punkte; es genügt daher zu bewirken, daß auch die Schnittpunkte $D_3$, $D_4$ von $c_1$ mit den zu $D_1 E_1$ gezogenen Senkrechten $D_1 D_3$, $D_2 D_4$ in Bezug auf $k'$ konjugirt sind. Dreht man die $c_1$ um $C_1$, so beschreibt sie auf diesen Senkrechten projektive Punktreihen $D_3 \ldots$, $D_4 \ldots$, in welchen sich $D_1$, $D_2$ und $D_5$, $F_1$ entsprechen. Andererseits bilden die zu den Punkten der Geraden $D_1 D_5$ in Bezug auf $k'$ konjugirten Punkte der Geraden $D_2 D_4$ eine mit beiden ersteren Punktreihen projektive Reihe; und man erhält diese Punkte, z. B. $D_6$ konjugirt zu $D_5$, indem man von $D_5$ die Polare zu $k'$, d. i. die aus dem Pole $D_1$ der $D_1 D_5$ auf $M' D_5$ gefällte Senkrechte $D_1 D_6$ zieht. Schneidet die Gerade $D_1 E_1$ den Kreis nicht reell, so bestimmt man $D_6$ als in der Polarebene von $D_5$ zu F liegend. Ist $U$ der unendlich ferne Punkt von $D_2 F_1$, so entsprechen in den beiden Reihen der $D_2 F_1$ den Punkten $D_2$, $U$, $F_1$ die Punkte $U$, $D_2$, $D_6$. Daher decken sich die Gegenpunkte in $D_2$, und man erhält die Doppelpunkte $D_4$, $D_4'$ vermittelst $D_2 D_4^2 = D_2 D_4'^2 = D_2 F_1 \times D_2 D_6$, was in der Figur ausgeführt ist; daher ist $C_1 D_4 = c_1$, $C_1 D_4' = c_1'$. Die beiden Strahlen $c_2$ aus $C_2$ sind imaginär, weil auf einer aus

einem inneren Punkte $C_2$ von $k'$ gezogenen Geraden keine imaginären Schnittpunkte $D, F$ mit $k'$ liegen können; wir werden sie nachher verfolgen.

Richtet man den Kreis $k'$ samt den Geraden $c_1$, $c_1'$ durch Drehung um $D_1E_1$ wieder in die zu **P** senkrechte Ebene auf, so gelangen $c_1$, $c_1'$ bezw. nach $(c_1)$, $(c_1')$. Nun lege man durch je eine der Geraden $(c_1)$, $(c_1')$ und durch je einen der beiden Punkte $(C)$ der Kugel **F** eine Ebene, also vier Ebenen, deren vier Schnittlinien mit **F** zwei verschiedene Projektionen besitzen. Um ihre Spuren $p_1$, $p_2$ in **P** zu erhalten, legen wir durch $C$ eine zu **P** senkrechte Ebene von der Spur $CK_1$, die wir $\parallel D_1E_1$ machen wollen. Diese Ebene schneidet die **F** in einem Kreise, dessen Umlegung in **P** auch die Umlegungen jener beiden Punkte $(C)$, von denen $J$ die eine ist, bestimmt. Die Parallelen aus $J$ zu $c_1$ und $c_1'$ geben auf $CK_1$ Punkte $K_1$, $K_2$, und dadurch $C_1K_1 = p_1$ und $C_1K_2 = p_2$ als die beiden Spuren jener vier Ebenen. Die Pole von $p_1$ und $p_2$ zu $k$ sind bezw. $P_1$ und $P_2$, und damit sind die gesuchten beiden Kurven $l_1$, $l_2$ bestimmt, als perspectiv zu $k$ bezw. mit $p_1$, $P_1$ und $p_2$, $P_2$ als Axe und Mittelpunkt der Kollineation, und gehend durch $C$. Da $k$ ein Kreis, konnte die eine (kleine) Axe jeder Kurve bezw. auf $MP_1$ ($\perp p_1$) und auf $MP_2$ ($\perp p_2$) und dann die andere Axe durch jene Kollineation leicht ermittelt werden. $l_1$ und $l_2$ schneiden sich, außer in $C$, noch in der Projektion $C'$ des zweiten Schnittpunktes der Geraden $C_1(C)$ mit **F**.

Sucht man nun im Strahlenbüschel $C_2$ diejenigen (imaginären) Strahlen, welche auf den Geraden $D_1D_5$ und $D_2F_1$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kreis $k'$ einschneiden, so erhält man $c_2$ und $c_2'$ als deren ideelle Darstellungen in Bezug auf $C_2E_1$, $C_2U$, so daß $c_2$, $c_2'$ konjugirt in Bezug auf **F** (und $k'$) und durch $C_2E_1$, $C_2U$ harmonisch getrennt sind. ($C_2F_1$ schneidet die $D_1D_5$ in $D_7$, $D_1D_8 \perp M'D_7$, $D_8$ auf $D_2F_1$; $D_2D_9^2 = D_2D_9'^2 = - D_2F_1 \times D_2D_8$ $c_2 = C_2D_9$, $c_2' = C_2D_9'$.) Die Ebenen, welche durch je einen dieser imaginären Strahlen und durch je einen der beiden (reellen) Punkte $(C)$ gehen, sind die Doppelebenen je eines involutorischen Ebenenbüschels mit einer der beiden reellen Axen $C_2(C)$, welches durch die zwei Paare zugeordneter Strahlen $C_2E_1$, $C_2(U)$; $(c_2)$, $(c_2')$ bestimmt ist, und deren Spuren in **P** die Strahlen $C_2E_1$, $C_2C$, $C_2L_1$, $C_2L_2$ bilden ($L_1$ und $L_2$ auf $CK_1$, $JL_1 \parallel c_2$, $JL_2 \parallel c_2'$). Die Ebenen dieser beiden Ebenenbüschel schneiden die **F** in Kreisen, deren Projektionen auf $\mathbf{P}_1$ paarweise in Ellipsen zusammenfallen, welche alle durch die zwei Projektionen $C$, $C''$ der vier Schnittpunkte der Axen der Büschel mit **F** gehen. Die Ellipsen berühren den Kreis $k$ in

den Punkten der zugehörigen Spuren, und sind hierdurch und durch ihren Punkt $C$ (und $C''$) bestimmt. Sie sind gestrichelt gezeichnet. Man bemerkt, daß sich die zwei Projektionen der in den vier ideellen Doppelebenen liegenden Kreise in zwei Punkten der Geraden $D_1E_1$ schneiden. Die Ellipse $C_2C$ ist eine Gerade.

**120.** 5) *$k$ ist ein reeller Kegelschnitt, $C$ liegt auf einer anderen Seite von $k$, wie $D$ und $E$.* Nimmt man **F** so an, daß $D$, $E$ die Projektionen je zweier reellen Punkte $(D)$, $(E)$ der **F** sind, so ist $C$ die reelle Projektion zweier konjugirt-imaginären Punkte $(C)$ der **F**, nämlich der imaginären Doppelpunkte der Involution konjugirter Punkte in Bezug auf **F** auf der Geraden $C\,(C)$. Die vier Punkte $(D)$, $(E)$ bestimmen vier Gerade, welche zwei verschiedene Spuren $C_1$, $C_2$ besitzen. Jede der Geraden ist die Axe eines involutorischen Ebenenbüschels, welches die Involution $C(C)$ projicirt. Die Schnittkurven der Ebenen je zweier dieser Büschel haben gemeinschaftliche Projektionen auf **P**, nämlich Kegelschnitte, welche durch $D$, $E$ gehen, und deren Kollineationsaxen (und Berührungssehnen) mit $k$ ein Strahlenbüschel $C_1$ oder eines $C_2$ bilden. Die imaginären Doppelebenen jener Ebenenbüschel liefern Schnittkurven mit **F**, die man etwa die Doppelkegelschnitte jener Systeme $C_1DE$, $C_2DE$ nennen kann, welche die Auflösung unserer Aufgabe bilden. — Nimmt man dagegen **F** so an, daß $(C)$ zwei reelle, und $(D)$, $(E)$ vier imaginäre Punkte sind, so sind dieselben $C_1, C_2$ die beiden reellen Punkte, aus welchen sich die gleichlaufenden Involutionen $D(D)$ und $E(E)$ aufeinander projiciren und man erhält zwei Kegelschnittsysteme $CC_1C'$, $CC_2C''$, wo $C'$, $C''$ die Projektionen der beiden weiteren reellen Schnittpunkte bezw. von $(C)C_1$, $(C)C_2$ mit **F** sind. Die vier imaginären Doppelkegelschnitte sind die Auflösungen der Aufgabe.

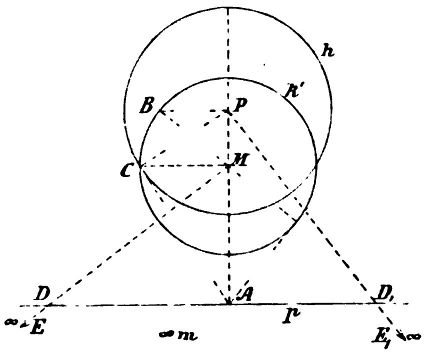
**121.** Für die Auflösung der folgenden Aufgabe haben wir nötig den

*Satz. Auf einer Geraden $p$ ist die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf einen imaginären Kreis $k$, dessen Mittelpunkt $M$ ist, und zu welchem $P$ den Pol von $p$ bildet, dieselbe, wie diejenige in Bezug auf einen reellen Kreis $h$, dessen Mittelpunkt $P$ ist, und zu welchem $M$ den Pol von $p$ bildet.*

*Bew.* Sei $k$ gegeben durch seinen ideellen Mittelpunktkreis $k'$, Fig. 56. so findet man den Pol $P$ von $p$ zu $k$ auf der zu $p$ gefällten Senkrechten $MA$ mit dem Fußpunkte $A$, indem man nach der Tangente aus $A$ an $k'$ anlegt, dann nach dem dazu senkreckten Durchmesser von $k'$ dessen dem Berührungspunkte gegenüberliegenden Punkt $B$ bezeichnet, und $P$ durch $BP \parallel p$ bestimmt. Denn die Pole von $p$ zu $k$ und zu $k'$ liegen symmetrisch zu $M$ (I, 406, 1)). Oder man

zieht $\perp MA$ den Halbmesser $MC$ des $k'$, so ist $CP \perp AC$, weil nach der ersten Konstruktion $MP \times MA = -MC^2$ sein muß. Dann ist der aus $P$ als Mittelpunkt durch $C$ gelegte Kreis derjenige $h$, zu welchem $M$ der Pol von $p$ ist, da $\sphericalangle ACP = 90^0$. Man findet nun auf $p$ zu einem Punkte $D$ den konjugirten $D_1$ in Bezug auf $k$, indem man zu dem Mittelpunktsstrahle $MD$ aus dem Pole $P$ die Senkrechte $PD_1$ fällt (da die unendlich ferne Gerade die Kollineationsaxe zwischen $k$ und $k'$ ist); und zu $D_1$ den konjugirten in Bezug auf $h$, indem man zu dem Mittelpunktsstrahle $PD_1$ aus dem Pole $M$ die Senkrechte $MD$ fällt. Also sind $D$, $D_1$ in Bezug auf $k$ und $h$ konjugirt, w. z. b. w.

Fig. 56.




Der Satz läßt sich leicht projektiv verallgemeinern und unabhängig von dem Reell- oder Imaginärsein aussprechen und auch unmittelbar beweisen. Er lautet dann:

*Satz. Sind in einer Ebene die Pole von zwei Geraden m und p zu einem reellen oder imaginären Kegelschnitte k bezw. M und P, und zu einem anderen reellen oder imaginären Kegelschnitte h bezw. P und M, und ist die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf k und h auf der m eine gemeinsame, so ist sie auch auf der p eine gemeinsame.*

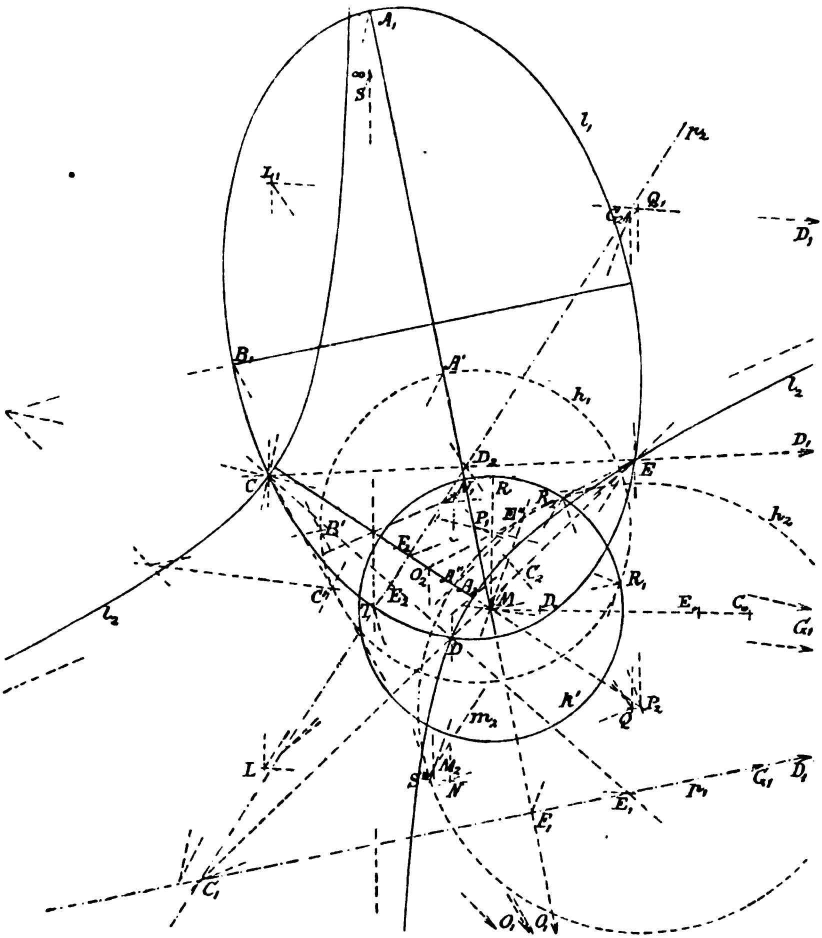
Sind nämlich $E$, $E_1$ zwei in Bezug auf $k$ und $h$ konjugirte Punkte auf $m$, und schneiden $ME$, $PE_1$ die $p$ bezw. in $D$, $D_1$, so ist $PE_1$ die Polare von $D$ zu $k$ (weil $P$ und $E_1$ bezw. die Pole von $p$ und $ME$ sind), und ebenso $ME$ die Polare von $D_1$ zu $h$, also sind $D$, $D_1$ konjugirt in Bezug auf $k$ und $h$.

**122.** 6) *k ist ein imaginärer Kegelschnitt.*

Fig. 57. Nehmen wir die drei Punkte $C$, $D$, $E$ reell an; die anderen Fälle in Bezug auf die Punkte bedingen Abänderungen, wie vorher. $k$ möge ein imaginärer Kreis mit dem Mittelpunkte $M$ sein, dessen ideeller Mittelpunktskreis $k'$ den Halbmesser $MR$ besitze. Die Fläche **F**, deren Umriß bei senkrechter Projektion der imaginäre Kreis $k$ als Hauptschnitt bildet, ist ein zweischaliges Umdrehungshyperboloid, dessen Meridianhyperbel gleichseitig sein möge, so daß die reelle auf der Projektionsebene **P** senkrechte Halbaxe $= MR$ ist. Die Ordinate eines Punktes $C$ erhält man gleich der Hypotenuse $C_0R$ eines rechtwinkeligen Dreiecks $RMC_0$, worin $MC_0 = MC$.

Zieht man wieder (118) durch $C$, $D$, $E$ unter nicht zu kleinen Winkeln gegen jede der Seiten dieses Dreiecks Parallele, und trägt auf ihnen jene Ordinaten $CL = CL_1 = C_0R$, $DN = DN_1 = D_0R$, $EQ = EQ_1 = E_0R$ auf, so erhält man auf $DE$ die Punkte $C_1$, $C_2$ bezw. durch $NQ$, $N_1Q$; ebenso $D_1$, $D_2$, $E_1$, $E_2$.

Fig. 57.



Von den vier Spuren der acht schneidenden Ebenen in **P** haben wir $p_1 = C_1D_1E_1$ und $p_2 = C_1D_2E_2$ verzeichnet, und wollen die Projektionen $l_1, l_2$ der Schnittkurven der durch sie gehenden Ebenen bestimmen, die bezw. eine Ellipse und eine Hyperbel sein werden.

Der Pol $P_1$ der $p_1$ zu $k$ wird auf der aus $M$ auf $p_1$ gefällten Senkrechten, deren Fußpunkt $F_1$ sei, erhalten, durch $F_1R_1P_1 = 90^0$ ($MR_1$ ein zu $MF_1$ senkrechter Halbmesser des $k'$). Der reelle

aus $P_1$ durch $R_1$ gezogene Kreis $h_1$ besitzt nach der vorigen Nr. auf $p_1$ dieselbe Involution konjugirter Punkte, wie $k$ und daher wie $l_1$, so daß auch $l_1$ und $h_1$ perspektiv liegen mit $p_1$ als Kollineationsaxe; die Pole der $p_1$ zu $l_1$ (und $k$) und $h_1$ sind bezw. $P_1$ und $M$. Der Geraden $CP_1$ in $l_1$, welche die $p_1$ in $G_1$ trifft, entspricht daher die $G_1 M$ in $h_1$, von deren beiden Schnittpunkten mit $h_1$ der $C'$ dem $C$ entsprechen möge; daher bestimmt $CC'$ auf $P_1 M$ den Kollineationsmittelpunkt $O_1$ von $l_1$ und $h_1$. Man ermittelt nun die Scheitel der (großen) Axe auf $MP_1$, so $A_1$ aus $A'$ des $h_1$ durch $C'A'$ und $CA_1$, welche sich auf $p_1$ schneiden. Die kleine Axe halbirt sie senkrecht; ihre entsprechende Linie in $h_1$ ist in der Figur vermittelst $P_1 C$, $MC'$ bestimmt, wonach sich $B_1$ aus $B'$ ergibt. Die aus den vier Scheiteln verzeichnete Ellipse $l_1$ geht durch $C$, $D$, $E$.

Entsprechend bestimmt man von $p_2$ den Pol $P_2$ zu $k$ ($F_2 R_2 P_2 = 90^0$), zieht aus $P_2$ durch $R_2$ den Kreis $h_2$, der mit $l_2$ perspektiv liegt mit $p_2$ als Axe und $O_2$ als Mittelpunkt der Kollineation ($O_2$ auf $MP_2$ und $EE''$, $P_2 E G_2$ und $ME'' G_2$ entsprechend), sucht die Gegenaxe $m_2$ im Systeme von $h_2$ als entsprechend der unendlich fernen Geraden $m$ im Systeme von $k$ ($O_2 M_2 \parallel EP_2$ trifft die $E''M$ in $M_2$, $m_2 \parallel p_2$ durch $M_2$), und erhält $l_2$ als Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem $m_2$ zwei, einen oder keinen reellen Punkt mit $h_2$ gemein hat. In unserem Falle sind es zwei, wie $S''$; man zieht in ihnen die Tangenten an $h_2$, wie $S''T$, deren Entsprechende, wie $ST$ ($\parallel O_2 S''$) die Asymptoten der $l_2$ sind. Ein Scheitel $A_2$ wird als entsprechend dem $A''$ bestimmt.

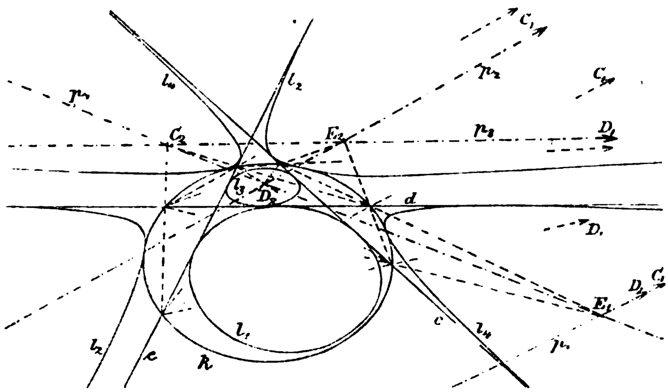
**123.** *Aufg. Einen Kegelschnitt $l$ zu bestimmen, welcher einen gegebenen Kegelschnitt $k$ in zwei Punkten berührt und außerdem* 1) *drei gegebene Gerade $c$, $d$, $e$ berührt,* 2) *zwei gegebene Gerade $c$, $d$ berührt und durch einen gegebenen Punkt $E$ geht,* 3) *eine gegebene Gerade $c$ berührt und durch zwei gegebene Punkte $D$, $E$ geht.*

*Aufl.* Man betrachtet wieder $k$ als Umriß einer Fläche zweiten Grades **F**, einen Punkt als Projektion zweier Punkte der **F**, eine Gerade als Projektion eines Kegelschnittes der **F**, daher den Kegelschnitt $l$ als Projektion eines ebenen Schnittes von **F**, dessen Ebene durch je einen der bestimmten Punkte geht und jeden der gegebenen Kegelschnitte berührt.

Fig. 58. 1) Die Geraden $c$, $d$, $e$ mögen zunächst den Kegelschnitt $k$ *in reellen Punkten* schneiden. Die durch $c$ und $d$ dargestellten Kegelschnitte ($c$) und ($d$) der **F** werden auf einander projicirt durch zwei Kegel (86), deren Spitzen die Schnittpunkte $E_1$, $E_2$ je zweier, von $c$, $d$ verschiedenen, Gegenseiten des durch $c$ und $d$ auf $k$ bestimmten vollständigen Vierecks sind. Jede Ebene, deren Schnittlinie mit **F**

die beiden Kegelschnitte $(c)$, $(d)$ berühren soll, muß einen dieser Kegel berühren, ihre Spur in der Projektionsebene **P** (der Figur) muß daher durch $E_1$ oder durch $E_2$ gehen. Ebenso bestimmen $d$, $e$ zwei Kegelspitzen $C_1$, $C_2$; $e$, $c$ zwei solche $D_1$, $D_2$. Die Spuren der

Fig. 58.



schneidenden Ebene sind daher $p_1 = C_1 D_1 E$, $p_2 = C_1 D_2 E_2$, $p_3 = D_1 E_2 C_2$, $p_4 = E_1 C_2 D_2$, durch welche dann bezw. die Kegelschnitte $l_1, l_2, l_3, l_4$ bestimmt sind. In unserem Falle liegen zwei dieser Kurven im Inneren, zwei im Äußeren von $k$, woraus hervorgeht, daß man die Fläche **F** sowohl als eine Nichtregelfläche, wie als eine Regelfläche ansehen muß. Jede der Geraden $c$, $d$, $e$ stellt dann einen Kegelschnitt der einen, und einen der anderen Fläche dar, jeder Punkt, wie $C_1$, $C_2$, ist die Spitze von zwei projicirenden Kegeln, und zu einer Geraden $p$, z. B. zu $p_2 = C_1 D_2 E_2$, muß für $C_1$, $D_2$, $E_2$ jedesmal derjenige Kegel genommen werden, in dessen Äußerem sich die $p$, hier $p_2$, befindet, damit durch diese Gerade an jeden der Kegel Berührungsebenen gelegt werden können.

Schneiden die $c$, $d$, $e$ den $k$ *imaginär*, so kann man die Punkte $E_1$, $E_2$, welche auf der Polaren $e_1$ der Schnittlinie der projicirenden Ebene von $c$ und $d$ zu **F**, d. i. auch der Polaren des Schnittpunktes $c$, $d$ zu $k$, liegen, nicht auf die eben betrachtete Art finden. Von den Kegelschnitten $(c)$ und $(d)$, welche aus $E_1$ und $E_2$ auf einander projicirt werden sollen, enthält aber die projicirende Ebene jener Polaren $e_1$ Punkte, durch deren Verbindungslinien $E_1$, $E_2$ bestimmt werden können. Daraus folgt aber, daß $E_1$, $E_2$ sowohl durch die Punkte $(e_1 c)$, $(e_1 d)$, als durch die beiden (reellen) Punkte $(e_1 k)$ harmonisch getrennt werden (114), und daher mittelst eines Kreises über $(e_1 c)$ $(e_1 d)$ als Durchmesser mittelst der Ordinaten in den zwei Punkten $(e_1 k)$ gefunden werden können.

Schneiden die Geraden $c$, $d$, $e$ den $k$ zum Teil *reell*, zum Teil *imaginär*, so werden die Kegelschnitte $l$ imaginär, indem diejenigen Kegel imaginär werden, welche zwei solche Kegelschnitte der **F** auf einander projiciren, von denen der eine durch eine den $k$ reell, der andere durch eine den $k$ imaginär schneidende Gerade dargestellt ist.

Dieser Fall entspricht reciprok dem Falle der Nr. 120, in welchem die drei gegebenen Punkte zum Teil außerhalb, zum Teil innerhalb des $k$ lagen. Überhaupt läßt sich unsere Aufgabe *reciprok* auf diejenige der Nr. 114 zurückführen, und es lassen sich ebenso viele Fälle, wie dort, unterscheiden. Wir begnügen uns mit den zwei Hauptfällen, die wir aber unmittelbar gelöst haben, wie es in allen Fällen möglich ist.

2) *Soll der Kegelschnitt $l$ die Geraden $c$ und $d$ berühren und durch den Punkt $E$ gehen*, so lege man an jeden der Kegel, welche die Kegelschnitte $(c)$ und $(d)$ auf einander projiciren, die zwei Berührungsebenen durch jeden der Punkte $(E)$; die vier Spuren dieser acht Ebenen sind die vier Geraden $p$.

3) *Soll $l$ die Gerade $c$ berühren, und durch die Punkte $D$ und $E$ gehen*, so lege man durch jede der vier Geraden $(D)(E)$ zwei berührende Ebenen an den Kegelschnitt $(c)$; die vier Spuren dieser acht Ebenen sind die Geraden $p$.

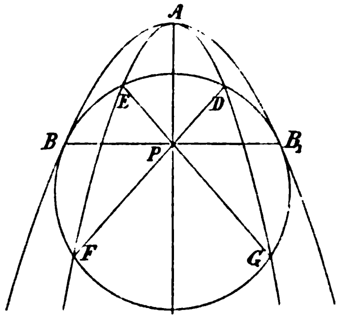
**124.** *Alle Flächen zweiten Grades außer dem hyperbolischen Paraboloide werden durch zwei Schaaren paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten.* Bei den Umdrehungsflächen fallen beide Schaaren in der einen Schaar der Parallelkreise zusammen.

Denn legt man eine Kugel **K**, welche die Fläche zweiten Grades **F** in zwei Punkten $B$ und $B_1$ berührt, und mit ihr noch einen weiteren Punkt $D$ gemein hat, so enthält die Ebene $BB_1D$ einen Kreis der **F**. Denn diese Ebene schneidet **K** in einem Kreise und **F** in einem Kegelschnitte, welcher mit dem Kreise die drei Punkte $B$, $B_1$, $D$ und die Tangenten in $B$ und $B_1$ gemein hat, also mit ihm zusammenfällt. Solche Kugeln kann man bei dem Ellipsoide und dem einschaligen Hyperboloide koncentrisch mit **F** legen. Gelte bei dem *Ellipsoide* für die Halbaxen $a > b > c$, so berührt die Kugel, welche die Axe $2b = BB_1$ zum Durchmesser hat, in den Endpunkten $B$, $B_1$ die Fläche, und hat mit der Hauptebene $ac$ einen Kreis gemein, der die Ellipse $AC$ in vier Punkten $D, E, F, G$ schneidet, welche zu zwei die Endpunkte von zwei Durchmessern $DF$, $EG$ der Ellipse $AC$ bilden; die Ebenen $DFB$ und $EGB$ und alle damit parallelen schneiden dann das Ellipsoid in Kreisen, und bilden jene beiden Schaaren, deren Ebenen also mit der mittleren Axe $2b$ parallel liegen. Bei dem *einschaligen Hyperboloide*, dessen

beide reelle Halbaxen $b$ und $c$ sind, lege man, wenn $b > c$ ist, die Kugel vom Durchmesser $2b$, und findet so zwei mit $2b$ parallele Ebenenschaaren.

Bei dem *elliptischen Paraboloide* oder dem *zweischaligen Hyperboloide* lege man aus einem Punkte der Axe $AP$, welche durch den Scheitel $A$ geht, als Mittelpunkt eine Kugel, welche von den beiden durch $A$ gehenden Hauptschnitten denjenigen vom größeren Parameter in den Punkten $B$ und $B_1$ berührt, und daher den anderen dieser beiden Hauptschnitte, der in der Zeichnung um $AP$ in die Ebene des ersten umgelegt gedacht ist, in den vier Punkten $D$, $E$, $F$, $G$ trifft. Es sind aber nicht vier, sondern nur zwei solche durch $B$, $B_1$ gehende Kreise möglich, weil jene vier Punkte paarweise ($DF$, $EG$) mit $BB_1$ in derselben Ebene, und mit dem Schnittpunkte $P$ der $BB_1$ und der $AP$ in derselben Geraden liegen. So muß der Schnittkreis $BB_1D$ außer $D$ noch einen Punkt der Hauptebene $DAF$ enthalten, der also jenem Kreise $DEFG$ und der Parabel $AD$ gemeinsam ist, d. i. einen weiteren jener vier Punkte. Dadurch sind jene beiden Schaaren bestimmt. Fig. 59.

Fig. 59.




Das *hyperbolische Paraboloid* läßt keine Ellipsen (95), also auch keine Kreise zu.

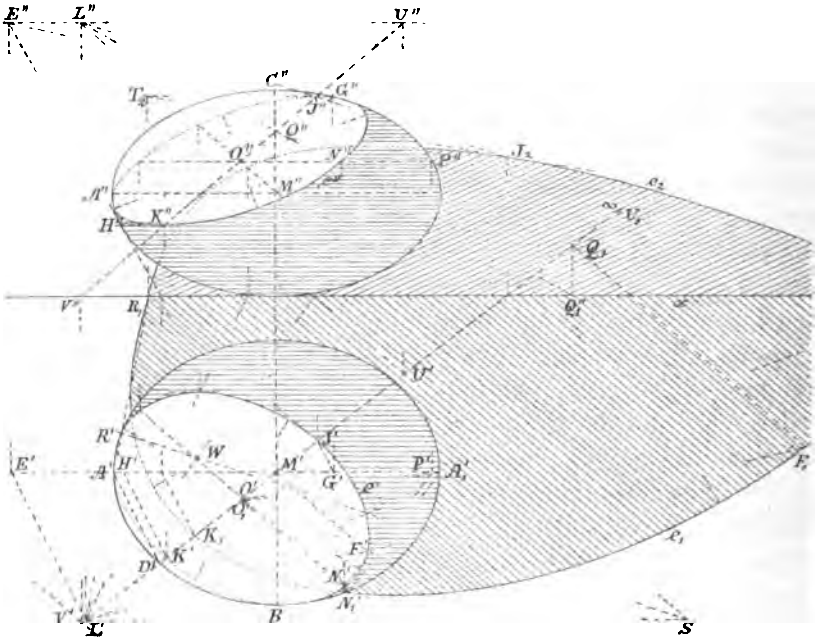
**125.** *Aufg. An ein Ellipsoid* **F** *aus einem außerhalb desselben gegebenen Punkte L einen berührenden Kegel zu legen,* oder: *Von einem Ellipsoide* **F** *für einen leuchtenden Punkt L die Eigenschattengrenze e und die Schlagschattengrenzen* $e_1$ *und* $e_2$ *auf* $\mathbf{P}_1$ *und* $\mathbf{P}_2$ *zu bestimmen.*

*Aufl.* Es seien die Halbaxen $MA \parallel x$, $MB \perp \mathbf{P}_2$, $MC \perp \mathbf{P}_1$ gestellt. Die Ellipsen $AB$, $AC$ sind bezw. der erste und zweite Umriß; sie sollen verzeichnet werden, da es sich hier um eine Veranschaulichung handelt, wie die Forderung der Schattenbestimmung zeigt. Sind sie aber verzeichnet, und zwar mittelst der Scheitelkrümmungskreise und des Kurvenlineals durch scharfe Bleistiftlinien, so ist es vorteilhaft, nicht nur in Bezug auf die Kürze, sondern auch (wegen der dadurch erreichbaren grösseren Stetigkeit) in Bezug auf die Genauigkeit, sie zu den weiteren Konstruktionen zu benutzen und nicht durch Konstruktionen mittelst des Kreises zu umgehen, wie es in anderen Fällen zweckmäßig erscheint. Fig. 60.

Eine durch $L$ und $MC = c$ gelegte Ebene ist eine solche

schiefer Symmetrie zu **F** und zu $L$, also auch zu $e$, wobei die Symmetriestrahlen die Richtung $M'F'$ besitzen, welche zu der Ebene $Lc$ in Bezug auf **F** konjugirt ist, sowie zu $L'M'$ in Bezug auf die Ellipse $A'B'$, und welche durch konjugirte Sehnen der Ellipse ermittelt wird. Diese Ebene $Lc$ schneidet die Ellipse $AB$ im Punkte $D$ und die **F** in einer Ellipse $DC$ mit den Halbaxen $MD$, $MC$.

Fig. 60.




Projicirt man diese Ellipse in den Hauptschnitt $AC$, so geschieht dies durch Projicirende $\parallel DA$, und zugleich projicirt man $L$ in die Ebene dieses Hauptschnittes nach $E$ durch $LE \parallel DA$. Man bestimme dann die Berührungspunkte $G$, $H$ der aus $E$ an die Ellipse $AC$ gezogenen Tangenten, projicire sie auf die Ebene $Lc$ zurück nach $J$, $K$ durch $GJ \parallel HK \parallel AD$. $JK$ ist nun ein Durchmesser der Berührungskurve, deren Tangenten in $J$, $K$ in beiden Projektionen parallel bezw. zu $M'F'$ und $x$ laufen; parallel mit diesen ist auch der zu der $JK$ konjugirte, durch deren Mitte $O$ gehende Durchmesser $2 \cdot ON$ ($L''O''M''$ eine Gerade). Ein Endpunkt $N$ dieses Durchmessers ist ein Schnittpunkt desselben mit **F** oder mit derjenigen Ellipse der **F**, welche in der durch $ON \parallel \mathbf{P}_1$ gehenden Ebene liegt und welche den auf dem Hauptschnitte $ACA_1$ liegenden Punkt $P$ zu einem Scheitel hat. Um die Verzeichnung dieser Ellipse zu vermeiden, projicire man sie in den Hauptschnitt $AB$, der mit ihr

ähnlich und ähnlich gelegen und im Grundriß mit ihr koncentrisch ist. Der Projektionsmittelpunkt liegt auf der Axe $c$, im Grundriß in $M'$. Projicirt man zugleich die Gerade $ON$, so projicirt sich $O'$ auf $M'O'$ in $O_1'$, wenn $A_1'O_1' \parallel P'O'$, $O'N'$ in die zu ihr parallele $O_1'N_1'$, deren Schnittpunkt $N_1'$ mit der Ellipse $A'B'$ sich dann zurück auf $O'N'$ in $N'$ projicirt, durch $M'N_1'N'$, oder genauer durch $P'N' \parallel A_1'N_1'$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $OJ$, $ON$ kann man nun in jeder Projektion die Axen von $e'$ und $e''$ bestimmen (I, 377); dieselben sind in der Figur bezeichnet. $e'$ berührt die Ellipse $A'B'$ in denselben Punkten, wie die aus $L'$ an $A'B'$ gezogenen Tangenten, $e''$ die $A''C''$ in denselben, wie die Tangenten aus $L''$.

Um den *Schlagschatten* $e_1$ von $e$ auf $\mathbf{P}_1$, der in unserem Falle eine *Ellipse* ist, zu bestimmen, suche man von $J$, $K$ die Schatten $J_1$, $K_1$ ($J_1$ nicht verzeichnet), welche auf $L'M'$ liegen und aus der zweiten Projektion vermittelst der Tangenten aus $E''$ an $A''C''$ erhalten werden. Die Tangenten in $J_1$ und $K_1$ an $e_1$ sind parallel zu $O'N'$, daher ist $J_1K_1$ ein Durchmesser der $e_1$, und der zu $J_1K_1$ konjugirte Durchmesser geht durch die Mitte $Q_1$ von $J_1K_1$ und ist $2 \cdot Q_1F_1 \parallel O'N'$. $Q_1$ ist aber der Schatten des Punktes $Q$ der $JK$, und es kann $Q''$ durch den Strahl $L''Q_1''$ bestimmt werden, einfacher aber und genauer durch die Beachtung, daß $Q$ auf $c$ liegt, also $M'$ zur ersten Projektion hat. Denn bezeichnet man den unendlich fernen Punkt von $J_1K_1$ mit $U_1$, so ist $U_1$ der Schatten von $U$ auf $JK$, wobei $L''U'' \parallel x$. Da nun $K_1Q_1J_1U_1$ vier harmonische Punkte sind, so müssen auch $K''Q''J''U''$ vier solche bilden; und da zu der Schnittkurve der Ebene $Lc$ mit $\mathbf{F}$ die $KJ$ die Polare von $L$ ist, muß der durch $K$ und $J$ von $U$ harmonisch getrennte Punkt $Q$ der Pol von $LU$ sein, also auf $c$ liegen. Man erhält daher $Q_1F_1$ aus der zu $O'N'$ parallelen Halbsehne $M'F'$ der $e'$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $Q_1K_1$, $Q_1F_1$ bestimmt man dann die Axen von $e_1$. Berührt oder schneidet die durch $L \parallel \mathbf{P}_1$ gelegte Ebene die $\mathbf{F}$, so ist $e_1$ eine *Parabel* oder *Hyperbel*, deren unendlich fernen Punkte in den aus $L \parallel \mathbf{P}_1$ an $\mathbf{F}$ gezogenen Tangenten liegen, und deren Asymptoten im letzteren Falle durch $Q_1$ gehen.

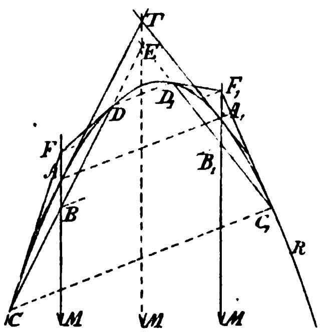
Den Schlagschatten $e_2$ auf $\mathbf{P}_2$ könnte man entsprechend mittelst des in $L''M''$ liegenden Durchmessers von $e''$ ermitteln; da aber nur ein kleiner Teil von $e_2$ sichtbar ist und der Mittelpunkt von $e_2$ weit entfernt liegt, wurden nur einige Punkte mit ihren Tangenten bestimmt, so $J_2$, für welchen die Tangente durch die zweite Spur $T_2$ der Tangente der $e$ in $J$ geht. Aus $L'$ und $L''$ gehen gemein-

schaftliche Tangenten an $e'$ und $e_1$, bezw. an $e''$ und $e_2$. — Die Punkte der Schlagschatten auf der Projektionsaxe $x$, wie $R_1$, in denen sich $e_1$ und $e_2$ treffen, sind die Schatten derjenigen Punkte der $e$, wie des $R$, welche auf der Schnittlinie $SW$ der Ebene $Lx$ und der Ebene von $e$ liegen. $SW$ erhält man zweckmäßig durch zwei parallele Spurebenen, die $\mathrm{P}_1$ und die durch $L$ gehende $\mathrm{P}_3$; beide werden getroffen durch die Ebene $Lx$ bezw. in $x$ und in der damit Parallelen $LS$, durch den Durchmesser $KJ$ von $e$ in $V$ und $U$, und durch die Ebene der $e$ in zweien durch $V$ und $U$ parallel zu $ON$ gezogenen Geraden. $SW$ ist die eine Diagonale des von den vier Spurprojektionen der zwei Ebenen gebildeten Parallelogramms, und wurde, da der eine Eckpunkt nicht erreichbar, von dem Eckpunkte $S$ nach dem Mittelpunkte $W$ der anderen Diagonale gezogen.

**126.** Zur Lösung der folgenden Aufgabe bedürfen wir den

Fig. 61. *Hilfssatz. Legt man durch zwei Punkte $A$, $A_1$ einer Parabel $k$ die Durchmesser $AM$, $A_1M$, trägt auf ihnen im Inneren der Kurve $AB = A_1B_1$, und im Äußeren derselben $AF = A_1F_1 = -AB = -A_1B_1$ auf, zieht parallel zu den Kurventangenten $AT$, $A_1T$ bezw. durch $B$ und $B_1$ Gerade, welche die $k$ bezw. in $C$, $D$ und $C_1$, $D_1$ treffen, und legt aus $F$ und $F_1$ je zwei Kurventangenten, welche dann die $k$ bezw. in denselben Punkten $C$, $D$ und $C_1$, $D_1$ berühren, so sind die senkrechten Abstände der Punkte $C$, $D$ von $AM$ gleich denen der Punkte $C_1$, $D_1$ von $A_1M$.*

Fig. 61.



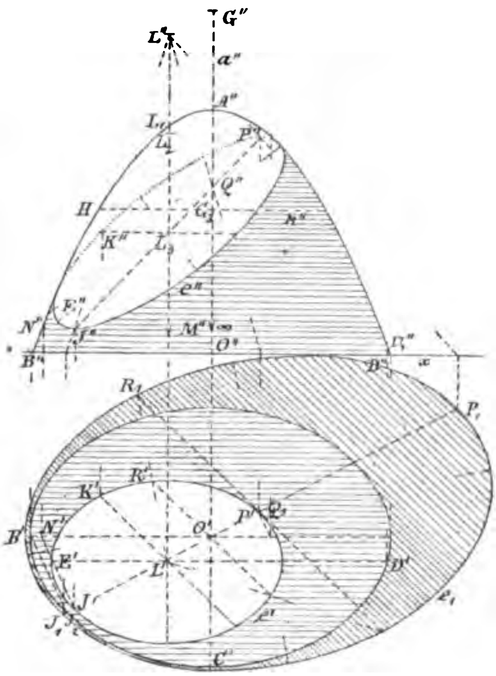

Denn jene Geraden $BC$, $B_1C_1$ treffen den durch den Schnittpunkt $T$ von $AT$ und $A_1T$ gezogenen Parabeldurchmesser $TM$ in ein und demselben Punkte $E$, für welchen $TE = AB = A_1B_1$ ist, und da $AA_1$ von $TM$ halbirt wird (I, 361), so ist $k$ mit sich selbst, $AT$ mit $A_1T$, $BE$ mit $B_1E$ schief symmetrisch in Bezug auf $TM$ und die Richtung $AA_1$. Daher sind auch $CC_1$ und $DD_1$ parallel zu $AA_1$ und werden von $TM$ halbirt. Da außerdem $CB = BD$, $C_1B_1 = B_1D_1$, so haben $C$ und $D$ gleiche Abstände von $AM$, und $C_1$ und $D_1$ von $A_1M$, und alle vier Abstände sind unter einander gleich in der Richtung $AA_1$, daher auch in der auf $TM$ senkrechten Richtung.

*Aufg. An ein elliptisches Paraboloid* $\mathrm{F}$ *aus einem außerhalb desselben liegenden Punkte $L$ einen berührenden Kegel zu legen,* oder:

*Von einem elliptischen Paraboloide für einen leuchtenden Punkt $L$ die Eigen- und Schlagschattengrenzen $e$ und $e_1$ zu bestimmen.*

*Aufl.* Es sei die Axe $AM = a$ von $\mathbf{F} \perp \mathbf{P}_1$, $M$ der unendlich ferne Mittelpunkt der $\mathbf{F}$, der parabolische Hauptschnitt $AB \parallel \mathbf{P}_2$, und die erste Spur der $\mathbf{F}$ die Ellipse $BC$ mit den Halbaxen $OB$, $OC$. Von dem durch $L$ gelegten Durchmesser $LL_1$ der $\mathbf{F}$ ($\parallel a$) erhält man den Schnittpunkt $L_2$ mit $F$, indem man durch $LL_1$ parallel zu der Hauptebene $aB$ eine Ebene legt; diese hat zur ersten Spur die $L'D'$ ($\parallel O'B'$), welche die Ellipse $BC$ in $D$ trifft. Diese Ebene $LL_1D$ schneidet die $\mathbf{F}$ in einer zum Hauptschnitte $AB$ kongruenten und parallelen Parabel, deren zweite Projektion aus $AB$ durch Parallelverschiebung um $D_1''D''$ entsteht, wenn Fig. 62.

Fig. 62.



$D'D''$ ($\parallel a''$) die Projektionsaxe $x$ in $D''$, die Parabel $A''B''$ in $D_1''$ schneidet. Trifft nun $L''L_1$ die Parabel $A''B''$ in $L_1$, so trifft sie jene parallele Parabel und die $\mathbf{F}$ in $L_2$, wenn $L_1L_2 \# D_1''D''$. Macht man dann auf $L''L_1$ die $L_2L_3 = L''L_2$, so daß $L''L_2L_3M$ harmonisch, so ist die durch $L_3$ parallel zur Berührungsebene der $\mathbf{F}$ in $L_2$ gelegte Ebene die Polarebene von $L$ zu $\mathbf{F}$ oder die Ebene der Berührungskurve $e$ des aus $L$ der $\mathbf{F}$ umschriebenen Kegels und $L_3$ der Mittelpunkt der $e$.

Trägt man nun auf $a$ die Strecken $AG = -AG_3 = L_2L = -L_2L_3$ auf, so bildet die durch $G_3$ senkrecht zu $a$ gelegte Ebene die Polarebene von $G$ zu $\mathbf{F}$, und ihre Schnittkurve mit $\mathbf{F}$ die Berührungskurve $k$ des aus $G$ der $\mathbf{F}$ umschriebenen Kegels; dieselbe ist eine mit $BC$ ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse mit der zu $OB$ parallelen Halbaxe $G_3H$. Es ist aber $k$ kongruent und parallel mit der *ersten Projektion* $e'$ von $e$, so daß $e'$, deren Mittelpunkt $L'$, eine zu $B'C'$ ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse mit der zu

$O'B'$ parallelen Halbaxe $L'E' = G_3 H$ bildet. Denn irgend zwei unter einander parallele durch $a$ und durch $LL_2$ gelegte Ebenen schneiden die **F** in zwei kongruenten und parallelen Parabeln, für welche $a$ und $LL_2$ Durchmesser sind und $AG = -AG_3 = L_2 L = -L_2 L_3$ ist. Daher liegen die Berührungspunkte der bezw. aus $G$ und $L$ an diese Parabeln gelegten Tangenten auf Sehnen der Parabeln, welche bezw. durch $G_3$ und $L_3$ parallel zu den Parabeltangenten in $A$ und $L_2$ laufen, so daß die Berührungspunkte jener Tangenten aus $G$ und $L$ gleiche senkrechte Abstände bezw. von $a$ und $LL_2$ haben, und in der ersten Projektion parallele und gleiche Halbdurchmesser von $k'$ und $e'$ begrenzen, so $L'E' = G_3 H$. Daher ist $e' \cong \parallel k$.

Die *zweite Projektion* $e''$ wird aus zwei konjugirten Durchmessern ermittelt; der eine sei im Grundriß der durch $O'$ gehende $J'P'$; die Lage des anderen Halbdurchmessers $L'K'$ wird durch konjugirte Sehnen der Ellipse $B'C'$ ermittelt. $J''$ findet man, indem man die Parabel $aJ$ auf diejenige $aB$ durch Parallele zu $J_2 B$ projicirt, wobei $J_2$ ein Schnittpunkt von $aJ$ mit der Ellipse $BC$ ist. $J'$ projicirt sich dann nach $N'$ ($J'N' \parallel J_2 B'$), dadurch ist $N''$ auf der Parabel $A''B''$ bestimmt, sowie $J''$ durch $N''J'' \parallel x$. $K''$ erhält man auf $L_3 K'' \parallel x$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $L_3 J''$, $L_3 K''$ werden die Axen von $e''$ ermittelt.

*Liegt L im Unendlichen, so erhält man einen umschriebenen Cylinder und die Berührungskurve e desselben wird eine Parabel. Denn M ist dann ein Punkt der Kurve.* Oder: *Die Eigenschattengrenze des Paraboloides (des elliptischen und hyperbolischen) bei Parallelbeleuchtung ist eine Parabel.*

Der *Schlagschatten* $e_1$ der Ellipse $g$ wird, wie in der vorhergehenden Aufgabe, von welcher die unsere ein besonderer Fall ist, bestimmt durch die beiden konjugirten Halbdurchmesser $Q_1 J_1$, $Q_1 R_1$, wobei wieder $Q$ auf $a$ liegt. Aus ihnen werden die Axen von $e_1$ hergeleitet.

**127.** Die Auflösung der vorigen Aufgabe hat folgenden Satz ergeben, der aus übereinstimmenden Gründen auch für das hyperbolische Paraboloid gilt.

*Satz. Legt man durch zwei Punkte $A, A_1$ eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloides die Durchmesser $AM$, $A_1 M$, und führt parallel zu den Berührungsebenen der Fläche in $A$ und $A_1$ zwei Ebenen, welche die Fläche bezw. in den Kurven $e$, $e_1$, und jene Durchmesser in den Punkten $B$, $B_1$ schneiden, derart daß $AB = A_1 B_1$, trägt sodann auf jenen Durchmessern die $AF = A_1 F_1 = -AB = -A_1 B_1$ auf, und legt aus $F$, $F_1$ zwei der Fläche umschriebene Kegel, deren Berührungskurven dann dieselben Linien $e$, $e_1$ sind, so sind die Projektionen von*

*e und $e_1$ auf eine zur Flächenaxe senkrechte Ebene kongruente und parallele Kegelschnitte.*

Dieser Satz enthält auch den anderen

*Satz. Alle ebenen Schnitte oder die Berührungskurven aller umschriebenen Kegel eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloides projiciren sich auf irgend eine Ebene mittelst Projicirender, die zur Axe der Fläche parallel sind, in ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte (Ellipsen bezw. Hyperbeln).*

Der *Beweis* dieses Satzes kann leicht unabhängig von der Konstruktion der vorigen Nummer geführt werden. Hat eine der schneidenden Ebenen **E** mit der unendlich fernen Ebene **M** die Gerade $d'$ gemein, so ist deren Polare $d$ zu **F** die Verbindungslinie des Poles von $d'$ zu der Schnittkurve der **E** mit dem Berührungspunkte der **M** mit **F**, d. i. auch des Mittelpunktes von $e$ mit dem unendlich fernen Punkte $M$ der **F**, oder es ist $d$ der durch den Mittelpunkt von $e$ gezogene Durchmesser der **F**. Das Büschel der durch $d$ gelegten, in Bezug auf **F** konjugirten Ebenen schneidet die $d'$ in einer involutorischen Reihe von Punkten, deren zugeordnete zugleich in Bezug auf **F**, als in Bezug auf $e$ und auf den Berührungspunkt $M$ konjugirt sind (76; 77, 3)); das Büschel schneidet daher die **E** und die **M** in den involutorischen Strahlenbüscheln bezw. konjugirter Durchmesser von $e$ und konjugirter Tangenten in $M$.

Da nun das letztere Büschel unabhängig von der Lage der Schnittebene **E** ist, so sind für alle Schnittkurven $e$ jene involutorischen Ebenenbüschel, weil sie das Tangentenbüschel enthalten, unter einander kongruent und parallel; und da ihre Ebenen zugleich die Strahlenbüschel der konjugirten Durchmesser der Schnittkurven $e$ projiciren, so sind deren Projektionen auf irgend eine Ebene kongruente und parallele Büschel von konjugirten Durchmessern der Projektionen $e'$ der Kurven $e$, diese Projektionen $e'$ selbst daher ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte.

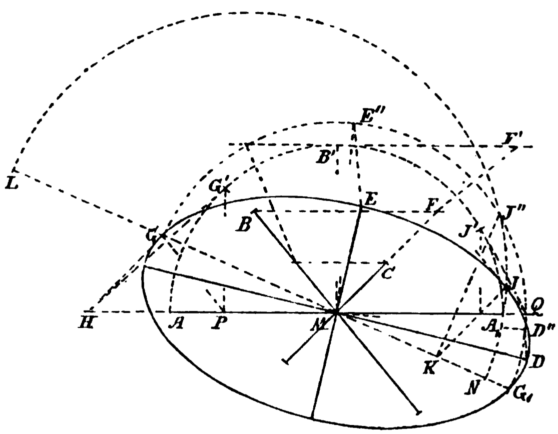
128. *Aufg. Von einer Fläche zweiten Grades* **F** *sind die Parallelprojektionen dreier konjugirten Halbdurchmesser $MA$ ($= MA_1$), $MB$, $MC$ gegeben, man soll den Umrißkegelschnitt $k$ von* **F**, *insbesondere dessen Halbaxen $MD$, $ME$, bestimmen.*

*Aufl.* 1. Ein der **F** parallel zu einem der Durchmesser umschriebener Cylinder berührt dieselbe nach dem Kegelschnitte der beiden anderen Durchmesser, und seine beiden scheinbaren Umrißgeraden sind die Abbildungen der parallel zu der Abbildung des ersteren Durchmessers an die Abbildung jenes Kegelschnittes gelegten Tangenten. Sie sind zugleich Tangenten des scheinbaren Umrisses und ihre Berührungspunkte sind Punkte dieses Umrisses, so daß der

Umriß durch zwei von den drei Cylindern überschüssig bestimmt ist. Da wir nur eine Projektion zeichnen, können wir das Wort „Abbildung“ ohne Mißverständnis weglassen.

Fig. 63. a) **F** *ist ein Ellipsoid.* Um parallel zu $MC$ eine Tangente an die (gedachte) Ellipse $AB$ zu legen, benutzen wir deren Affinität mit einem über $AA_1$ als Durchmesser gezeichneten Kreise, dessen auf $AA_1$ senkrechter Halbmesser $MB'$ dem $MB$ entspricht; ebenso entsprechen sich die zu $AA_1$ parallelen Tangenten $BF$, $B'F'$ der Kurven. $BB'$ ist ein Affinitätsstrahl. Schneidet $MC$ die $BF$ in $F$, so entspricht dem $F$ der Punkt $F'$ auf $B'F'$,

Fig. 63.

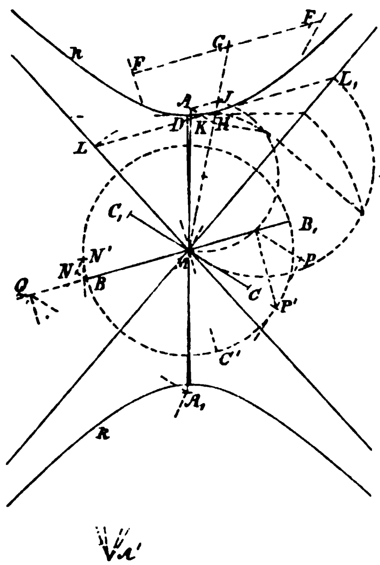



wenn man $FF' \parallel BB'$ gezogen hat, und der $MCF$ die $MF'$. Der $\parallel MF'$ an den Kreis $AB'$ gezogenen Tangente $G'H$, welche in $G'$ berührt und in $H$ die Affinitätsaxe $AA_1$ schneidet, entspricht die zu $MCF$ parallele $HG$, welche die Ellipse $AB$ in $G$ berührt, wenn $G'G \parallel B'B$ gezogen wurde, oder, was hier genauer, wenn $G'P \parallel B'M$ bis $P$ auf $AA_1$ und $PG \parallel MB$. Aus $G$ erhält man seinen Gegenpunkt $G_1$ ($GM = MG_1$). Ebenso findet man, wie in der Figur angegeben, die zu $MB$ parallele Tangente $QJ$ der Ellipse $AC$ mit dem Berührungspunkte $J$ mittelst desselben affinen Kreises $AB'$. — Die Umrißellipse ist nun durch ihren Durchmesser $GG_1$ mit der Endtangente $GH$ und ihren Punkt $J$ bestimmt; ihre Axen findet man durch ihre Affinität mit dem über $GG_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreise. Dem Punkte $J$ der Ellipse entspricht der $J''$ des Kreises, wenn $JK \parallel HG$ bis $K$ auf $GG_1$ und $KJ'' \perp GG_1$. Um nun die Axen der Umrißellipse zu bestimmen, beachte man, daß wenn die parallel zu ihnen aus $J$ gezogenen Geraden die $GG_1$ in $L$ und $N$ schneiden, $J''L$ und $J''N$ ihre entsprechenden Linien im affinen Kreise sind, und daher ebenfalls parallel zu konjugirten Durchmessern desselben laufen, d. i. auf einander senkrecht stehen. Man findet daher $L$ und $N$ als Punkte desjenigen Kreises, welcher durch $J$ und $J''$ geht, und dessen Mittelpunkt auf $GG_1$ liegt. Die

Halbaxen $MD$, $ME$ der Umrißellipse sind daher bezw. parallel zu $JL$, $JN$, und werden aus den zu $J''L$, $J''N$ parallelen Halbmessern $MD''$, $ME''$ des Kreises durch die Affinitätsstrahlen $D''D \parallel E''E \parallel J''J$ erhalten.*)

**129.** b) F *ist ein Hyperboloid, etwa ein zweischaliges.* $MA = MA_1$ ist die reelle, $MB = MB_1$, $MC = MC_1$ sind die ideellen Halbaxen. Man lege an die Hyperbel $AC$ eine Tangente $\parallel MB$, indem man ihre Asymptoten $MF \parallel AC$, $MF_1 \parallel AC_1$ zieht, sie mit einer Parallelen $FF_1$ zu $BB_1$ in $F, F_1$ schneidet, dann ist die $MG$, welche durch den Mittelpunkt $G$ von $FF_1$ geht, der zu $FF_1$ und $BB_1$ konjugirte Durchmesser jener Hyperbel. Ein Endpunkt $H$ dieses Durchmessers wird erhalten, indem man in Bezug auf die Hyperbel die Konjugirte $AJ$ ($\parallel MB$) zu $MG$ und ihre Tangente $AK$ ($\parallel MC$) zieht, sie mit $MG$ bezw. in $J$ und $K$ schneidet, und dann $MH$ durch $MH^2 = MJ \cdot MK$ bestimmt. $HL \parallel MB$ ist dann eine Tangente der Hyperbel $AC$ und der Umrißhyperbel $k$, und $H$ ihr Berührungspunkt. Fig. 64.

Fig. 64.




Die *Asymptoten* der $k$ sind die Umrißlinien des Asymptotenkegels. Dieser Kegel mit der Spitze $M$ ist parallel und kongruent mit demjenigen, dessen Spitze $A_1$ (oder $A$) und dessen Leitlinie die Ellipse $BC$ ist; seine Umrißlinien sind parallel mit den aus $A_1$ an diese Ellipse gezogenen Tangenten. Dieselben werden durch Affinität mit dem über $BB_1$ als Durchmesser gezogenen Kreise bestimmt. Dem $C$ entspricht auf dem Kreise $C'$ ($MC' \perp MB$), dem $A_1$ entspricht $A'$ ($A_1A' \parallel CC'$, $A_1Q \parallel CM$ bis $Q$ auf $BB_1$, $QA' \parallel MC'$). Die aus $A'$ an den Kreis gezogenen Tangenten berühren ihn in $N'$, $P'$; diesen Punkten entsprechen die Punkte $N$, $P$ der Ellipse $BC$ und mit $A_1N$, $A_1P$ sind bezw. die gesuchten Asymptoten

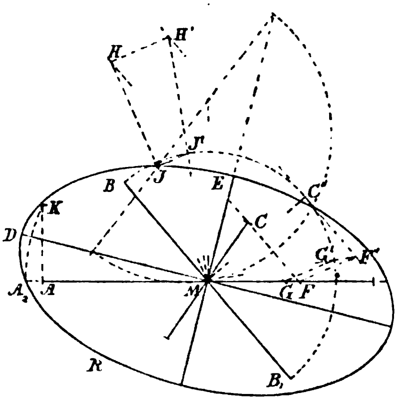
*) In dem Gedanken der umschriebenen Cylinder treffe ich mit Herrn *Bazala* zusammen, der ihn schon früher veröffentlichte und bei der Aufgabe a) benutzte in seinen „Constructionen über Flächen 2. Grades in allgemeiner Parallelprojektion“ (Progr. 1881—82 der öff. Oberrealsch. i. d. Josefst. in Wien). Die Behandlung des Falles b) ist dort von der folgenden verschieden.

$ML$, $ML_1$ der Hyperbel $k$ parallel. — Mittelst der Asymptoten und einer Tangente $HLL_1$ (wobei die Probe stattfindet $LH = HL_1$) wurde in der Figur die reelle Halbaxe $ND$ von $k$ bestimmt (I, 379) und damit $k$ verzeichnet.

**130.** *Aufl.* 2 ist etwas einfacher als die erste.

Fig. 65. a) **F** *ist ein Ellipsoid.* Man ersetze die konjugirten Halbdurchmesser $MB$, $MC$ der Ellipse $BC$ durch zwei konjugirte $MG$, $MJ$, deren einer in der Linie $MA$ liegt; dann ist $MJ$ der zur projicirenden Ebene $(MAG)$ von $MAG$ konjugirte Halbdurchmesser der **F**, an dessen Endpunkte $J$ die Berührungsebene der **F** parallel zu $(AMG)$ ist, so daß die Projektion dieser Berührungsebene die durch $J \parallel MA$ gezogene Tangente des Umrisses $k$ (und der Ellipse $BC$) bildet. Wenn wir dann noch auf $MA$ den Umrißpunkt $A_2$ bestimmen, so besitzen wir von $k$ zwei konjugirte Halbdurchmesser $MA_2$, $MJ$. —

Fig. 65.



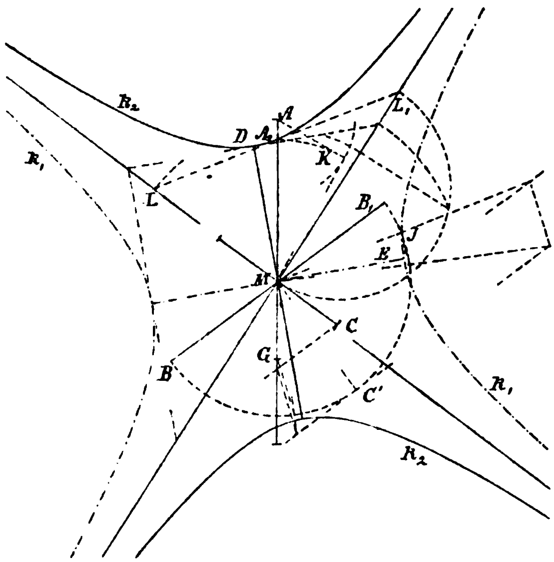

Zur Ausführung benutze man den über dem größeren Durchmesser $BB_1$ der Ellipse $BC$ als Durchmesser gezogenen Kreis, mit welchem die Ellipse $BC$ perspektiv-affin ist. Dann entspricht dem Punkte $C$ der Punkt $C'$ auf dem Kreise, wenn $MC' \perp MB$, es entsprechen sich die zu $MB$ parallelen Tangenten $CF$, $C'F'$, dem Schnittpunkte $F$ von $MA$ mit $CF$ entspricht $F'$ auf $C'F'$, wenn $FF' \parallel CC'$; den zweien auf einander senkrechten Durchmessern des Kreises $MF'$, $MH'$, welche die $C'F'$ bezw. in $F'$ und $H'$, und den Kreis in $G'$ und $J'$ treffen, entsprechen die gesuchten konjugirten Durchmesser $MG$ und $MJ$ der Ellipse $BC$, welche die $CF$ bezw. in $F$ und $H$ und die Ellipse in $G$ und $J$ treffen, wenn $H'H \parallel G'G \parallel J'J \parallel C'C$. — Zur Bestimmung von $MA_2$ denke man den wahren Umriß der **F** als Projektionsebene **P** angenommen, so daß der wahre und der scheinbare Umriß in $k$ zusammenfallen, und denke die Projektion als eine senkrechte (vergl. 114), so schneidet die projicirende Ebene $(MAG)$ das Ellipsoid **F** in einer Ellipse, welches die konjugirten Halbdurchmesser $(MA)$, $(MG)$ besitzt, und $MA_2$ zu einer Halbaxe hat. Es wird aber $MA_2$ durch den *Satz* bestimmt: *Die senkrechten Projektionen zweier konjugirten Halbdurchmesser einer Ellipse auf eine Axe derselben bilden mit der Hälfte*

*dieser Axe* (*als Hypotenuse*) *ein rechtwinkliges Dreieck.* Dieser Satz folgt aus I, 364, indem in der Fig. 199 im rechtwinkligen Dreiecke $MC_0C'$ die $MC' = MA$ und die $C_0C' = MD_0$ ist. Daher erhält man in unserer Figur $MA_2 = MK$, wenn man $AK \perp MA$ und $= MG$ gemacht hat.

Aus den konjugirten Halbdurchmessern $MA_2$, $MJ$ sind in der Figur nach dem Rytzschen Verfahren (I, 377) die Halbaxen $MD$, $ME$ bestimmt, und aus ihnen ist $k$ verzeichnet.

**131.** b) F *ist ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid.* Fig. 66.
Im ersteren Falle ist $MA$ die ideelle, $MB$, $MC$ sind die reellen Halbaxen, im zweiten ist $MA$ die reelle, und $MB$, $MC$ sind die ideellen Halbaxen. Beide Flächen sind konjugirt, besitzen denselben Asymptotenkegel; und zwei Durchmesser, welche in Bezug auf die eine Fläche konjugirt sind, sind es auch in Bezug auf die andere; nur ist ein reeller Durchmesser der einen Fläche ein ideeller der anderen (vergl. I, 365). Die Umrisse $k_1$, $k_2$ beider Flächen

Fig. 66.




sind in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt konjugirte Kegelschnitte, als Schnitte der zu beiden Flächen gemeinschaftlichen Polarebene des unendlich fernen Projektionsmittelpunktes mit den Flächen; sie sind entweder beide Hyperbeln, wie in der Figur, oder $k_1$ ist eine reelle Ellipse $e_1$, $k_2$ eine imaginäre, deren ideelle Mittelpunktsellipse $e_1$ bildet; letzteres, wenn $A$ im Innern der Ellipse $BC$.

Mag nun F die eine oder die andere von beiden Flächen sein, so suche man, gerade wie in der vor. Nr., von der Ellipse $BC$ die beiden konjugirten Halbdurchmesser $MG$, $MJ$, von denen die eine, $MG$, in der Geraden $MA$ liegt. Für das einschalige Hyperboloid ist dann $J$ ein Punkt des Umrisses $k_1$, in welchem seine Tangente $\parallel MA$ läuft, und $MJ$ ist ein zur Richtung $MA$ konjugirter Halbdurch-

messer der $k$. Zur Bestimmung der Länge des konjugirten ideellen Halbdurchmessers $MA_2$ in $MA$ dient die Beziehung $MA_2^2 = MA^2 - MG^2$. Es folgt dies aus dem Satze: *Sind von einer Hyperbel $a$, $b$ die reelle und ideelle Halbaxe, sind $a_1$, $b_1$ irgend ein reeller und sein konjugirter ideeller Halbdurchmesser, sind $a_1'$, $b_1'$; $a_1''$, $b_1''$ deren Projektionen bezw. auf $a$ und auf $b$, so gilt*

$$a^2 = a_1'^2 - b_1'^2, \qquad b^2 = b_1''^2 - a_1''^2.$$

Denn in I, Nr. 379, Fig. 212 ist, wenn $AH$ die $MP$ in $H_1$ schneidet, $MH_1 \cdot MH = MP \cdot MQ$; daher, für $\sphericalangle AMQ = \alpha$, und da $MH_1 \sin\alpha = -MH \sin\alpha$,

$$MH^2 \cos^2\alpha = MP\cos\alpha \cdot MQ\cos\alpha, \quad MH^2 \sin^2\alpha = -MP\sin\alpha \cdot MQ\sin\alpha,$$

oder nach den obigen Bezeichnungen, indem $MA' = a_1$, $PA' = A'Q = b_1$,

$$a^2 = (a_1' - b_1')(a_1' + b_1'), \qquad b^2 = -(a_1'' - b_1'')(a_1'' + b_1''),$$

woraus der Satz folgt. Es ist daher in unserem Falle, mögen wir $MA_2 = a$ und dann $MA = a_1'$, $MG = b_1'$, oder $MA_2 = b$ und dann $MA = b_1''$, $MG = a_1''$ annehmen, jedesmal $MA_2^2 = MA^2 - MG^2$.

Zeichnet man daher aus $A$ als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser $AK = MG$, legt nach deren Tangente aus $M$ an und bestimmt durch einen zu ihr senkrechten Halbmesser den Berührungspunkt $K$, so ist $MA_2 = MK$. Aus den zwei konjugirten Halbdurchmessern $MA_2$, $MJ$ bestimmt man die Asymptoten $ML$, $ML_1$ von $k_1$ und $k_2$, indem man $-A_2L = A_2L_1 \mathrel{\#} MJ$ macht, und aus den Asymptoten und der $LL_1$ (einer Tangente der $k_2$) bestimmt man die Halbaxen $MD$, $ME$ (I, 379) von $k_1$ und $k_2$. Für $MG > MA$ ist jene Tangente aus $M$ imaginär und $k_1$ eine Ellipse.

**132.** *Übungsaufg.* Von einem elliptischen oder hyperbolischen Paraboloide **F** sei $M$ der (unendlich ferne) Mittelpunkt, und es sei in Parallelprojektion gegeben ein Durchmesser $AM$, und zwei konjugirte Halbdurchmesser $OB$, $OC$ des Kegelschnittes der **F** in einer zu $AM$ konjugirten, durch den Punkt $O$ des $AM$ gehenden Ebene, wobei für das elliptische Hyperboloid $OB$ und $OC$ reell, für das hyperbolische $OB$ reell, $OC$ ideell ist; man soll den Umriß von **F** bestimmen.

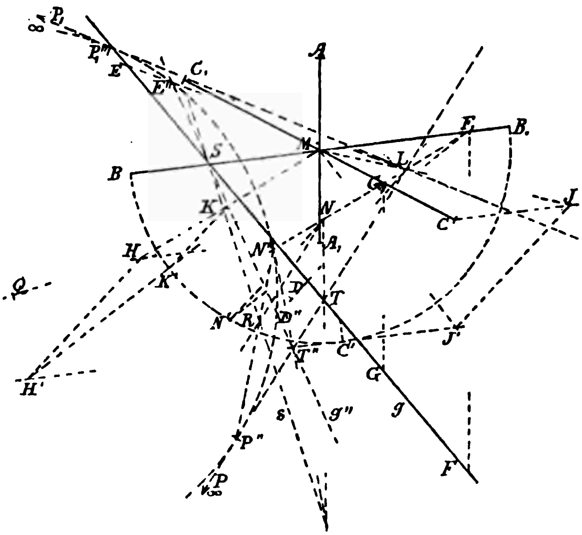
**133.** Um die *Schnittpunkte einer Geraden $g$ mit einer Fläche zweiten Grades* **F** zu ermitteln, lege man durch $g$ eine Ebene, bestimme den Kegelschnitt, in dem sie die **F** trifft, und dann die Schnittpunkte dieser Kurve mit $g$, so sind dies die gesuchten Punkte.

*Aufg. Von einer Fläche zweiten Grades* **F** *sind die Parallelprojektionen dreier konjugirten Halbdurchmesser $MA = MA_1$, $MB = MB_1$, $MC = MC_1$ gegeben, und die Lage einer Geraden $g$ gegen* **F**

*ist durch ihre Schnittpunkte $F$, $G$ bezw. mit den Hauptebenen $MAB$, $MAC$ bestimmt; man soll die Schnittpunkte $D$, $E$ der $g$ mit der* $\mathfrak{F}$ *ermitteln.*

*Aufl.* $\mathfrak{F}$ sei ein *einschaliges Hyperboloid*, $MA$ die ideelle, $MB$, Fig. 67.
$MC$ seien die reellen Halbaxen. Wir haben die $g$ so angenommen, daß keine durch sie gelegte Ebene die $\mathfrak{F}$ in einer Ellipse schneiden kann, indem die $\parallel g$ durch $M$ gezogene Gerade innerhalb des Asymptotenkegels liegt. Wir sind daher genötigt, eine Hilfsebene durch $g$ zu legen, welche die $\mathfrak{F}$ in einer Hyperbel schneidet; diese Ebene sei mit $MA = a$ parallel. Die durch $F$ und $G$ zu $a$ gezogenen

Fig. 67.



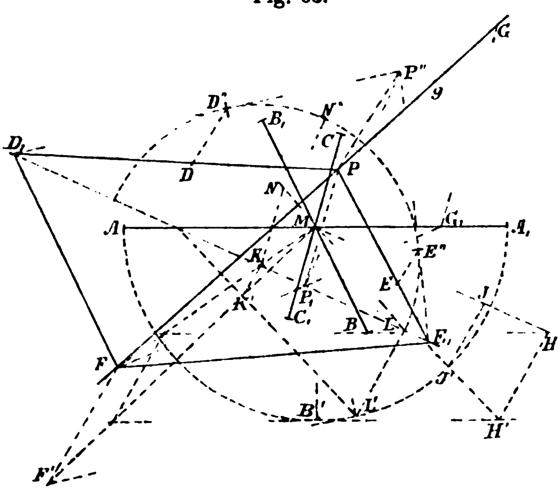
Parallelen treffen die $MB = b$ und die $MC = c$ bezw. in $F_1$, $G_1$, die Hilfsebene schneidet daher die Hauptebene $bc$ in der Geraden $F_1 G_1$, mit welcher parallel der Durchmesser $MH$ gezogen sei. Um die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ellipse $BC$ zu ermitteln, benutzen wir wieder (128) den über $BB_1$ als Durchmesser gezogenen Kreis $BC'B_1$, wobei $MC' \perp MB$. Wir ziehen $CH \parallel C'H' \parallel BB_1$, schneiden $MH$ mit $CH$ in $H$, ziehen $HH' \parallel CC'$ bis $H'$ auf $C'H'$, schneiden $MH'$ und die zu $MH'$ Parallele $F_1 N'$ mit jenem Kreise bezw. in $K'$, $N'$, so sind $K$ und $N$ die Schnittpunkte der $MH$ und der $F_1 G_1 N$ mit der Ellipse $BC$, wenn $K'K \parallel N'N \parallel C'C$. Den Mittelpunkt $L$ der Sehne der Ellipse auf $F_1 N$ erhalten wir durch den zu $MH$ konjugirten Durchmesser $MLJ$, indem wir $MJ' \perp MH'$ bis $J'$ auf $C'H'$, und dann $J'J \parallel C'C$ bis $J$ auf $CH$ ziehen. — Die Ebene $FGG_1F_1$ schneidet nun die $\mathfrak{F}$ in einer Hyperbel, ähnlich und ähnlich gelegen mit derjenigen $MKA$, deren Mittelpunkt $L$, und von welcher ein reeller Halbdurchmesser $LN$ ist, während der ideelle mit $a$ parallel läuft; die Asymptoten sind die zu $KA$, $KA_1$ Parallelen $LP$, $LP_1$ (wobei $P$ und $P_1$ unendlich fern). Ihre Schnitt-

punkte mit $g$ sind die gesuchten Punkte $D$, $E$. Zu ihrer Bestimmung benutzt man die Kollineation der Hyperbel mit einem Kreise (von passender Größe), welcher beide Asymptoten berührt und in demselben von ihnen gebildeten Winkel liegt, wie ein Hyperbelast, und zweckmäßig, wie ein Stück der $g$; seine Berührungspunkte mit den Asymptoten seien $P''$, $P_1''$, sein Mittelpunkt $Q$. Der Kollineationsmittelpunkt ist der Hyperbelmittelpunkt $L$; dem Punkte $N$ der Hyperbel entspricht der (benachbarte) Punkt $N''$ des Kreises, wenn $LNN''$ eine Gerade, die Kollineationsaxe ist die $\perp LQ$ durch den Schnittpunkt $R$ der entsprechenden Geraden $NP$ ($\parallel LP$) und $N''P''$ gezogene Gerade $RS = s$. Der $g = ST$ entspricht $g'' = ST''$, wenn $S$ und $T$ die Schnittpunkte von $g$ mit $s$ und mit $LP$, und $T''$ der entsprechende Punkt von $T$ ($NT$ und $N''\,T''$ schneiden sich auf $s$). Den Schnittpunkten $D''$, $E''$ des Kreises mit $g''$ entsprechen $D$, $E$ auf $g$.

**134.** Um die *Berührungsebene durch eine Gerade $g$ an eine Fläche zweiten Grades* **F** zu legen, bestimme man den aus einem Punkte der $g$ der Fläche umschriebenen Kegel, lege an ihn die durch $g$ gehenden Berührungsebenen, so sind diese die gesuchten. Ihre Berührungspunkte mit **F** erhält man, indem man die Ebene der Berührungskurve des Kegels und der **F** mit $g$ schneidet, und aus diesem Punkte die beiden Tangenten an die Kurve legt; ihre Berührungspunkte sind die gesuchten.

Fig. 68.

Fig. 68.




*Aufg. Von einer Fläche zweiten Grades* **F** *sind die Parallelprojektionen dreier konjugirten Halbdurchmesser $MA = MA_1$, $MB = MB_1$, $MC = MC_1$ gegeben, und es ist die Lage einer Geraden $g$ gegen* **F** *durch ihre Schnittpunkte $F$, $G$ bezw. mit den Hauptebenen $MAB$, $MAC$ bestimmt; man soll die Berührungsebenen durch $g$ an* **F** *legen und ihre Berührungspunkte $D$, $E$ ermitteln.*

*Aufl.* **F** sei ein Ellipsoid; wir wollen aus $F$ den Berührungskegel an dasselbe legen. Seine Berührungskurve ist eine Ellipse, von

welcher ein Durchmesser in der Polaren von $F$ zur Ellipse $AB$ liegt, während der dazu konjugirte mit $MC$ parallel läuft. Wir benutzen wieder die Affinität der Ellipse $AB$ zu dem über $AA_1$ als Durchmesser gezogenen Kreise. Es entspricht dann dem Punkte $F$ derjenige $F'$, dessen Bestimmungsweise in der Figur ersichtlich ist; im Kreise zeichnen wir den zu $MF'$ konjugirten (senkrechten) Halbmesser $MJ'$ und die damit parallele Polare von $F'$, deren Sehne den Punkt $K'$ auf $MF'$ zum Mittelpunkte und $L'$ zu einem Endpunkte hat. Diesen Linien entsprechen bei der Ellipse die Durchmesserlinie $MF$, der dazu konjugirte Halbdurchmesser $MJ$ und die damit parallele Halbsehne $KL$, gelegen in der Polare von $F$. Die Berührungsellipse des aus $F$ umschriebenen Kegels hat $KL$ und $KN$ zu konjugirten Halbdurchmessern, wobei $KN \parallel MC$ durch $LN \parallel JC$ begrenzt wird, da die Ellipsen $LN$, $JC$ ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die $g$ schneidet aber die Ebene $LKN$ in $P$, welchen Punkt man in der $\parallel c$ durch $g$ gelegten Ebene durch den Linienzug $GG_1(\parallel CM)$, $G_1FP_1$, $P_1P$ ($\parallel MC$) erhält. Die Tangenten $PDD_1$, $PEE_1$, welche aus $P$ an die Ellipse $LN$ gezogen werden können, mit ihren Berührungspunkten $D$, $E$, und ihren Schnittpunkten $D_1$, $E_1$ mit $KL$ und mit der Ebene $MAB$ erhält man durch Affinität der Ellipse mit dem aus $K$ als Mittelpunkt durch $L$ gezogenen Kreise $LN''$ ($KN'' \perp KL$), wobei $P''$ dem $P$ entspricht ($P_1P'' \parallel KN''$, $PP'' \parallel NN''$), vermittelst der Tangenten $P''D''D_1$, $P''E''E_1$ an den Kreis, aus deren Berührungspunkten $D''$, $E''$ sich diejenigen $D$, $E$ ergeben. Die gesuchten Berührungsebenen sind $PDD_1F$ und $PEE_1F$, ihre Berührungspunkte mit **F** sind $D$ und $E$.

**135.** *Aufg. Zu einer Fläche zweiten Grades* **F** *von einem gegebenen Punkte* $P$ *die Polarebene* **P**, *und von einer gegebenen Ebene* **P** *den Pol* $P$ *zu bestimmen.*

*Aufl.* Liegt der Mittelpunkt $M$ der **F** *im Endlichen*, so sei **F** gegeben durch drei reelle oder ideelle Halbdurchmesser $MA = MA_1$, $MB = MB_1$, $MC = MC_1$, der Punkt $P$ durch seine drei Koordinaten auf den konjugirten Durchmessern, nämlich $MA_2$, $MB_2$, $MC_2$, und die Ebene **P** durch ihre Schnittpunkte mit diesen Durchmessern, nämlich $A_3$, $B_3$, $C_3$. Die Aufgabe ist daher, aus $A_2$, $B_2$, $C_2$ die $A_3$, $B_3$, $C_3$, oder umgekehrt zu finden. Nun ist $P$ der gemeinschaftliche Punkt der Polarebenen dreier Punkte der **P**, etwa von $A_3$, $B_3$, $C_3$, diese Ebenen aber sind parallel zu den Koordinatenebenen $MBC$, $MCA$, $MAB$, gehen also bezw. durch die Endpunkte $A_2$, $B_2$, $C_2$ der Koordinaten von $P$. Daher sind $A_2$, $A_3$, sowie $B_2$, $B_3$ und $C_2$, $C_3$ konjugirte Punkte in Bezug auf **F**. Ist nun ein Durchmesser, z. B. $AA_1$, reell, so sind $A_2$, $A_3$ durch $A$, $A_1$ harmonisch getrennt, ist er aber ideell,

so bildet $A_2 A_0 A_3$ einen rechten Winkel, wenn $MA_0 \perp MA$ gemacht wurde.

Liegt $M$ *im Unendlichen*, ist also **F** ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, so sei es gegeben durch einen Punkt $A$ der **F** und seinen Durchmesser $AM$, durch die Berührungsebene der **F** in $A$ (oder deren Stellung) und durch zwei Punkte $B$ und $C$ der **F**, welche in zwei konjugirten, durch $AM$ gehenden Ebenen liegen. Man ziehe nun parallel zu jener Berührungsebene in der Ebene $MAB$ die $BO$, in derjenigen $MAC$ die $CO_1$, welche die $AM$ bezw. in $O$ und $O_1$ treffen. Die Berührungsebene kann als parallel zu $BO$ und $CO_1$ gegeben sein. Legt man an die Schnittparabeln jener konjugirten Ebenen mit **F** die Tangenten $b$ in $B$ und $c$ in $C$, welche die $AM$ bezw. in $O'$ und $O_1'$ treffen, wobei $AO' = OA$, $AO_1' = O_1A$, so sind die Berührungsebenen der **F** in $B$ und $C$ bestimmt, indem sie bezw. $\parallel CO_1$ durch $b$ und $\parallel BO$ durch $c$ gehen. Man gebe den Punkt $P$ durch drei Punkte $A_2$, $B_2$, $C_2$, welche bezw. auf den Durchmessern $AM$, $BM$, $CM$ derart liegen, daß $PA_2$, $PB_2$, $PC_2$ bezw. parallel mit den Berührungsebenen der **F** in $A$, $B$, $C$ sind; und man gebe **P** durch ihre Schnittpunkte $A_3$, $B_3$, $C_3$ mit den Durchmessern $AM$, $BM$, $CM$. Dann sind wieder $A_2AA_3M$, $B_2BB_3M$, $C_2CC_3M$ je vier harmonische Punkte, oder es sind $A$, $B$, $C$ die Mittelpunkte bezw. von $A_2A_3$, $B_2B_3$, $C_2C_3$, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

## IV. Die windschiefen Flächen zweiten Grades.

### a) Allgemeines.

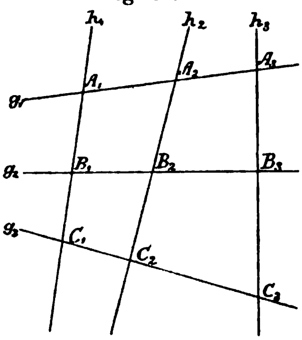
**136.** Unter *Regel-* oder *geradlinigen Flächen* versteht man solche Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie als Erzeugenden entstehen können. Solche Flächen sind *abwickelbar,* wenn sie entlang jeder geraden Erzeugenden von ein und derselben Ebene berührt werden. Denn sie sind dann die einhüllende Fläche dieser beweglichen Berührungsebene (38). Wenn sie aber entlang einer Erzeugenden nicht von derselben Ebene berührt werden, sind sie nicht abwickelbar (39, 1)), und werden *windschief* genannt. Man sagt auch, Regelflächen sind abwickelbar oder windschief, je nachdem je zwei benachbarte Erzeugende in einer Ebene liegen oder nicht; wobei aber nicht ausgeschlossen ist, daß einzelne Erzeugende der windschiefen Fläche mit ihrer benachbarten in einer Ebene liegen. Der Fall der windschiefen Flächen ist der allgemeine.

Die einfachste windschiefe Fläche *entsteht, wenn die gerade Er-*

*zeugende auf drei geraden Leitlinien hingleitet, von denen keine zwei in derselben Ebene liegen.*

Seien $h_1$, $h_2$, $h_3$ die drei Leitgeraden, so findet man die Erzeugende $g_1$, welche durch einen beliebigen Punkt $A_1$ der $h_1$ geht, als Durchschnitt der beiden Ebenen $A_1 h_2$ und $A_1 h_3$. Durch jeden Punkt einer Leitlinie geht daher nur eine Erzeugende, und die entstehende Fläche ist windschief, weil irgend zwei Erzeugende nicht in derselben Ebene liegen können, da sonst wenigstens zwei der Leitgeraden in dieser Ebene lägen. Indem man den Punkt $A_1$ sich auf der $h_1$ hinbewegen und eine Punktreihe beschreiben läßt, beschreibt die Ebene $A_1 h_2$ ein mit der Punktreihe $h_1$ perspektives Ebenenbüschel mit der Axe $h_2$, die Ebene $A_1 h_3$ ein solches mit der Axe $h_3$, und diese mit $h_1$, also auch unter einander projektiven Ebenenbüschel erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen die Fläche. Fig. 69.

Fig. 69.




*Die windschiefe Fläche mit drei Leitgeraden $h_1$, $h_2$, $h_3$ ist vom zweiten Grade*; denn eine beliebige Ebene schneidet sie in einem Kegelschnitte, da sie die projektiven Ebenenbüschel $h_2$, $h_3$ in zwei projektiven Strahlenbüscheln trifft, deren entsprechende Strahlen sich in Punkten eines Kegelschnittes treffen, welcher die Schnittkurve bildet.

*Zwei beliebige projektive Ebenenbüschel, deren Axen $h_2$, $h_3$ sich nicht schneiden, bilden durch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieselbe windschiefe Fläche zweiten Grades, welche vermittelst dreier Leitgeraden $h_1$, $h_2$, $h_3$ entsteht.* Denn seien $g_1$, $g_2$, $g_3$ drei Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen, so gehen keine zwei derselben durch denselben Punkt von $h_2$ oder $h_3$, und es liegen daher keine zwei in derselben Ebene, weil sonst auch $h_2$ und $h_3$ in derselben Ebene liegen müßten. Man kann nun durch jeden Punkt $A_1$ der $g_1$ eine Gerade $h_1$ legen, welche zugleich die $g_2$ (in $B_1$) und die $g_3$ (in $C_1$) trifft. Von $h_1$, $h_2$, $h_3$ liegen keine zwei in derselben Ebene, weil dies für $g_1$, $g_2$, $g_3$ gilt. Die durch die drei Geraden $h_1$, $h_2$, $h_3$ als Leitlinien bestimmte windschiefe Fläche kann auch durch zwei projektive Ebenenbüschel $h_2$, $h_3$ erzeugt werden, und diese fallen mit unseren gegebenen zusammen, weil sie mit ihnen die drei durch $A_1$, $B_1$, $C_1$ gehenden Paare gemein haben. Hierdurch ist unser Satz bewiesen. — Zugleich ergibt sich, daß *durch jeden Punkt einer $g$ eine Gerade $h$ gelegt werden kann, welche ganz in der Fläche liegt und alle $g$ schneidet.* Denn durch drei Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$ der $h_1$ gehen entsprechende Ebenen

der Büschel $h_2$, $h_3$, also durch jeden Punkt der $h_1$, und die $g$ einer jeden Ebene dieser Büschel schneidet die $h_1$.

**137.** Sind die drei Leitlinien $h_1$, $h_2$, $h_3$ gegeben, so kann man die Erzeugenden $g$ auch in der zur eben betrachteten reciproken Weise dadurch bestimmen, daß man durch $h_1$ eine beliebige Ebene legt und durch deren Schnittpunkte $A_2$ und $A_3$ bezw. mit $h_2$ und $h_3$ eine Erzeugende $g_1$ zieht, welche dann auch die $h_1$, etwa in $A_1$, trifft. Da die sich um $h_1$ drehende Ebene projektive Punktreihen auf $h_2$ und $h_3$ bestimmt, *so wird unsere windschiefe Fläche zweiten Grades durch die Verbindungsgeraden nicht entsprechender Punkte zweier nicht in derselben Ebene liegenden projektiven Punktreihen gebildet.* Diese projektiven Punktreihen können auf den beliebigen Geraden $h_2$, $h_3$ ganz beliebig angenommen werden; denn zieht man die Verbindungslinien $g_1, g_2, g_3$ je zweier entsprechenden Punkte, legt durch diese Linien eine sie schneidende Gerade $h_1$, welche mit keiner der Geraden $h_2$, $h_3$ in einer Ebene liegen kann, weil sonst auch $g_1$, $g_2$, $g_3$ und daher auch $h_2$, $h_3$ in dieser Ebene liegen müßten, so bilden die mittelst der drei Leitlinien $h_1$, $h_2$, $h_3$ bestimmten Erzeugenden $g$ auf $h_2$ und $h_3$ projektive Punktreihen, die mit den gegebenen zusammenfallen, weil dies für die drei Punktepaare auf $g_1$, $g_2$, $g_3$ der Fall ist.

**138.** Da alle windschiefen Flächen zweiten Grades als kollinear zu dem einschaligen Umdrehungshyperboloide (82) aus drei Geraden der einen Schaar als Leitlinien entstehen können, also von der Art der unsrigen sind, so gilt für *jede windschiefe Fläche zweiten Grades* **F**:

1) *Durch jeden Punkt einer* **F** *geht eine Gerade g und eine Gerade h*, wovon jede ganz in der **F** liegt.

2) Alle $g$ bilden eine *Schaar von Geraden* oder ein *System von Erzeugenden* oder eine *Regelschaar*, deren jede alle $h$ schneidet und für welche drei beliebige $h$ als *Leitlinien* gewählt werden können. Ebenso bilden alle *h eine zweite Schaar von Geraden*, deren jede alle $g$ schneidet und für welche drei beliebige $g$ als Leitlinien gewählt werden können.

3) *Zwei Gerade derselben Schaar schneiden sich nicht.*

4) Die *Ebenenbüschel*, welche aus Geraden der einen Schaar diejenige der anderen projiciren, sind unter einander *projektiv*; und ebenso sind die *Punktreihen*, welche auf Geraden der einen Schaar durch die der anderen eingeschnitten werden, unter einander und mit jenen Ebenenbüscheln *projektiv*, wenn sich diejenigen Ebenen und Punkte entsprechen, welche derselben Erzeugenden zugehören.

**139.** Die *Berührungsebene* einer windschiefen Fläche zweiten Grades in einem Punkte $P$ derselben ist die Ebene der beiden durch $P$ gehenden Erzeugenden. Daher berührt jede durch eine Erzeugende gehende Ebene die Fläche; denn sie enthält eine Erzeugende

der anderen Schaar (137). *Jede durch eine Erzeugende g einer windschiefen Fläche zweiten Grades* **F** *gehende Ebene berührt die* **F** *in einem Punkte der g, und das Büschel der Ebene ist mit der Reihe ihrer Berührungspunkte projektiv.* Denn das Ebenenbüschel ist projektiv mit den Punktreihen, welche die in den Ebenen enthaltenen Erzeugenden auf allen Erzeugenden $g$ einschneiden.

**140.** Um zu entscheiden, welche von den in Nr. 90 ff. angegebenen sechs Arten von Flächen zweiten Grades die windschiefen sind, beachtet man, daß jede Ebene jede Gerade einer solchen Fläche in einem reellen Punkte, also die Fläche in einer reellen Kurve schneidet. Daher kann diese Fläche das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid, das elliptische Paraboloid und die imaginäre Fläche nicht, könnte also nur das einschalige Hyperboloid oder das hyperbolische Paraboloid sein.

Um nun zwischen diesen beiden Flächen zu entscheiden, untersuchen wir die folgenden beiden möglichen Fälle: 1) *Die drei Leitgeraden sind mit ein und derselben Ebene parallel*; dann enthält die unendlich ferne Gerade dieser Ebene einen Punkt von jeder Leitlinie, ist also eine Erzeugende der Fläche. Die unendlich ferne Ebene enthält daher eine Erzeugende der einen und dann auch eine der anderen Schaar und ist eine Berührungsebene der Fläche; die Fläche kann also nur *das hyperbolische Paraboloid* sein.

2) *Die drei Leitlinien sind nicht mit ein und derselben Ebene parallel*; dann gibt es keine unendlich ferne Erzeugende der Fläche, diese wird daher von der unendlich fernen Ebene nicht berührt, kann also nur *noch das einschalige Hyperboloid* sein.

*Grenzfälle* treten ein, 1) wenn von den drei Leitgeraden zwei sich schneiden; dann zerfällt die Fläche in *zwei Ebenen*, diejenige der sich schneidenden Geraden, und diejenige des Schnittpunktes und der anderen Geraden;

2) wenn die Axen der projektiven Ebenenbüschel sich schneiden; dann gehen alle Erzeugende durch diesen Schnittpunkt und die Fläche wird ein *Kegel*;

3) wenn die projektiven geraden Punktreihen sich schneiden; dann werden alle Erzeugenden von einem Kegelschnitte $k$ eingehüllt und bilden den außerhalb des $k$ liegenden Teil der *Ebene des k doppelt*.

**141.** An die Stelle der drei geraden Leitlinien einer windschiefen Fläche zweiten Grades kann man irgend drei Linien der Fläche setzen, welche von jeder Erzeugenden geschnitten werden. Derartige Linien sind jedenfalls alle ebenen Kurven der Fläche, da die Ebene einer solchen von jeder Geraden getroffen wird. Es können daher auf der Fläche als Leitlinien gewählt werden:

1) Zwei nicht in derselben Ebene liegende Gerade, wie $h_1$, $h_2$, und ein Kegelschnitt $k$; derselbe hat mit $h_1$ und $h_2$ je einen Punkt gemein;

2) eine Gerade $h$ und zwei Kegelschnitte $k_1$, $k_2$; jeder derselben hat mit $h$ einen, und beide untereinander haben zwei reelle oder imaginäre Punkte (in der Schnittlinie ihrer Ebenen) gemein;

3) drei Kegelschnitte $k_1$, $k_2$, $k_3$; jeder derselben hat mit jedem der anderen zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein.

*Jede Schaar von Erzeugenden* ($g$) *bildet auf allen Erzeugenden der anderen Schaar* ($h$) *und auf allen Kegelschnitten* $k$ *der Fläche unter einander projektive Punktreihen*; denn ein Ebenenbüschel, welches eine $h$ der **F** zur Axe hat und die Schaar der $g$ projicirt, schneidet alle anderen $h$ in Punktreihen, die Ebene eines jeden $k$ in einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt auf $k$ (und $h$) liegt, und $k$ selbst in einer Punktreihe, so daß beiderlei Punktreihen unter einander projektiv sind. Daher entsteht die windschiefe Fläche zweiten Grades auch durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiven Reihen auf zwei Linien der Fläche, und zwar

4) auf einer Geraden $h$ und einem Kegelschnitte $k$, die einen Punkt gemein haben, in welchem entsprechende Punkte der Reihen vereinigt sind;

5) auf zwei Kegelschnitten $k_1$, $k_2$, welche zwei Punkte gemein haben, in deren jedem zwei entsprechende Punkte der Reihen vereinigt sind.

**142.** *Auf jede der angegebenen Weisen entsteht eine windschiefe Fläche* nicht nur, *wenn die Leitlinien* als Linien einer schon vorhandenen solchen Fläche gewählt, sondern auch wenn sie unter den angeführten Bedingungen des sich gegenseitig Schneidens und des Zusammenfallens entsprechender Punkte *willkürlich angenommen werden.*

*Im ersten Falle*, in welchem $h_1$, $h_2$, $k$ Leitlinien sind, sei $g$ eine Erzeugende. Dann ist eine Fläche zweiten Grades **F** durch das Paar sich schneidender Geraden $h_1$, $g$ und durch $k$, d. i. durch zwei sich in zwei Punkten schneidende Kegelschnitte ($h_1, g; k$), und durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt ($F$) der $h_2$ bestimmt (87). **F** enthält die $h_2$ ganz, weil sie drei Punkte derselben ($F$ und je einen Punkt auf $g$ und $k$) enthält (72), und sie enthält alle (die $h_1$, $h_2$, $k$ schneidenden) Erzeugenden $g$, weil sie von jeder drei Punkte enthält.

*Im zweiten Falle* ist ganz entsprechend die windschiefe Fläche diejenige Fläche zweiten Grades, welche durch $k_1$, $k_2$ und einen außerhalb derselben liegenden Punkt von $h$ bestimmt ist.

*Im dritten Falle* ist durch $k_1$, $k_2$, $k_3$ eine Fläche zweiten Grades **F** bestimmt, nämlich durch $k_1$, $k_2$ und einen außerhalb dieser Linien liegenden Punkt ($F$) der $k_3$. Diese enthält $k_3$ ganz, weil sie fünf Punkte derselben ($F$ und je zwei auf $k_1$ und $k_2$) enthält. **F** ist eine Regelfläche oder eine Nichtregelfläche, je nachdem ihre Berührungsebene in einem Schnittpunkte $A$ zweier Leitlinien $k_1$, $k_2$ (d. i. die Ebene der Tangenten dieser Linien in $A$) die dritte Leitlinie $k_3$ reell oder imaginär schneidet (82, 2)). Im ersteren Falle sind die Verbindungslinien von $A$ mit den beiden Schnittpunkten der $k_3$ die beiden durch $A$ gehenden Erzeugenden. Fallen beide zusammen, so wird die Fläche ein Kegel. Die **F** enthält alle Geraden, welche $k_1$, $k_2$, $k_3$ schneiden, weil sie von jeder drei Punkte enthält. Die Fläche ist aber als Regelfläche reell oder imaginär, je nachdem diese Geraden reell oder imaginär sind. Wir bemerken also, daß die $k_1$, $k_2$, $k_3$ nur unter einer gewissen Bedingung eine reelle Regelfläche bestimmen.

*Im vierten Falle* mit den zwei projektiven Punktreihen $h$ und $k$ seien $g_1$, $g_2$ zwei Erzeugende. $h$, $g_1$ und $k$ als zwei Kegelschnitte und ein außerhalb derselben liegender Punkt von $g_2$ bestimmen eine Regelfläche zweiten Grades, deren Erzeugende auf $h$ und $k$ projektive Punktreihen einschneiden, und zwar die gegebenen, weil sie mit ihnen je drei entsprechende Punkte $h$ $(k, g_1, g_2)$ und $k$ $(h, g_1, g_2)$ gemein haben.

*Im fünften Falle* mit den projektiven Punktreihen $k_1$, $k_2$ sei $g$ eine Erzeugende. Diese drei Linien bestimmen eine Regelfläche zweiten Grades, deren Erzeugende auf $k_1$ und $k_2$ unsere Punktreihen $k_1$ $(k_2, k_2, g)$ und $k_2$ $(k_1, k_1, g)$ erzeugen.

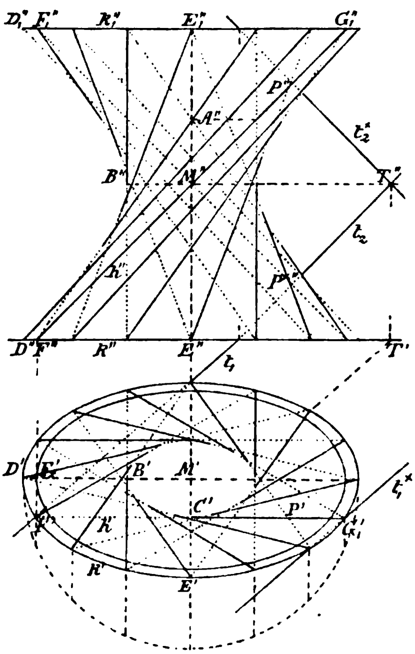
### b) Das einschalige Hyperboloid.

**143.** *Aufg. Das einschalige Hyperboloid darzustellen, von welchem zwei mit einer Hauptebene parallele gleiche Ellipsen $k$, $k_1$ und eine Erzeugende gegeben sind.*

*Aufl.* Die Ebene der Ellipse $k$ nehme man als $\mathbf{P}_1$, die $\mathbf{P}_2$ stelle man parallel zu einer Axe der $k$. Der Mittelpunkt $M$ der Fläche ist die Mitte der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Ellipsen; die ersten Projektionen derselben fallen in $k'$ zusammen, $M$ ist ihr Mittelpunkt, $D'$, $E'$ sind die ersten, $D''$, $E''$; $D_1''$, $E_1''$ die zweiten Projektionen benachbarter Scheitel von $k$ und $k_1$. Die gegebene Erzeugende $h$ schneide $k$ und $k_1$ bezw. in $F$, $G_1$. Die projektiven Punktreihen, welche durch die Erzeugende $g$ auf $k$ und $k_1$ gebildet werden, erhält man durch das Ebenenbüschel $h$, oder durch die Fig. 70.

parallelen Strahlenbüschel aus $F$ und $G_1$ bezw. in den Ebenen von $k$ und $k_1$. Zur gleichförmigen Verteilung der $g$ nehmen wir cyklisch-projektive Punktreihen an, welche projektiv sind mit einer gleichteilenden Punktreihe eines Kreises. Diese ist in der Figur durch Affinität mit dem aus $M'$ durch $D'$ gezogenen Kreise und dessen Teilung in 16 gleiche Teile hergestellt. Um eine Verschiedenheit der Teilungen in $k'$ und $k_1'$ zu vermeiden, sind $F'$ und $G_1'$ in Teilungspunkten angenommen. Die Verbindungslinien derjenigen Teilungspunkte auf $k$ und $k_1$, welche bezw. von $F$ und $G_1$ um gleich viele Teile in demselben Sinne entfernt sind, bilden die Erzeugenden $g$, während diejenigen $h$ durch eine Vertauschung der Punkte auf $k$ und $k_1$ erhalten werden. Die *Kehlellipse* halbirt die zwischen $k$ und $k_1$ liegenden Stücke der Erzeugenden und bildet den ersten Umriß; ihre Scheitel sind $B$ und $C$. Der *Asymptotenkegel* hat zur ersten Spur eine mit $DE$ konzentrische und ähnliche Ellipse; ihr Scheitel $F_2$ wird durch die durch $M$ parallel zu der Erzeugenden $(G_1F)$ gezogene Gerade erhalten, deren erste Projektion $M'F_2'$ ist. Dann bildet $F''G_1''$ auch eine Asymptote der Umrißhyperbel in $\mathbf{P}_2$, und durch sie wird die ideelle Axe $MA$ erhalten. Das *Ausziehen und Punktiren* in beiden Projektionen geschieht ganz entsprechend wie bei dem einschaligen Umdrehungshyperboloide (Fig. 15).

Fig. 70.



Aus der *ersten Projektion $P'$ eines Punktes $P$ der Fläche* erhält man dessen *zweite Projektion* $P''$ oder $P^{*''}$, wenn man aus $P'$ an die Projektion der Kehlellipse die zwei Tangenten zieht, diese in zweierlei Weise als Erzeugende der beiderlei Schaaren betrachtet, und aus ihren Schnitten mit $k$ und $k_1$ ihre zweiten Projektionen bestimmt, welche sich bezw. in $P''$ oder in $P^{*''}$ treffen.

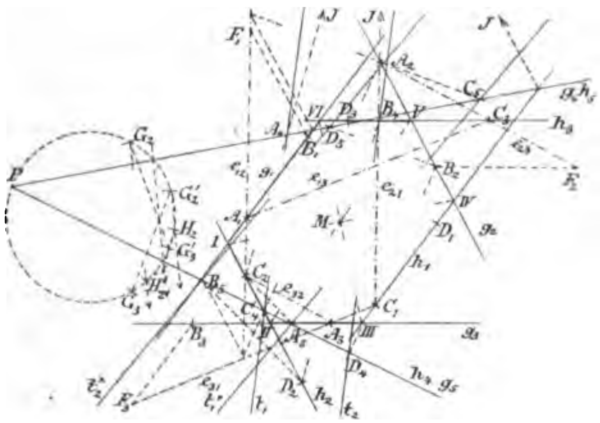
Die *Berührungsebenen* in den Punkten $P', P''$ und $P', P^{*''}$ sind jedesmal die Ebenen der beiden durch den Punkt gehenden Erzeugenden und haben zu Spuren bezw. $t_1, t_2$ und $t_1^*, t_2^*$. Zur Bestimmung

ihrer zweiten Spuren ist wegen Raummangels die zweite Spur $T$ ihrer Schnittlinie benutzt, welche gleiche Abstände von $t_1$ und $t_1^*$ hat.

**144.** *Aufgaben und Sätze über das einschalige Hyperboloid, welches durch drei Erzeugende derselben Schaar $g_1$, $g_2$, $g_3$ gegeben ist.*

Zur Darstellung benutze man zwei parallele Spurebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ (I, 112 ff.), wobei $g_1$ durch seine erste Spur $A_1$ und seine zweite Fig. 71.
$B_1$, $g_2$ und $g_3$ bezw. durch $A_2$, $B_2$; $A_3$, $B_3$ gegeben sind. Es sollen bestimmt werden

Fig. 71.



1) *die drei bezw. zu $g_1$, $g_2$, $g_3$ parallelen Erzeugenden $h_1$, $h_2$, $h_3$ der anderen Schaar.* Man findet $h_1$ als Schnitt der Ebenen, welche man parallel mit $g_1$ bezw. durch $g_2$ und $g_3$ legt und deren erste Spuren $e_{21}$, $e_{31}$ heißen mögen. Für $h_2$, $h_3$ muß man bezw. $e_{32}$, $e_{12}$; $e_{13}$, $e_{23}$ bestimmen. Da aber $e_{12} \parallel e_{21}$ u. s. w., so genügt es, von den sechs Spuren nur drei, etwa $e_{31}$, $e_{12}$, $e_{23}$, unmittelbar zu konstruiren. Die Spur $e_{31}$ der durch $g_3$ und $\parallel g_1$ gelegten Ebene erhält man als $A_3F_3$, wenn $B_3F_3 \# B_1A_1$ (I, 118, 3)); $e_{12} = A_1F_1$ durch $B_1F_1 \# B_2A_2$; $e_{23} = A_2F_2$ durch $B_2F_2 \# B_3A_3$. Dann zieht man $e_{13} \parallel e_{31}$ durch $A_1$, $e_{21} \parallel e_{12}$ durch $A_2$, $e_{32} \parallel e_{23}$ durch $A_3$, und erhält, wenn man die Schnittpunkte von $e_{31}$ und $e_{21}$ mit $C_1$, von $e_{12}$, $e_{32}$ mit $C_2$, von $e_{23}$, $e_{13}$ mit $C_3$ bezeichnet, die Erzeugenden $h_1$, $h_2$, $h_3$ als die Parallelen bezw. mit $g_1$, $g_2$, $g_3$ durch $C_1$, $C_2$, $C_3$. Ihre zweiten Spuren sind bezw. $D_1$, $D_2$, $D_3$, wenn $C_1D_1 \# A_1B_1$, $C_2D_2 \# A_2B_2$, $C_3D_3 \# A_3B_3$. Die sechs Erzeugenden bilden, da jede $g$ jede $h$ schneidet, einen Zug von Gegenkantenpaaren eines Parallelepipedums $g_1h_2g_3h_1g_2h_3$, dessen Ecken I, II ... VI sind.

2) Der *scheinbare Umriß* der Fläche ist der Kegeschnitt, welcher dem Sechsseit eingeschrieben ist, das durch die Projektionen der verzeichneten sechs Erzeugenden gebildet wird.

3) *Der Mittelpunkt $M$ der Fläche.* Durch ihn gehen die (asymptotischen) Ebenen je zweier parallelen Erzeugenden, wie $g_1 h_1$; daher ist $M$ der Mittelpunkt jenes Parallepipedums, oder der Schnittpunkt seiner Diagonalen I IV, II V, III VI.

4) *In jedem Sechsecke, dessen Seiten durch drei Erzeugende $g$ und drei $h$ der Fläche in Abwechslung gebildet werden, schneiden sich die Hauptdiagonalen (die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken) in einem Punkte.* Denn es gilt dies von jeder Projektion des Sechsecks, weil dieses dem Umrißkegelschnitte umschrieben ist (Satz von Brianchon, I, 324).

5) Der *Asymptotenkegel* hat $M$ zur Spitze und zur ersten Spur den Kegelschnitt, welcher die Geraden $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$ in ihren Mitten berührt. Denn $A_1$, $C_1$ sind die Spuren bezw. von $g_1$, $h_1$, also $A_1 C_1$ die Spur einer Asymptotenebene, und diese wird von der zu $g_1$ und $h_1$ parallelen (durch $M$ gehenden) Erzeugenden des Asymptotenkegels in ihrer Mitte getroffen.

6) *Einen Punkt der Fläche aus seiner Projektion $P$ zu bestimmen und in demselben die Berührungsebene* **T** *an die Fläche zu legen.* Man bestimmt den Punkt bei unserer Darstellungsweise durch die beiden Spuren einer durch ihn gehenden Geraden, seines Trägers als solche wählen wir eine jede der beiden Erzeugenden, welche zusammen dann zugleich die Berührungsebene bestimmen. Die Erzeugenden projiciren sich als Tangenten des Umrisses, der durch fünf von den sechs Tangenten bestimmt ist, etwa durch $g_1 h_2\ g_3 h_1\ g_2$. Soll der Umriß nicht verzeichnet werden, so verfährt man in der reciproken Weise von I, 384, 1), indem man die Doppelstrahlen der projektiven Strahlenbüschel ermittelt, welche aus $P$ die Punktreihen projicirt, die etwa auf $g_1$ und $h_1$ durch $h_2$, $g_3$, $g_2$ eingeschnitten werden. Diese Doppelstrahlen sind in der Figur nach I, 326 bestimmt, von denen eine jede einer jeden Schaar angehören kann, so daß sie sowohl mit $g_4$, $h_4$ als mit $h_5$, $g_5$ bezeichnet wurden. Die Spuren, so die von $g_4$, werden ermittelt, indem man beachtet, daß $g_4$ die $h_1$ und $h_2$ schneidet. Man legt durch den Schnittpunkt $g_4 h_1$ eine Parallele zu $h_2$; dieselbe bestimmt mit $h_1$ eine Ebene, deren erste Spur die (durch $C_1$ gehende) $e_{21}$ ist, und diese schneidet jene zu $h_2$ Parallele in ihrer ersten Spur $J$. Die Ebene dieser Geraden und der $h_2$ hat dann $JC_2$ und eine durch $D_2$ gehende Parallele derselben zu Spuren, und auf ihnen liegen die Spuren $A_4$, $B_4$ der $g_4$, weil die $g_4$ als Schneidende der beiden Geraden in ihrer Ebene enthalten ist. Ebenso erhält man von $g_5$, $h_4$, $h_5$ bezw. die Spuren $A_5$, $B_5$; $C_4$, $D_4$; $C_5$, $D_5$. — $P$ bestimmt also zwei Punkte der Fläche, nämlich $g_4, h_4$ und $g_5, h_5$. Die Berührungsebenen in denselben haben $A_4 C_4 = t_1$, $B_4 D_4 = t_2$,

die unter einander parallel sein müssen, und $A_5 C_5 = t_1^*$, $B_5 D_5 = t_2^*$ zu Spuren.

7) *Die Schnittlinie k einer Ebene* **E** *mit der Fläche zu bestimmen.* Man ermittle ihre Schnittpunkte mit fünf Erzeugenden der **F**; dieselben bilden fünf Punkte des Kegelschnittes $k$. Ist die **E** durch ihre Spuren $e_1$, $e_2$ gegeben, so bestimmt man ihre Schnittpunkte mit zwei Erzeugenden verschiedener Schaar, z. B. mit den parallelen $g_1$, $h_1$, durch ein und dieselbe Hilfsebene, die der beiden Erzeugenden, deren Spuren hier $A_1 C_1$, $B_1 D_1$ sind.

8) *Den Berührungskegel aus einem Punkte E an die Fläche zu legen.* Man legt durch $E$ und jede von fünf Erzeugenden eine Ebene; diese fünf Ebenen hüllen den Kegel, und ihre Spuren die Spur des Kegels ein, und es ist dieser Kegelschnitt durch seine fünf Tangenten bestimmt. Für zwei Erzeugende verschiedener Schaar, z. B. zwei parallele $g_1$, $h_1$, erhält man zwei solche Ebenen durch eine einzige Hilfslinie, die man durch $E$ und den Schnittpunkt der beiden Erzeugenden, hier parallel zu ihnen, legt.

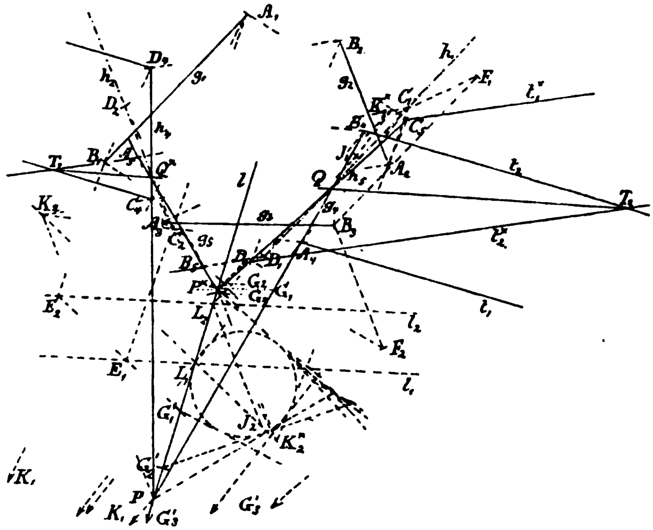
9) *Den Pol E einer Ebene* **E** *zu der Fläche zu bestimmen.* Man schneidet **E** mit drei Erzeugenden, legt durch jeden Schnittpunkt die Berührungsebene der Fläche und bestimmt $E$ als den Schnittpunkt dieser drei Ebenen. Die Berührungsebene in einem Punkte, der auf einer Erzeugenden, etwa einer $g$, gefunden wurde, enthält noch die durch diesen Punkt gehende Erzeugende $h$, und diese findet man als Schneidende mit zwei weiteren $g$. — Auf gleiche Weise erhält man die Berührungsebenen in den fünf Punkten der $k$ in 7); dieselben gehen alle durch den Punkt $E$ und hüllen den entlang $k$ berührenden Kegel ein.

10) *Die Polarebene* **E** *eines Punktes E zu der Fläche zu bestimmen.* **E** ist die Ebene der Berührungspunkte der Fläche mit den drei Ebenen, welche man durch $E$ und jede von drei Erzeugenden legt. Der Berührungspunkt einer Ebene wird auf der in ihr enthaltenen Erzeugenden durch die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Ebene mit zwei weiteren Erzeugenden derselben Schaar eingeschnitten. — Auf dieselbe Weise erhält man fünf Punkte der Berührungskurve des in 8) umschriebenen Kegels; dieselben liegen in einer Ebene und bestimmen die Kurve.

11) *Von einer gegebenen Geraden l die Schnittpunkte mit der Fläche zu bestimmen und durch l die Berührungsebenen an die Fläche zu legen, wenn diese durch drei Erzeugende $g_1$, $g_2$, $g_3$ derselben Schaar gegeben ist.* Fig. 72. Es sind $g_1 = A_1 B_1$, $g_2 = A_2 B_2$, $g_3 = A_3 B_3$, $l = L_1 L_2$ gegeben. Man ermittele zunächst zwei Erzeugende $h_1 = C_1 D_1$, $h_2 = C_2 D_2$ der anderen Schaar, zweckmäßig die parallelen bezw.

zu $g_1$, $g_2$. Zu dem Ende lege man, ähnlich wie in 1), $B_3F_1 \# B_1A_1$, $B_3F_2 \# B_2A_2$, ziehe $A_1C_2 \parallel A_2C_1 \parallel F_1F_2$, so ist $C_1$ der Schnittpunkt von $A_3F_1$ mit $A_2C_1$, $C_2$ der von $A_3F_2$ mit $A_1C_2$; man erhält dann

Fig. 72.



$D_1$ und $D_2$ durch $C_1D_1 \# A_1B_1$, $C_2D_2 \# A_2B_2$. Um die Schnittpunkte $P$, $P^*$ von $l$ mit der Fläche zu ermitteln, denke man sich diese durch die projektiven Ebenenbüschel $h_1(g_1g_2g_3)$, $h_2(g_1g_2g_3)$ entstanden; dieselben schneiden auf $l$ zwei projektive Punktreihen $G_1G_2G_3$, $G_1'G_2'G_3'$ ein, deren Doppelpunkte $P$, $P^*$ sind. Um die Schnittpunkte aller sechs Ebenen, z. B. $G_1'$ von $h_2g_1$, mit $l$ zu erhalten, legt man durch $l$ eine Hilfsebene $l_1l_2$ ($l_1$ willkürlich durch $L_1$, $l_2 \parallel l_1$ durch $L_2$), schneidet sie mit der Ebene $h_2g_1$ ($= C_2A_1$, $D_2B_1$) in $E_1E_2$, so geht $E_1E_2$ durch $G_1'$. Die Doppelpunkte $P$, $P^*$ sind in der Figur nach I, 327 bestimmt.

Die Berührungsebene T in $P$ ist die Ebene der beiden durch $P$ gehenden Erzeugenden $g_4$, $h_4$, in $P^*$ der $g_5$, $h_5$. Es sind aber bestimmt $g_4$, $g_5$ als schneidend mit $h_1$, $h_2$; $h_4$, $h_5$ als schneidend mit $g_1$, $g_2$. In der Ausführung legt man durch $P$ und $P^*$ Parallele zu $g_1$ (und $h_1$), $g_2$ (und $h_2$), deren erste Spuren bezw. $K_1$, $K_2$, $K_1^*$, $K_2^*$ sind. Zur Ermittelung dieser Spuren zieht man, da $P$, $P^*$ durch $l$ als Träger gegeben sind, die $L_2J_1 \# B_1A_1$, $L_2J_2 \# B_2A_2$, dann liegen $K_1$, $K_1^*$ auf der Geraden $L_1J_1$; $K_2$, $K_2^*$ auf $L_1J_2$, den Spuren der durch $l \parallel g_1$ bezw. $\parallel g_2$ gelegten Ebenen. Unsicherheit der Schnitte, die in der Figur vorkommt, ist leicht unter Beachtung der Verhältnismäßigkeit zu beseitigen. Nun erhält man $g_4 = A_4B_4$

als Schnitt der Ebene $Ph_1 = K_1C_1$, $B_4D_1$ mit der Ebene $Ph_2 = K_2C_2$, $B_4D_2$; $K_1C_1$ und $K_2C_2$ schneiden sich in der $A_4$, $B_4D_1$ und $B_4D_2$ in $B_4$, $A_4B_4$ läuft durch $P$. Auf gleiche Weise erhält man $g_5 = A_5B_5$, $h_4 = C_4D_4$, $h_5 = C_5D_5$. Die Berührungsebene $\mathrm{T} = g_4h_4$ hat dann zu Spuren $t_1 = A_4C_4$, $t_2 = B_4D_4$; $\mathrm{T}^* = g_5h_5$ dagegen $t_1^* = A_5C_5$, $t_2^* = B_5D_5$. Die Schnittlinie $T_1T_2$ beider Ebenen geht durch die Schnittpunkte $Q = g_4h_5$, $Q^* = g_5h_4$. $QQ^*$ ist die *Polare* von $PP^* = l$.

12) *Eine Gerade zu legen, welche vier gegebene Gerade schneidet.* Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man die eine Gerade mit dem durch die drei anderen gehenden Hyperboloide in zwei Punkten schneidet und durch jeden der Schnittpunkte eine Gerade legt, welche zwei der letzteren Geraden trifft; eine solche trifft als Erzeugende der Fläche auch die letzte Gerade. Es gibt also *zwei Gerade*, welche die vier gegebenen schneiden.

**145.** *Sätze über das ein- und das zweischalige Hyperboloid und ihre Asymptotenkegel.*

1) *Das Hyperboloid und sein Asymptotenkegel besitzen dasselbe System konjugirter Durchmesser und Durchmesserebenen*, weil sie in der unendlich fernen Ebene denselben Kegelschnitt und daher dasselbe Polarsystem besitzen. (Vergl. auch Nr. 89.)

2) *Jede Ebene schneidet das Hyperboloid und ihren Asymptotenkegel in koncentrischen, ähnlichen oder konjugirt ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten*, weil beide Kurven auf der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene dieselbe Involution besitzen, und weil derselbe Durchmesser der Flächen zu der Schnittebene in Bezug auf beide Flächen konjugirt ist, dieser aber die Mittelpunkte enthält.

3) *Jede schneidende Gerade enthält zwei gleiche Strecken zwischen beiden Flächen*, weil die durch die Gerade und den Mittelpunkt der Flächen gelegte Ebene das Hyperboloid und den Asymptotenkegel bezw. in einer Hyperbel und deren Asymptoten schneidet, für diese Linien aber der Satz gilt (I, 360).

**146.** *Das einschalige Hyperboloid ist in verschiedener Weise durch Elemente bestimmt, die ihm angehören sollen:*

1) *durch zwei sich nicht schneidende Gerade und drei Punkte.* Die Ebene der drei Punkte schneidet die Geraden in zwei Punkten, welche mit den drei gegebenen einen Kegelschnitt und dadurch die Fläche bestimmen (141, 1)).

2) *Durch ein windschiefes Viereck und einen Punkt*, indem man durch diesen eine Erzeugende jeder Schaar, als schneidende mit zwei Gegenseiten, legen kann; es sind dann drei $g$ und drei $h$ gegeben.

3) *Durch zwei sich schneidende Gerade und vier Punkte*, indem

man in den drei Ebenen je dreier einen Kegelschnitt der Fläche bestimmen kann, wodurch die Fläche bestimmt ist (141, 3)).

4) *Durch eine Gerade* $g_1$ *und sechs Punkte* $P_1, P_2 \ldots P_6$. Denkt man die durch einen der Punkte, etwa $P_1$, gehende Erzeugende $g_2$, so müssen die zwei Ebenenbüschel $g_1, g_2$, welche die übrigen fünf Punkte projiciren, unter einander projektiv sein, und hierdurch ist $g_2$ bestimmt. Denn schneidet man durch eine beliebige Ebene das Ebenenbüschel $g_1(P_2P_3 \ldots P_6)$ und die fünf Strahlen $P_1(P_2P_3 \ldots P_6)$ bezw. in einem Büschel von fünf Strahlen, einem Fünfstrahle, und in fünf Punkten $Q_2Q_3 \ldots Q_6$, so ist der Schnittpunkt $G_2$ von $g_2$ mit der Ebene derjenige Punkt, aus welchem die fünf Schnittpunkte durch ein mit dem Fünfstrahle projektives Strahlenbüschel projicirt werden. $G_2$ ist aber der vierte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, von denen der eine der Ort des Punktes ist, aus welchem die vier Punkte $Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_5$ durch ein mit $g_1\,(P_2\,P_3\,P_4\,P_5)$ projektives Strahlenbüschel, der zweite der Ort eines solchen, aus welchen $Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_6$ durch ein mit $g_1\,(P_2\,P_3\,P_4\,P_6)$ projektives Strahlenbüschel projicirt werden. Der erstere Kegelschnitt geht durch $Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_5$ und hat $Q_2T$ zur Tangente, wenn $Q_2\,(T\,Q_3\,Q_4\,Q_5) = g_1\,(P_2\,P_3\,P_4\,P_5)$ gemacht wurde; der zweite geht durch $Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_6$ und wird entsprechend bestimmt. Beide haben daher die drei Punkte $Q_2\,Q_3\,Q_4$ gemein; sie müssen daher noch einen vierten gemein haben und dieser ist $G_2$. Dann ist $g_2 = P_1G_2$ und die Fläche ist bestimmt.

*Übungsaufgaben.* Es ist jede dieser vier Aufgaben in der Zeichnung durchzuführen.

**147.** *Besondere Arten des einschaligen Hyperboloids.*

1) Nennt man in zwei Ebenenbüscheln $g_1, g_2$ eine Ebene des einen und die auf ihr senkrechte des anderen entsprechend, so sind beide Büschel projektiv und bilden durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen ein einschaliges Hyperboloid, welches ein *orthogonales Hyperboloid* heißt*). Die zu diesen Büscheln parallelen Büschel $g_1', g_2'$, deren Axen durch den Mittelpunkt der Fläche gelegt sind, bilden dann einen Kegel, welcher ein *orthogonaler Kegel* heißt und der Asymptotenkegel des Hyperboloids ist, weil jede seiner Erzeugenden mit einer solchen des Hyperboloids parallel läuft.

*Jede zu einer der Axen* $g_1, g_2$ *senkrechte Ebene schneidet jede der*

*) So benannt von Herrn *Schröter* in s. Abh.: Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art (Journ. f. r. u. a. Math. v. Crelle-Borchardt, B. 85, 1878, S. 41; siehe auch Schröter, Theorie der Oberfl. 2. O. und Raumkurven 3. O., 1880, S. 184). Dies Hyperboloid wurde zuerst aufgestellt und untersucht von *Steiner* (Journ. f. r. u. a. Math. v. Crelle, B. 2, 1827, S. 292; und System. Entwickl. d. Abhäng. geometr. Gestalten v. einander, 1832, S. 218 u. 232).

*beiden Flächen in einem Kreise, welcher bezw. von $g_1$, $g_2$ und von $g_1'$, $g_2'$ in den Endpunkten $G_1$, $G_2$,* bezw. *$G_1'$, $G_2'$ eines Durchmessers getroffen wird.* Denn eine auf $g_1$ senkrechte Ebene schneidet das Ebenenbüschel $g_1$ in einem Strahlenbüschel $G_1$, dasjenige $g_2$ in einem solchen $G_2$, deren Strahlen die Senkrechten sind, welche aus $G_2$ auf die entsprechenden Ebenen des Büschels $g_1$ gefällt sind (indem sie eine auf $g_1$ senkrechte Ebene bilden), oder auch auf die entsprechenden Strahlen des Büschels $G_1$; woraus sowohl folgt, daß beide Strahlenbüschel den bezeichneten Kreis, die Schnittkurve mit der Fläche, bilden, als auch daß die Strahlenbüschel $G_1$, $G_2$, daher auch die Ebenenbüschel $g_1$, $g_2$ projektiv sind und ein Hyperboloid, bezw. einen Kegel zweiten Grades erzeugen.

*Das orthogonale Hyperboloid entsteht auch durch die Ebenenbüschel der bezw. zu $g_1$, $g_2$ parallelen Erzeugenden $h_1$, $h_2$, deren entsprechende Ebenen ebenfalls auf einander senkrecht stehen.*

Eine auf $g_1'$ senkrechte Ebene $\mathbf{K}$ schneidet den Kegel in einem Kreise $k$ vom Durchmesser $G_1'G_2'$, und die Ebene $g_1'g_2' = \mathbf{S}$ ist eine Symmetrieebene für den Kreis $k$ und für den Kegel. Legt man nun durch zwei symmetrische Punkte $G_3'G_4'$ des $k$ die Kegelerzeugenden $g_3'g_4'$, so besitzen diese gleiche Neigungen gegen die $g_1'$, und gleiche gegen die $g_2'$; und nimmt man $g_3'$, $g_4'$ als Axen zweier Ebenenbüschel an, welche den Kegel erzeugen, so sind diese projektiven Büschel unter einander kongruent. Denn zieht man an $k$ in $G_3'$ die Tangente $G_3'T$, so entsprechen sich in jenen Büscheln dreimal zu zwei die Ebenen $g_3'$ $(G_1'G_2'T)$ und $g_4'$ $(G_1'G_2'G_3')$. Die Die Ebenen $g_3'G_1'$, $g_4'G_1'$ sind aber $\perp \mathbf{K}$, weil sie die $g_1'$ enthalten; auf diesen Ebenen stehen bezw. die Geraden $G_3'G_2'$ und $G_4'G_2'$, also auch die Ebenen $g_3'G_2'$ und $g_4'G_2'$ senkrecht (ersteres, weil $\sphericalangle G_1'G_3'G_2' = \sphericalangle G_1'G_4'G_2' = 90^0$). Ferner ist $\sphericalangle G_1'G_3'T = \sphericalangle G_1'G_3'G_4'$; daher liegen symmetrisch zu der auf $\mathbf{K}$ senkrechten Ebene $g_3'G_1'$ die Geraden $G_3'T$, $G_3'G_4'$, und ebenso die Ebenen $g_3'T$, $g_3'G_4'$ oder sie bilden gleiche Winkel mit $g_3'G_1'$. Da außerdem wegen der Symmetrie in Bezug auf $\mathbf{S}$ die Winkel der Ebenen $g_3'G_1'$, $g_3'G_4'$ und der Ebenen $g_4'G_1'$, $g_4'G_3'$ gleich sind, so sind in den Ebenenbüscheln $g_3'(G_1'G_2'T)$, $g_4'(G_1'G_2'G_3')$ die Winkel der zwei ersten Ebenen rechte, und die der ersten und letzten Ebenen unter einander gleich, daher die Büschel dieser je drei Ebenen, sowie die ganzen Ebenenbüschel $g_3'$, $g_4'$ unter einander kongruent. Indem es unendlich viele solche Paare $g_3'$, $g_4'$ gibt, und Parallele zu ihnen im Hyperboloide bestehen $(g_3, g_4)$, gilt: *Das orthogonale Hyperboloid und der orthogonale Kegel können auf unendlich viele Arten durch kongruente Ebenenbüschel $g_3$, $g_4$, bezw. $g_3'$, $g_4'$ erzeugt werden, deren Axen*

*gleich geneigt sind gegen jede der beiden zu den Kreisebenen senkrechten Erzeugende* $g_1$, $g_2$ *bezw.* $g_1'$, $g_2'$.

*Umgekehrt erzeugen irgend zwei kongruente Ebenenbüschel* $g_3$, $g_4$ *oder* $g_3'$, $g_4'$ *ein orthogonales Hyperboloid oder einen orthogonalen Kegel, und es liegen die zu den Kreisebenen senkrechten Erzeugenden bei dem Kegel* ($g_1'$, $g_2'$) *in derjenigen von den beiden die Winkel* $g_3'$, $g_4'$ *senkrecht halbirenden Ebene* **S**, *in welcher beide Ebenenbüschel ungleichlaufende Strahlenbüschel einschneiden; bei dem Hyperboloide liegen* $g_1$, $g_2$ *in einer zu* **S** *parallelen Ebene.*

In dieser Ebene nämlich besitzt der *Kegel* zwei reelle Erzeugende, die Doppelstrahlen $g_1'$, $g_2'$ jener ungleichlaufenden projektiven Strahlenbüschel. In der anderen (zu **S** senkrechten) Halbirungsebene sind die Strahlenbüschel gleichlaufend und besitzen im allgemeinen keinen Doppelstrahl, weil, wenn sie einen besäßen, sie alle Strahlen gemein haben müßten, da sie dann symmetrisch zu dieser Ebene und perspektiv wären. Der Orthogonalkegel, welcher $g_1'$ zu einer auf Kreisebenen senkrechten Erzeugenden hat und durch $g_3'$, $g_4'$ geht, ist aber durch diese drei Erzeugenden bestimmt, weil der Kreis $k$ einer solchen Ebene **K** durch die drei Schnittpunkte mit diesen Erzeugenden bestimmt ist. Weil $g_1'$ in **S**, **K** $\perp$ **S** und $g_3'$, $g_4'$ symmetrisch zu **S** liegen, so liegt auch $k$ symmetrisch zu **S**; in **S** liegt daher ein Durchmesser des $k$, sowie die auf den anderen Kreisebenen senkrechte Erzeugende $g_2'$ des Kegels. Daher sind $g_3'$, $g_4'$ gleich geneigt gegen jede von diesen beiden Erzeugenden, und der Orthogonalkegel wird auch durch zwei kongruente Ebenenbüschel $g_3'$, $g_4'$ hervorgebracht. Mit dem Ebenenbüschel $g_3'$ sind demnach zweierlei Ebenenbüschel $g_4'$ kongruent, das ursprünglich gegebene und das des Orthogonalkegels; beide sind daher unter einander kongruent, und sie fallen zusammen, weil ihre beiden sich entprechenden Ebenen $g_4' G_1'$ zusammenfallen, und weil sie gleichen Drehungssinn besitzen, nämlich in der Ebene **S** beide den entgegengesetzten des Ebenenbüschels $g_3'$. Daher erzeugen die gegebenen kongruenten Ebenenbüschel $g_3'$, $g_4'$ den Orthogonalkegel $g_1'$, $g_2'$. Irgend zwei zu den Ebenenbüscheln $g_3'$, $g_4'$ bezw. parallele $g_3$, $g_4$ erzeugen dann ein *orthogonales Hyperboloid*, dessen $g_1$, $g_2$ bezw. parallel zu $g_1'$, $g_2'$ sind, und dessen Asymptotenkegel mit dem betrachteten Kegel parallel ist.

2) Nennt man auf *zwei Geraden* $g_1$, $g_2$ einen Punkt der einen einem Punkte der andern entsprechend, wenn die aus ein und demselben Punkte $P$ nach ihnen gezogenen Strahlen einen *rechten Winkel* mit einander bilden, so sind die Punktreihen $g_1$, $g_2$ projektiv und bestimmen eine *Regelfläche zweiten Grades.* Denn die Punktreihe $g_1$

wird aus $P$ durch ein Strahlenbüschel projicirt, diejenige $g_2$ aus einer durch $P$ und senkrecht zur Ebene $Pg_1$ gelegten Axe durch ein Ebenenbüschel, welches mit dem Strahlenbüschel projektiv ist, weil jede seiner Ebenen senkreckt auf dem entsprechenden Strahle steht.

**148.** *Übungsaufgaben.* 1) Von einem orthogonalen Hyperboloide sind die beiden auf Kreisebenen senkrechten Erzeugenden derselben Schaar $g_1$, $g_2$ gegeben, man soll die beiden kleinsten Kreise, den Mittelpunkt der Fläche, und diejenigen beiden Axen $g_3$, $g_4$ kongruenter, die Fläche erzeugender Ebenenbüschel bestimmen, deren jede gegen $g_1$ und $g_2$ gleich geneigt ist.

2) Gegeben zwei Gerade $g_1$, $g_2$ und ein Punkt $P$, man soll diejenige Regelfläche zweiten Grades darstellen, auf deren Erzeugenden von $g_1$ und $g_2$ Strecken abgeschnitten werden, die aus $P$ unter einem rechten Winkel erscheinen (147, 2)).

3) Den Punkt zu bestimmen, von dem aus jede Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten zweier beliebigen projektiven Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ unter einem rechten Winkel erscheint (zwei Auflösungen).

Zur Verzeichnung können die Grund- und Aufrißebene, oder zwei parallele Spurebenen benutzt werden.

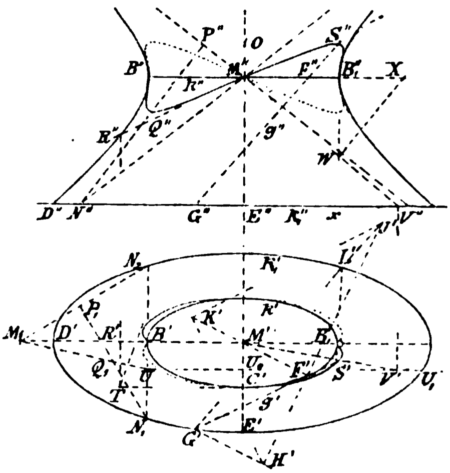
**149.** Auf jeder Erzeugenden $g$ eines einschaligen Hyperboloides, sowie einer jeden windschiefen Fläche $\mathbf{F}$ gibt es einen Punkt $S$, welcher den kürzesten Abstand von der benachbarten Erzeugenden $(g_1)$ derselben Schaar besitzt und der *Centralpunkt* der Erzeugenden $g$ heißt. Da dieser Abstand senkrecht auf $g$ und $g_1$ steht, und da die durch $g$ parallel zu $g_1$ gelegte Ebene auch den unendlich fernen Punkt der $g_1$ enthält und deswegen die Fläche in dem unendlich fernen Punkte der $g$ berührt und eine *asymptotische Ebene* der $\mathbf{F}$ bildet, so steht jener kürzeste Abstand auf dieser Ebene senkrecht. Fig. 73. Da er ferner in der Berührungsebene der $\mathbf{F}$ in $S$ liegt, *so stehen die Berührungsebenen einer windschiefen Fläche in dem Centralpunkte und in dem unendlich fernen Punkte einer Erzeugenden auf einander senkrecht*, und der Centralpunkt der $g$ wird als der Berührungspunkt der durch $g$ senkrecht zur asymptotischen Ebene der $g$ gelegten Ebene gefunden. Die Centralpunkte aller Erzeugenden bilden die *Striktionslinie.* Jede Schaar von Erzeugenden des Hyperboloides hat ihre besondere Striktionslinie.

**150.** *Aufg. Die Striktionslinie für die eine Schaar von Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids zu konstruiren.*

*Aufl.* Die Fläche sei durch die Kehlellipse $k$ und einen Punkt $G$ gegeben. Man lege $k$, deren Halbaxen $MB$, $MC$ seien, $\parallel \mathbf{P}_1$, $MB \parallel x$; durch $G$ lege man $\mathbf{P}_1$ und die zu $k$ parallele Ellipse

$k_1 = DE$, im Grundriß koncentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen mit $k$. Um auf einer beliebigen Erzeugenden $g$, welche $k$ und $k_1$ bezw. in $F$ und $G$ trifft (während $g'$ die $k'$ in $F'$ berührt), den Centralpunkt $S$ zu finden, legt man zunächst die asymptotische Ebene durch $g$; dieselbe enthält die zu $g$ parallele Erzeugende der anderen Schaar, schneidet daher die Ebene von $k$ im Durchmesser $MF$, die von $k_1$ in der zu $MF$ Parallelen $GH$. Zu dieser Ebene legt man durch einen Punkt der $g$, etwa durch $F$, eine Senkrechte $FJ$ ($F'J' \perp M'F'$), bestimmt ihren Schnittpunkt $H'$ mit $G'H'$ und ihre Spur $J'$, indem man ihre projicirende Ebene in $\mathbf{P}_1$ umlegt, dabei auf $F'M'$ die $F'K'$ = Abstand $k_1k = E''M''$ aufträgt und $K'J' \perp H'K'$ zieht. $J'G'$ ist dann die erste Spur der durch $g$ senkrecht zur asymptotischen Ebene gelegten Ebene; sie schneidet die $k_1'$ im zweiten Punkte $L'$, und die aus $L'$ an $k'$ als Erzeugende der zweiten Schaar gezogene Tangente, welche also entgegengesetzten Sinn mit der Tangente $G'F'$ hat, bestimmt $S'$ auf $g'$, woraus $S''$ folgt.

Fig. 73.



Die Kurve geht durch die vier Scheitel der Fläche (auf der Kehlellipse). Faßt man die Striktionslinien beider Schaaren von Geraden zusammen, so sind die Hauptebenen der Fläche Symmetrieebenen der Kurve, und der Mittelpunkt der Fläche ihr Mittelpunkt. Für jede einzelne der beiden Kurven ist dagegen jede der drei Flächenaxen Symmetrielinie, weil sie es für jede Schaar von Geraden ist. $M'$ und $M''$ sind daher die Mittelpunkte der Projektionen.

Es sollen nun noch die *Krümmungskreise der Projektionen der Kurve in den Scheiteln der Fläche* ($B$ und $C$) bestimmt werden. Ersetzt man den durch $C$ gehenden elliptischen und hyperbolischen Hauptschnitt der Fläche durch je eine Parabel mit übereinstimmendem Krümmungskreise in $C$, und mit der Axe $CM$, so haben je zwei der Kurven drei Punkte, und weil $C$ ein Scheitel ist, noch einen vierten Punkt bei $C$ gemein. Hierdurch wird das Hyperboloid durch ein hyperbolisches Paraboloid ersetzt, dessen Axe $CM$ ist und welches mit ersterem bei $C$ vier benachbarte Erzeugende gemein hat.

Daher haben beide Flächen drei kürzeste Abstände dieser Erzeugenden und drei Punkte ihrer Striktionslinien oder deren Krümmungskreise gemein. Bestimmt man nun die Asymptoten des hyperbolischen Hauptschnittes $B''D''$, z. B. $M''N''$ durch $E''N''^2 = E''D''^2 - M''B''^2$, so sind diese Asymptoten die zweiten Projektionen der Scheitelerzeugenden beider Flächen. Nun ist aber die Striktionslinie des Paraboloides, wie wir in Nr. 152 sehen werden, eine Parabel, deren Ebene durch die Axe $CM$ geht und deren zweite Projektion die Gerade $M''Q''$ bildet, wenn $N''P''$ die aus irgend einem Punkte $N''$ der einen Erzeugenden $M''N''$ auf die andere gefällte Senkrechte, und $Q''$ deren Mittelpunkt ist. Daher ist die Gerade $M''Q''$ auch der Krümmungskreis der zweiten Projektion der Striktionslinie des Hyperboloids, oder deren Tangente in ihrem Wendepunkte $M''$. Die Ebene des Krümmungskreises schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitte, hier in einer Ellipse, deren Scheitel $C$ und $R$ sind; es ist dann im Grundriß der Krümmungsmittelpunkt $O$ dieser Ellipse in $C$ auch der Krümmungsmittelpunkt der Striktionslinie ($C'M'R'T$ ein Rechteck, $TO \perp C'R'$, $O$ auf $C'M'$).

Um die Krümmungskreise beider Projektionen der Striktionslinie in $B$ zu erhalten, verfährt man entsprechend. Man lege die Berührungsebene der Fläche in $B$ in $\mathbf{P}_1$ um, wobei die durch $B$ gehenden Erzeugenden der Fläche nach $N_1 M_1$ und $N_2 M_1$ gelangen, ($B'M_1 = E''M''$), fälle $N_1 P_1 \perp N_2 M_1$, halbire $N_1 P_1$ in $Q_1$, so ist wieder $M_1 Q_1 U$ die Tangente der Projektion der Striktionslinie in $B$ auf jene Berührungsebene. Die projicirende Ebene dieser Tangente schneidet die $\mathbf{P}_1$ in $UU_1$, die $M'C'$ in $U_0$, die Ellipse $k_1$ in $U_1$, und das Hyperboloid in einer Hyperbel, deren reelle Scheitel $B$, $B_1$ sind, und welche durch $U_1$ geht. Eine Asymptote dieser Hyperbel ist $MV$, wenn $V'$ auf $U_0 U_1$ bestimmt wird durch $U_0 V'^2 = U_0 U_1^2 - M'B_1'^2$. Im Aufriß ist der Krümmungsmittelpunkt $X$ dieser Hyperbel in ihrem Scheitel $B_1''$ bestimmt ($B_1''W \perp M''B_1''$ bis $W$ auf $M''V''$, $WX \perp M''V''$ bis $X$ auf $M''B_1''$), im Grundriß in gleicher Weise. Diese Krümmungsmittelpunkte gelten dann auch für die Projektionen der Striktionslinie.

*Die Striktionslinie des einschaligen Umdrehungshyperboloids ist sein Kehlkreis.*

### c) Das hyperbolische Paraboloid.

**151.** Bei dieser Fläche besitzt jede Schaar von Erzeugenden eine unendlich ferne Gerade (140), und wenn man eine solche, welche durch eine Ebene $\mathbf{H}$ bestimmt ist, als eine der drei Leitlinien wählt, so sind die Erzeugenden $g$ parallel zu $\mathbf{H}$, der sog. *Richtebene.* Da-

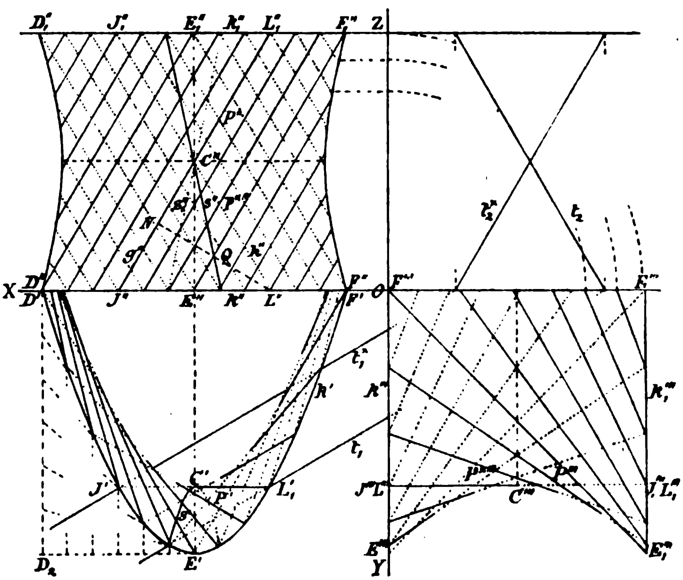
her: *Das hyperbolische Paraboloid ist durch zwei Leitgerade $h_1$, $h_2$ und eine Richtebene* H *bestimmt.* Indem jede parallel zu H gelegten Ebenen auf $h_1$ und $h_2$ Punkte derselben Erzeugenden $g$ einschneiden, folgt: *Bei dem hyperbolischen Paraboloide schneiden die Erzeugenden der einen Schaar auf denen der anderen Schaar ähnliche Punktreihen ein, oder diese Fläche ist durch zwei ähnliche Punktreihen bestimmt.*

Da zwei ähnliche Punktreihen durch zwei Paare entsprechender Punkte (im Endlichen) gegeben sind, so folgt: *Das hyperbolische Paraboloid ist durch ein windschiefes Viereck bestimmt.* Die *Richtebene* der beiden Schaaren von Erzeugenden sind mit je zwei Gegenseiten des Vierecks parallel.

**152.** *Aufg. Das hyperbolische Paraboloid darzustellen, von welchem zwei mit einer Hauptebene parallele, von ihr gleich weit entfernte Parabeln $k$, $k_1$ und eine Erzeugende gegeben sind.*

Fig. 74. *Aufl.* Man nehme drei mit den Hauptebenen parallele Projektionsebenen an. $P_1$ stelle man parallel zu den Ebenen der Para-

Fig. 74.




beln, wodurch deren erste Projektionen in $D'E'F'$ in einander fallen; $P_2$ stelle man senkrecht zu den Axen der Parabeln und der Fläche, daher $P_3$ parallel zur Ebene dieser Axen. Die gegebene Erzeugende verbinde den Punkt $J$ der $k$ mit dem $L_1$ der $k_1$. Da jede Richtebene eine unendlich ferne Erzeugende und daher den unendlich fernen Punkt der Fläche enthält, so ist sie parallel zur

Axe der Fläche, projicirt sich daher auf $\mathbf{P}_2$ in eine Gerade, mit welcher die zweiten Projektionen der zugehörigen Erzeugenden parallel sind. Wegen der Symmetrie der Fläche in Bezug auf ihre Hauptebenen sind beide Richtebenen gleich geneigt gegen dieselben, und die zweiten Projektionen der Erzeugenden beider Schaaren sind zwei Schaaren paralleler Geraden von gleicher Neigung gegen die Hauptebenen. Um gleiche Abstände dieser Parallelen zu erhalten, konstruire man Punkte der Parabel $k'$ nach I, 380 derart, daß der Parabelbogen $DEF$ in (12) Teile von gleichen Abständen in der Richtung $x$ geteilt wird. Eine doppelte Teilung wurde dadurch vermieden, daß $L_1'$ als ein Punkt der von $J'$ ausgehenden Teilung gewählt wurde. Die Verbindungslinien der Teilungspunkte auf $k''$ und $k_1''$, welche in gleichem Sinne gleich weit bezw. von $J''$ und $L_1''$ entfernt sind, liefern die (unter einander parallelen) zweiten Projektionen der Erzeugenden; die entsprechenden Punkte verbinde man in der ersten und dritten Projektion. Diejenigen der anderen Schaar entstehen wegen der Symmetrie durch Vertauschung von $J$ und $L_1$ auf $k$ und $k_1$ mit $J_1$ und $L$ auf $k_1$ und $k$. Die Erzeugenden in der ersten und dritten Projektion, von deren beiden Punkten auf $k$ und $k_1$ nur noch der eine erreichbar ist, erhält man durch Beachtung, daß die Erzeugenden der einen Schaar auf denjenigen der anderen bei der angenommenen gleichförmigen Verteilung, eine Gleichteilung hervorbringen, so daß man in der ersten Projektion nur die Erzeugenden $E'D'$ und $E'F'$, und in der dritten $E'''F_1'''$ und $E_1'''F'''$ in je 12 gleiche Teile zu teilen hat, um für jede Erzeugende der anderen Schaar noch einen Punkt zu erhalten.

Die zu $k$ und $k_1$ parallele Hauptebene liegt in deren Mitte; ihr *Hauptschnitt* ist im Grundriß die zu $k'$ kongruente und koaxiale Parabel, welche die Erzeugenden einhüllt. $C$ ist ihr Scheitel. Der zu $\mathbf{P}_3$ parallele Hauptschnitt ergibt sich in der dritten Projektion als einhüllende Parabel.

Aus der ersten Projektion $P'$ eines *Punktes* der Fläche ergibt sich wieder mittelst der durch ihn gehenden, die Umrißparabel berührenden Erzeugenden zweideutig $P''$ oder $P''^*$, und die *Berührungsebene* in demselben mit der ersten Spur $t_1$ oder $t_1^*$ und der zweiten $t_2$ oder $t_2^*$.

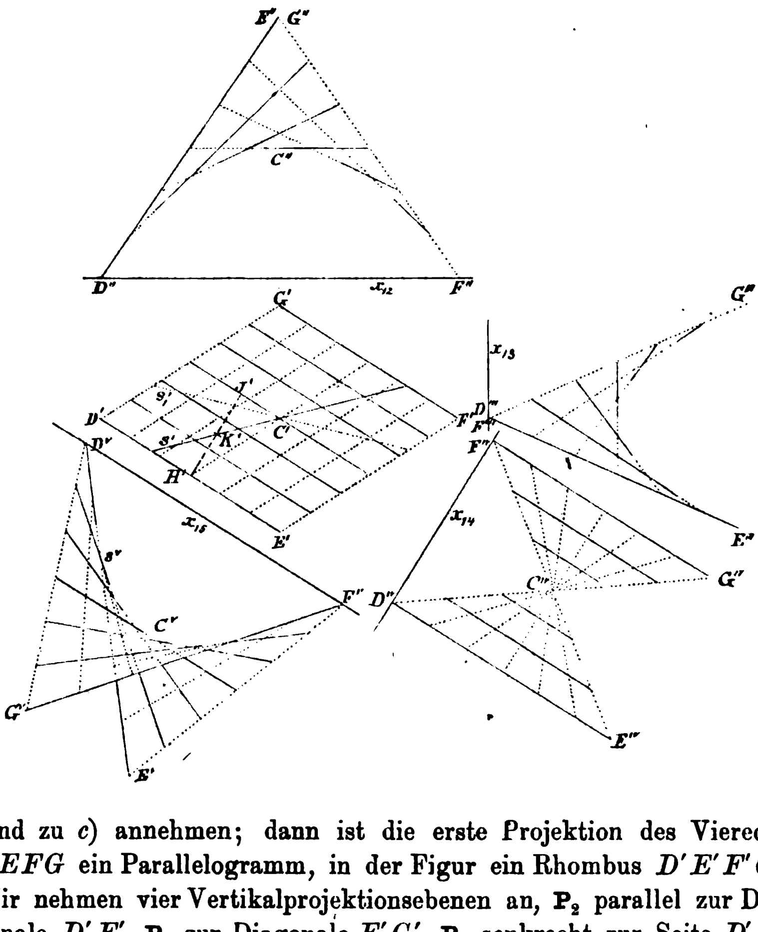
Um die *Striktionslinie* $s$ zu der einen Schaar der Erzeugenden $g$ zu erhalten, beachte man, daß die asymptotische Ebene einer jeden $g$ parallel zu der Richtebene $\mathbf{H}$ derselben, daß also die Berührungsebene im Centralpunkte parallel zu der Senkrechten zu $\mathbf{H}$ ist, so daß die Striktionslinie die Berührungslinie der Fläche $\mathbf{F}$ mit einem Cylinder bildet, dessen Erzeugende $\perp \mathbf{H}$ stehen, oder die Schnitt-

linie der $\mathbf{F}$ mit derjenigen Durchmesserebene, welche zu der auf $\mathbf{H}$ senkrechten Richtung konjugirt ist. Die von $L$ auf $g = JL_1$ gefällte Senkrechte $LN$ ist eine auf $\mathbf{H}$ senkrechte Sehne der $\mathbf{F}$, durch deren Mittelpunkt $Q$ und die Axe der $\mathbf{F}$ daher die Ebene der Striktionslinie $s$ geht. Diese selbst ist eine Parabel, deren Scheitel und Axe mit denen der $\mathbf{F}$ zusammenfallen. Zu $h$ gehört die Striktionslinie $s_1$.

**153.** *Aufg. Das hyperbolische Paraboloid aus einem durch Erzeugende desselben gebildeten windschiefen Vierecke darzustellen.*

*Aufl.* Die mit je zwei Gegenseiten parallelen Ebenen sind die Richtebenen, ihre Schnittlinie ist parallel zur Axe $c$ der Fläche. Wir
Fig. 75. wollen der Einfachheit halber $\mathbf{P}_1$ senkrecht zu beiden Richtebenen

Fig. 75.




(und zu $c$) annehmen; dann ist die erste Projektion des Vierecks $DEFG$ ein Parallelogramm, in der Figur ein Rhombus $D'E'F'G'$. Wir nehmen vier Vertikalprojektionsebenen an, $\mathbf{P}_2$ parallel zur Diagonale $D'F'$, $\mathbf{P}_3$ zur Diagonale $E'G'$, $\mathbf{P}_4$ senkrecht zur Seite $D'E'$, $\mathbf{P}_5$ parallel zur Seite $D'E'$. $D, F$ mögen in $\mathbf{P}_1$; $E, G$ in gleichem

Abstande von $P_1$ liegen. Dann bilden die Vertikalprojektionen des Vierecks der Reihe nach zwei gleich geneigte, gleiche Schenkel eines Winkels $D''E''(G'')F''$, ebenso eines Winkels $E'''D'''(F''')G'''$, ein verschränktes Viereck $D^{IV}E^{IV}F^{IV}G^{IV}$ mit den Ecken eines Rechtecks, ein verschränktes Viereck $D^{V}E^{V}F^{V}G^{V}$ mit den Ecken eines gleichschenkligen Paralleltrapezes. Erzeugende erhält man durch Gleichteilung aller Seiten in dieselbe Anzahl (6) von Teilen, wobei die der einen Schaar durch ausgezogene, die der anderen durch punktirte Linien dargestellt sind. Die Umrisse der zweiten und dritten Projektion sind die (parabolischen) Haupschnitte. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten des Vierecks schneiden sich bei unserer symmetrischen Annahme im Scheitel $C$ der Fläche.

Um eine *Striktionslinie* $s$ zu erhalten, fällt man wieder von einem Punkte $H$ einer Scheitelerzeugenden eine Senkrechte $HJ$ auf die andere; die durch den Mittelpunkt $K$ von $HJ$ und die Axe $c$ gelegte Ebene schneidet die Fläche in der Striktionslinie $s$; dieselbe bildet zugleich den wahren Umriß bei der fünften Projektion, weil $P_5 \perp HJ$; der zugehörige scheinbare Umriß ist $s^V$. Die zweite Striktionslinie $s_1$ ergibt sich durch Symmetrie*).

*Übungsaufg.* Es ist ein beliebiges windschiefes Viereck in beliebiger Lage gegen die Projektionsebenen gegeben, man soll die Axe und den Scheitel des durch das Viereck gehenden hyperbolischen Paraboloides bestimmen und die Aufgaben der Nr. 144 lösen.

*) Zur Zeit da mir dieser Druckbogen zur Korrektur vorliegt (Nov. 1886), kommt mir eine Schrift über die Aufgabe der Nr. 114 zu Gesicht, die ich noch anführen will: *Hofmann*, die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken, 1886. — Außerdem sei eine Abhandlung von *Beyel* „Zur Geometrie des Imaginären" (Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich, B. 31, 1886) genannt, welche insbesondere die Imaginärprojection für imaginäres Collineationscentrum, Coll.-Axe und Charakteristik behandelt. Dabei wird am Schlusse des genannten Abschnittes angeführt, daß ich einen speciellen Fall dieser Projektionen in meinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie erwähnt und Imaginärprojektion von Kegelschnitten genannt habe. Der Ausdruck „erwähnt" erweckt den Schein, als wären schon vorher Arbeiten über diesen Gegenstand bekannt gewesen. Dem gegenüber fühle ich mich gedrungen ausdrücklich auszusprechen, daß ich die Urheberschaft und die Priorität in Bezug auf die Imaginärprojektion der Linien und der Flächen zweiten Grades für mich in Anspruch nehme, insbesondere in Bezug auf ihre (ideelle) Darstellung durch reelle Gebilde gleicher Art, und in Bezug auf die dadurch geschaffene Möglichkeit und deren Auswertung, mit den imaginären Gebilden eben so leicht zu konstruiren, wie mit den reellen, unter anschaulicher Unterscheidung zwischen zwei konjugirt-imaginären Elementen (115 f.). Ich erhebe diesen Anspruch, weil die bezeichneten Entwickelungen von mir herrühren, und weil mir bei dem Erscheinen meines Buches (1884) keine anderseitigen Mitteilungen über diesen Gegenstand bekannt waren und auch seitdem keine den meinen vorangehenden bekannt geworden sind.

# IV. Abschnitt.

## Die Umdrehungsflächen.

### I. Der Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene.

**154.** Die Schnittlinie $k$ einer Umdrehungsfläche **F** mit einer Ebene **E** ist symmetrisch in Bezug auf die zu **E** senkrechte Meridianebene, weil in Bezug auf sie beide Flächen symmetrisch sind; die Schnittgerade jener Meridianebene mit **E** ist dann eine Symmetrielinie der Schnittkurve. Diese rechtwinklige Symmetrie bleibt in der senkrechten Projektion auf eine jede Ebene bestehen, welche mit der Symmetrielinie oder mit den dazu senkrechten Symmetriestrahlen parallel ist; bei jeder anderen Projektionsebene entsteht eine schiefe Symmetrie.

Geht die Schnittkurve durch die Symmetrielinie, so muß die *Tangente* oder es müssen die Tangenten der Kurve in diesem Punkte ebenfalls mit sich selbst symmetrisch sein; dabei ist entweder die Tangente senkrecht auf der Symmetrielinie, dann ist der Punkt der Kurve ein *gewöhnlicher*; oder sie liegt in der Symmetrielinie, dann ist der Punkt eine *Spitze* erster Art; oder es sind zwei symmetrische Tangenten vorhanden, dann ist der Punkt ein *Doppelpunkt.*

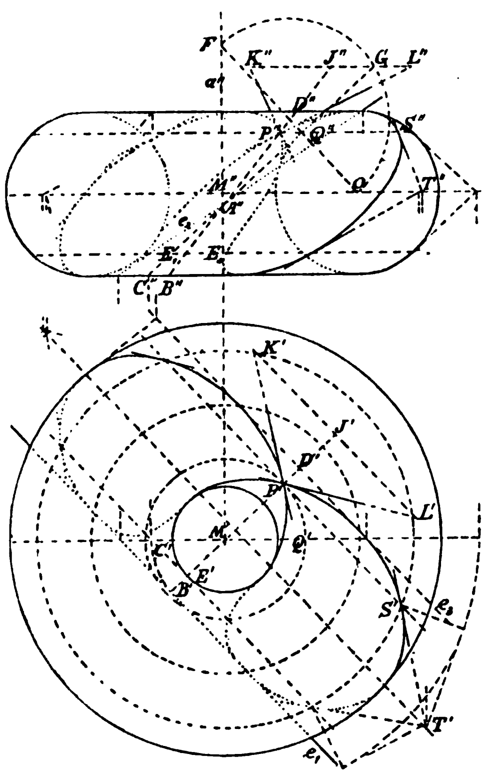
**155.** *Aufg. Die Schnittlinie eines Ringes* **F** *mit einer Ebene* **E** *zu konstruiren.*

Eine Ring- oder Wulstfläche, oder kurz ein *Ring* entsteht durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, aber nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Axe $a$. Die gegen die Axe hohle Kreishälfte beschreibt einen konvexen Flächenteil (*Wulst*) mit *elliptischen* Punkten (33), indem die Meridian- und die Parallelkreistangente in einem solchen Punkte, und die durch beide gehende Berührungsebene auf derselben Seite dieser Kurven liegen. Die gegen die Axe erhabene Kreishälfte beschreibt einen konvex-konkaven Flächenteil (*Hohlkehle*) mit *hyperbolischen Punkten*, indem jene beiden Tangenten und die Berührungsebene auf verschiedenen Seiten der Kurven liegen. Die Grenzpunkte beider Kreishälften

oder im allgemeinen jeder Punkt des Meridians, in welchem die Tangente $\perp a$ steht, erzeugen Parallelkreise mit *parabolischen Punkten.* Schneidet bei dem Ringe die $a$ den Meridiankreis, so sind die beiden Schnittpunkte *Kegelpunkte* der Fläche und bilden ebenfalls die Grenzen von Flächenstücken mit elliptischen und hyperbolischen Punkten.

**156.** *Aufl.* Wir stellen $\mathbf{P}_1 \perp a$, deren Projektionen der Punkt $M'$ und die Gerade $a''$ bilden, und nehmen $\mathbf{E}$ als Berührungsebene in einem hyperbolischen Punkte $P$ der Fläche an. Man bestimme aus $P'$ den Punkt $P''$ vermittelst des Punktes $Q$, in welchem der Parallelkreis von $P$ den Hauptmeridian schneidet, lege die Berührungsebene in $P$, welche durch ihre (auf $M'P'$ senkrechten) Spuren $e_1$, $e_3$ in den Ebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$ des tiefsten bezw. höchsten Parallelkreises der Fläche dargestellt sein mögen. Schneidet die Tangente $QA$ des Hauptmeridians die $\mathbf{P}_1$ in $C$, so ergibt sich der Schnittpunkt $B$ der Meridiantangente $PA$ mit $\mathbf{P}_1$ auf $P'M'$ durch $M'B' = M'C'$. Ebenso findet man den Schnittpunkt $D$ der Meridiantangente $PA$ mit $\mathbf{P}_3$. Durch $B'$ geht dann $e_1$, durch $D'$ geht $e_3$. $Q''C''$ und $P''B''$ treffen sich im Punkte $A$ der $a$. $PBD$ ist die Symmetrielinie der Schnittkurve, im Grundriß für senkrechte, im Aufriß für schiefe Symmetrie. Fig. 76.

Fig. 76.



Um *allgemeine Punkte* der $k$ zu erhalten, lege man Hilfsebenen $\perp a$ ($\parallel \mathbf{P}_1$), z. B. eine durch den Punkt $E_0$ der $a$; sie schneidet die $\mathbf{F}$ in zwei Parallelkreisen, deren erste Projektionen man verzeichnet, und die $\mathbf{E}$ in einer Parallelen zu $e_1$, deren Punkt $E'$ auf $P'M'$ man erhält, wenn man $M'E' = E_0E_1$ macht, wobei $E_1$ der Schnittpunkt

der Hilfsebene mit $Q''A''$. Die vier Schnittpunkte jener beiden Parallelkreise mit dieser Geraden gehören der $k$ an.

*Ausgezeichnete Punkte* sind die der *Umrisse*. Für die erste Projektion liegen sie auf dem größten und kleinsten Parallelkreise und werden wie die allgemeinen Punkte erhalten; für die zweite Projektion liegen sie auf dem höchsten und tiefsten Parallelkreise, oder auf dem Hauptmeridiane, und werden durch die aus $e_1$ und $e_3$ ermittelte Schnittgerade $e_2$ der Hauptmeridianebene mit **E** bestimmt. — Ferner liegen ausgezeichnete Punkte *auf dem zu* **E** *senkrechten Meridiane* (154) und werden durch seine Drehung in den Hauptmeridian, durch dessen Schnitt mit $A''Q''$ und durch Zurückdrehen erhalten. In unserem Falle wird nur der Punkt $P$ wieder gewonnen, der ein Doppelpunkt der $k$ ist, wie dies für die Schnittkurve der Berührungsebene einer Fläche in einem hyperbolischen Punkte $P$ stets stattfindet.

**157.** Die *Tangente* in einem Punkte $S$ der Kurve erhält man als Schnittlinie $ST$ der **E** mit der Berührungsebene der Fläche in $S$, welche, wie vorher, durch Umdrehung der Meridianebene verzeichnet ist. Dabei wurden wegen der leichteren Erreichbarkeit der Punkte statt der Spuren mit $P_1$ diejenigen mit der Ebene des größten Parallelkreises benutzt.

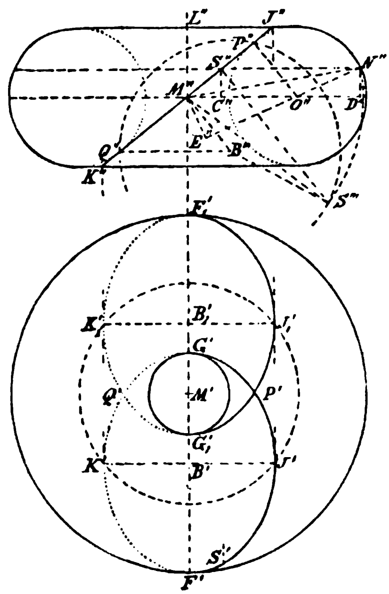
Um sogleich hier *die Tangenten in dem Doppelpunkte* $P$ zu konstruiren, müssen wir einen Satz aus der Lehre von der Krümmung der Flächen vorausnehmen, welcher sagt, daß diese Tangenten mit den Erzeugenden eines einschaligen Umdrehungshyperboloides zusammenfallen, das sich unserer Fläche in $P$ anschmiegt, d. h. welches in der Ebene des Meridians und in der darauf senkrechten Normalebene gleiche Krümmungskreise der Schnittkurven besitzt; dabei nehmen wir der Einfachheit halber $P$ als einen Punkt des Kehlkreises des Hyperboloides an. Der eine Krümmungskreis der **F** ist der Meridiankreis selbst; der andere hat bei Umdrehungsflächen stets das Stück der Normale vom Fußpunkte $P$ bis zum Punkte $F$ der Axe $a$ zum Halbmesser, weil die aus $F$ als Mittelpunkt durch $P$ gelegte Kugel drei, ja sogar vier, Punkte mit dem zweiten Normalschnitte gemein hat, je zwei auf zwei benachbarten Parallelkreisen. Nach der Drehung des $P$ in $Q$ sind die Krümmungshalbmesser daher $Q''O$ und $Q''F$. Legt man durch einen der beiden Krümmungsmittelpunkte $O$ und $F$, etwa durch $F$, die Umdrehungsaxe des Hyperboloids, parallel mit der Meridiantangente in $Q$, so ist $FQ''$ der Halbmesser seines Kehlkreises und zugleich die reelle Halbaxe der Meridianhyperbel, während $Q''O$ ihr Krümmungshalbmesser im Scheitel $Q$ ist. Daraus ergibt sich aber ihre ideelle Halbaxe

$= \sqrt{FQ'' \cdot Q''O} = Q''G$ (I, 250) vermittelst des Halbkreises $FGO$ und $O''G \perp FO$. Dreht man $Q$ zurück nach $P$, so gelangt $AQG$ in die Meridiantangente $APJ$. Man erhält aber die durch $P$ gehenden Erzeugenden des Hyperboloids, wenn man auf der Meridiantangente die ideelle Halbaxe $PJ$ aufträgt, in $J$ eine Senkrechte $KJL$ zur Meridianebene zieht ($K'J'L' \perp P'J'$, $K''J''L'' \parallel M''O$) und auf ihr $J'K' = J'L'$ gleich der reellen Halbaxe $Q''F$ der Meridianhyperbel aufträgt. $PK$ und $PL$ sind dann die Erzeugenden des Hyperboloids und die gesuchten Tangenten der Schnittkurve im Doppelpunkte.

Die *wahre Gestalt* der Schnittkurve ließe sich durch Umlegung der **E** in $\mathbf{P}_1$ leicht erhalten; sie ist senkrecht-affin zu ihrer ersten Projektion.

*Anm.* Bestimmt man die Schnittkurven der Fläche mit zweien der **E** parallelen und nahe benachbarten Ebenen, was im Grundriß mittelst des Handzirkels allein geschehen kann, wenn man den senkrechten Abstand der ersten Spur einer solchen Ebene von $e_1$ in den Zirkel faßt, so erkennt man, wie die Kurve mit dem Doppelpunkte den Übergang zwischen zwei Kurven ohne Doppelpunkte bildet, die sich in die zweierlei scheitelwinkelartig durch $k$ bei $P$ begrenzten Räume hineinschmiegen.

Fig. 77. Fig. 77



158. *Berührt die Schnittebene* **E** *den Ring in zwei Punkten P und Q, so zerfällt die Schnittkurve in zwei Kreise,* welche sich in $P$ und $Q$ schneiden. Um dies zu zeigen, stellen wir $\mathbf{P}_2$ senkrecht zu **E**, so daß $PQ \parallel \mathbf{P}_2$. Es sei $M$ der Mittelpunkt der Fläche, $O$ der Mittelpunkt desjenigen der beiden Kreise des Hauptmeridians, welcher $P$ enthält, $S$ ein Punkt der Schnittkurve, $N$ der Punkt, in welchem der Parallelkreis des $S$ den bezeichneten Kreis des Hauptmeridians trifft, $MO = m$, $ON = r$. Wir legen **E** um $PQ$ in eine zu $\mathbf{P}_2$ parallele Ebene um, so gelangt $S$ nach $S'''$, wenn $S''S''' \perp P''Q''$, $M''S''' = M''N''$, gleich dem wahren Abstande des $M$ von jedem Punkte des Parallelkreises $SN$. Sodann trage man $M''B''' \perp M''S'$ und $= r$ nach der einen Seite von $M''S''$ hin ab, derart, daß

$B'''M''S'''$ ein spitzer oder stumpfer Winkel wird, je nachdem $O''N''M''$ ein solcher ist. Dann sind aber diese Winkel gleich. Um es zu beweisen, ziehe man $S''C'' = N''D''$ beide $\perp M''O''$, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $C''M''S''$ und $P''M''O''$,

$$M''S'' = S''C'' \frac{M''O''}{O''P''} = N''D'' \frac{m}{r}.$$

Ferner ziehe man $M''E'' \perp N''O''$, so ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $O''M''E''$ und $O''N''D''$

$$M''E'' = N''D'' \frac{M''O''}{N''O''} = N''D'' \frac{m}{r}.$$

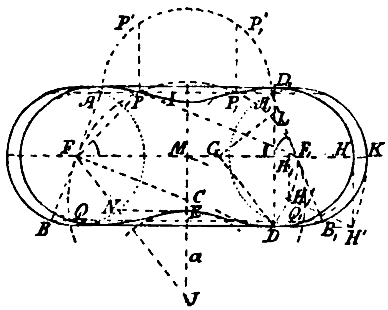
Daher ist $M''S'' = M''E''$; und da außerdem $M''S''' = M''N''$ gemacht wurde, so sind die rechtwinkligen Dreiecke $M''S''S'''$ und $M''E''N''$ kongruent. Dann ist auch $\sphericalangle S''S'''M'' = \sphericalangle E''N''M''$, und dann auch, wie behauptet, $\sphericalangle B'''M''S''' = \sphericalangle O''N''M''$, weil sie einzeln jenen Winkeln gleich sind. Hieraus folgt aber die Kongruenz der gleichbenannten Dreiecke, weil die angegebenen begrenzten Schenkel jener Winkel paarweise gleich sind, und daraus folgt $B'''S''' = O''M'' = m$. Daher ist der Ort von $S'''$ ein Kreis vom Halbmesser $m$ und vom Mittelpunkte $B'''$; und der Ort von $S$ besteht aus zwei Kreisen von den Halbmessern $m$, deren Mittelpunkte $B$ und $B_1$ in der Senkrechten zu $PQ$ liegen, welche man in E durch $M$ legt, und von denen jeder den Abstand $M''B''' = r$ von $M$ besitzt*). Beide Kreise haben $FG$ bezw. $F_1G_1$ $(= 2m)$ zu Durchmessern; die dazu senkrechten Durchmesser sind $JK$, $J_1K_1$, deren Endpunkte auf dem höchsten und tiefsten Parallelkreise liegen. Daher muß $J''K'' = F'G' = 2m$ sein, was übrigens auch aus der Kongruenz der Dreiecke $M''L''J''$ und $O''P''M''$ (mit $M''L'' = O''P''$) folgt. Die ersten Projektionen beider Kreise sind Ellipsen, deren Axen $F'G' = F_1'G_1' = 2m$ und $J'K' = J_1'K_1'$ bilden, und von denen $M'$ ein gemeinschaftlicher Brennpunkt ist; denn es gilt $M'J' = M'J_1' = m$.

**159.** Ist die *Schnittebene* E *mit der Umdrehungsaxe a parallel*, so besitzt die Schnittkurve zwei *Axen*, eine in der Ebene des Äquators und eine in der zu E senkrechten Meridianebene. In dem Falle, daß der Abstand der E von $a$ gleich $r$, wird die Kurve eine *Cassinische*

*) Der von *Pohlke* in seiner darstellenden Geometrie, Abt. 2, 1876, S. 160, gegebene Beweis ist unrichtig. Denn er beruht auf der Gleichung $MS . MS_1 = MP^2$, worin $S$ und $S_1$ die zwei ungleich weit von $M$ entfernten Schnittpunkte eines aus $M$ in E gezogenen Strahles mit der Fläche, und $MP$ eine aus $M$ an die Fläche gezogene Tangente bedeuten; diese Gleichung ist aber nicht beweisend, gilt vielmehr für jede durch $M$ gehende Schnittebene.

*Linie.* Die Figur zeigt ihre Projektion auf die zu **E** parallele Meridianebene **P**; $F$ und $F_1$ seien die Mittelpunkte der Meridiankreise in **P**. Auf einem Parallelkreise $AA_1$ erhält man die Punkte $P, P_1$, indem man auf seiner Umlegung in die **P**, dem Kreise $AP'A_1$ vom Durchmesser $AA_1$, die Punkte $P', P_1'$ bestimmt, deren Ordinaten $PP' = P_1 P_1' = r$ sind. Dadurch wird aber $AP \cdot PA_1 = PP'^2 = r^2 = AP \cdot AP_1 = AF^2$, und daher liegen die vier Punkte $F, F_1, P, P_1$ auf dem Kreise, welcher von $AF$ in $F$ und von $A_1F_1$ in $F_1$ berührt wird. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist $C$ auf $a$, wenn $FC \perp AF$. Derselbe Kreis liefert die Punkte $Q, Q_1$ des Parallelkreises $BB_1$, wenn $AFB$ eine Gerade. Nun ist $\triangle PFF_1 \sim \triangle A_1F_1P$, weil Fig. 78.

Fig. 78.




$\sphericalangle PFF_1 = \sphericalangle A_1F_1P$ als Umfangswinkel des Kreises $FPP_1F_1$ über dem Bogen $PF_1$, und $\sphericalangle PF_1F = \sphericalangle A_1PF_1$. Aus dieser Ähnlichkeit folgt

$$PF : F_1F = A_1F_1 : PF_1,$$

oder

$$PF \cdot PF_1 = 2mr.$$

Es ist also das Produkt der Abstände $PF$, $PF_1$ eines Punktes $P$ der Kurve von zwei festen Punkten $F$, $F_1$ eine unveränderliche Größe, daher die Kurve die *Cassinische Linie.*

Man erhält die Punkte auf den äußersten Parallelkreisen, wie $D$ (und $D_1$) durch $MD = MF_1$, indem dann $C$ nach $M$ rückt; die Punkte auf $a$, wie $E$, durch $EN = r$, wobei $EN \perp a$, $N$ ein Punkt des Meridiankreises; die Punkte auf dem Parallelkreise $FF_1$ vom Halbmesser $MK$, wie $H$, durch Umlegen des Kreises, aus dem Punkte $H'$, wenn $MH' = MK$, $HH' \perp FF_1$, $HH' = r$.

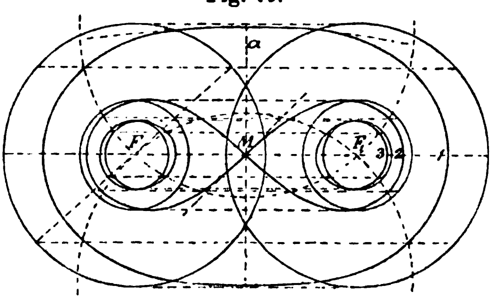
**160.** Die *Krümmungsmittelpunkte* für die Scheitel $E$ und $H$ und für den Punkt $D$ lassen sich leicht durch anschließende Flächen bestimmen. Der nach dem Parallelkreise $EN$ die Fläche berührende Kegel wird von **E** in einer Hyperbel geschnitten, welche denselben Krümmungskreis in $E$ wie unsere Kurve besitzt, weil beide Kurven auf zwei benachbarten Parallelkreisen drei (ja sogar vier) Punkte gemein haben. $E$ ist der Scheitel dieser Hyperbel, die Meridiantangente in $N$ ist eine Asymptote derselben, deren Normale in $N$ die $FN$ ist und den Krümmungsmittelpunkt $J$ auf $a$ bestimmt.

Entlang des Äquators $MK$ hat ein Umdrehungsellipsoid vier benachbarte Parallelkreise mit unserer Fläche gemein, wenn seine Meridianellipse in $K$ mit unserem Meridiankreise den Krümmungsmittelpunkt $F_1$ gemein hat. Die $\mathfrak{E}$ schneidet das Ellipsoid in einer zu der Meridianellipse ähnlichen, ähnlich gelegenen und koncentrischen Ellipse, deren Scheitel $H$, und deren Krümmungsmittelpunkt $H_1$ ist, wenn $MH_1 : MH = MF_1 : MK$. Es wird $H_1$ erhalten durch $MH_1' = MF_1$ auf $MH'$ und $H_1'H_1 \perp MK$. $H_1$ ist auch der Krümmungsmittelpunkt unserer Kurve in $H$.

Um für $D$ den Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen, denkt man sich entlang des Meridiankreises des Punktes $D$ einen berührenden Cylinder an den Ring gelegt. Die Schnittkurven der Ebene $\mathfrak{E}$ mit dem Ringe und dem Cylinder haben den Punkt $D$ gemein und die beiderseits zu $D$ benachbarten Punkte haben von $D$ Abstände $= 0^1$, deren Unterschiede für beide Kurven $= 0^2$ sind, also gegen $0^1$ verschwinden. Beide Kurven besitzen daher in $D$ denselben Krümmungskreis. Nun bildet $\mathfrak{E}$ mit dem senkrechten Schnitte des Cylinders den Winkel $KMD_1 = \alpha$ und schneidet den Cylinder in einer Ellipse, deren Halbaxen $r$ und $r : \cos\alpha$ sind, deren Krümmungshalbmesser in $D$ daher $r : \cos^2\alpha$ ist. Man erhält ihn $= DL$, wenn man $DG \perp MD_1$ bis $G$ auf $MK$ und $GL \perp DG$ ($\parallel MD_1$) bis $L$ auf $DD_1$ zieht. Denn dann ist $\sphericalangle D_1DG = \alpha$, $DG = r : \cos\alpha$, $DL = r : \cos^2\alpha$.

Fig. 79. **161.** Die *Cassinische Linie* nimmt drei verschiedene Gestalten an, je nachdem $r \gtreqless \frac{1}{2}m$; dieselben sind für dasselbe $FF_1 = 2m$ verzeichnet. Für $r > \frac{1}{2}m$ hat sie die Gestalt einer geschlossenen Kurve (1) ohne oder mit Einbiegung (in Fig. 79 $r \geqq m$, in Fig. 78 $r < m$) und mit zwei Punkten auf $a$; für $r = \frac{1}{2}m$ fallen diese beiden Punkte in einem Doppelpunkte $M$ zusammen und die Kurve erhält die Gestalt einer Schleife (2) und heißt die *Bernouillische Lemniskate*; für $r < \frac{1}{2}m$ zerfällt sie in zwei geschlossene Äste (3). Die Tangenten an die Lemniskate im Doppelpunkte werden nach dem Verfahren der Nr. 157 als Linien, unter $45^0$ gegen $a$ geneigt, gefunden, weil Kehlkreis und Meridiankrümmungskreis gleich sind.

Fig. 79.



**162.** *Übungsaufgaben.*

1) Die in Nr. 159, Fig. 78 gegebene Konstruktion des Schnittes des *Ringes* mit einer zu $a$ parallelen Ebene (Cassinische Linie mittelst des Kreises aus $C$) für den Fall zu erweitern, daß der Abstand $b$ der **E** von $a$ nicht gleich $r$ ist. An die Stelle des Punktes $F$ tritt ein mit dem Halbmesser $r - b$ beschriebener Kreis.

2) Einen *Ring* mit zwei Kegelpunkten (Nr. 155 u. Fig. 79 (1)) mit einer durch einen dieser Punkte gehenden Ebene zu schneiden, so daß in ihm ein Doppelpunkt oder eine Spitze oder ein isolirter Punkt entsteht.

3) Eine Umdrehungsfläche habe eine *Sinuslinie* $A_1BC_1$ (Nr. 48, Fig. 26b oder Figg. 18 u. 19, oder Nr. 165, Fig. 80) *zum Meridiane*; die Axe sei die Normale $A_1A$ in einem Scheitel. Es soll ihr Schnitt mit einer Ebene konstruirt werden, welche die Fläche in dem Wendepunkte $B$ eines Meridianes (einem parabolischen Punkte der Fläche) berührt. Man wird finden, daß $B$ eine Spitze der Schnittkurve ist.

4) Die ebenen Schnitte von *Umdrehungsflächen zweiten Grades* sind Kegelschnitte und werden nach Nr. 113 bestimmt.

## II. Der einer Umdrehungsfläche umschriebene Kegel und Cylinder. (Schattengrenze.)

**163.** Um an eine krumme Fläche **F** aus einem außerhalb derselben gegebenen Punkte $L$ eine Berührungsebene zu legen, lege man durch $L$ eine Hilfsebene, welche die **F** in einer Kurve $k$ schneidet, ziehe an diese die aus $L$ möglichen Tangenten, deren Berührungspunkte $S_1$, $S_2$ . . . seien. Andere Hilfsebenen liefern andere Schnittkurven, Tangenten und Berührungspunkte. Alle Berührungspunkte $S$ bilden eine Kurve $s$, alle Tangenten einen die Fläche entlang $s$ berührenden Kegel, den man den *der Fläche aus L umschriebenen Kegel* nennt. Jede Berührungsebene des Kegels ist eine aus $L$ an die **F** gelegte Berührungsebene; denn sie enthält eine Erzeugende des Kegels und die Tangente $s$ in dem jener Erzeugenden angehörigen Punkte $S$, also zwei Tangenten der **F** in $S$. Und umgekehrt geht jede Berührungsebene der **F** in einem Punkte der $s$ durch $L$. Es lassen sich also aus einem Punkte $L$ im allgemeinen unendlich viele Berührungsebenen an eine Fläche **F** legen, welche alle von dem umschriebenen Kegel eingehüllt werden.

Ist $L$ ein unendlich ferner Punkt, gegeben durch die Gerade $l$, so wird der Kegel zu einem *Cylinder*, dessen Berührungsebenen die an **F** parallel zu $l$ gelegten Berührungsebenen sind.

Ist **F** eine *abwickelbare Fläche*, z. B. ein Kegel oder Cylinder,

und sind wieder $S_1$, $S_2$ ... die Berührungspunkte aller aus $L$ an eine jener Schnittkurven $k$ gelegten Tangenten, so berühren die Berührungsebenen der **F** in $S_1$, $S_2$ ... die **F** entlang der durch $S_1$, $S_2$ ... gehenden Erzeugenden $e_1$, $e_2$ ... Außer diesen gibt es keine durch $L$ gehenden Berührungsebenen und die Berührungslinie $s$ besteht aus den Erzeugenden $e_1$, $e_2$ ... Denn gäbe es außer diesen noch einen Punkt $S$, so müßte auch die durch ihn gehende Erzeugende zu $s$ und ihr Schnittpunkt mit der Ebene der $k$, d. i. mit $k$ selbst, zu den $S$ gehören, was gegen die Voraussetzung streitet.

Hieraus ergibt sich: *Die abwickelbare Fläche besitzt nur einfach unendlich viele Berührungsebenen, oder die abrollende Berührungsebene hat einen einzigen möglichen Ablauf,* wobei die Berührungsgerade die ganze Fläche oder wobei alle Berührungspunkte zugleich alle Kurven der Fläche beschreiben, während eine andere krumme Fläche zweifach unendlich viele Berührungsebenen besitzt, indem man der abrollenden Berührungsebene unendlich vielerlei Ablaufe geben kann, die im allgemeinen keine Lagen gemein haben, und wobei der Berührungspunkt bei jedem Ablaufe Kurven anderer Punkte beschreibt. Daher kann die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche nur noch eine, die einer anderen krummen Fläche noch zwei Bedingungen erfüllen, z. B. durch einen bezw. zwei Punkte gehen. Oder die Berührungsebene einer abwickelbaren Fläche beschreibt nur eine endliche Anzahl mal eine Gerade, d. h. durch einen Punkt der Geraden geht nur eine endliche Anzahl von Berührungsebenen, die Berührungsebene einer anderen krummen Fläche beschreibt die Gerade unendlich oft mal.

Ist $L$ ein *leuchtender Punkt*, so ist der berührende Kegel der *Lichtstrahlen- und der Schattenkegel*, $s$ die *Eigenschattengrenze*, und der Schnitt des Schattenkegels mit einer Fläche die *Grenze des Schlagschattens* auf dieser. Ist $L$ ein *Auge*, so ist $s$ der *wahre Umriß* und jener Schnitt der *scheinbare Umriß* der Projektion der **F** auf die zweite Fläche.

**164.** *Aufg. An eine Umdrehungsfläche* **F** *aus einem außerhalb derselben gegebenen Punkte L den berührenden Kegel zu legen und die Berührungskurve s zu konstruiren, oder die durch einen leuchtenden Punkt L hervorgebrachten Eigen- und Schlagschattengrenzen s und* $s_1$ *zu bestimmen.*

*Aufl.* Bei den Umdrehungsflächen ersetzt man vorteilhaft die Hilfsebenen des allgemeinen Verfahrens durch *Hilfskegel* oder *Kugeln,* welche die Fläche entlang eines Parallelkreises, oder durch *Hilfscylinder,* welche sie entlang eines Meridianes berühren, legt an die Kegel oder Cylinder die berührenden Ebenen, oder an die Kugeln

die berührenden Kegel aus $L$, schneidet die Berührungslinie mit jenem Parallelkreise bezw. Meridiane und erhält in den Schnittpunkten Punkte der gesuchten Berührungskurve. An den Kegel und Cylinder haben wir aber schon die Berührungsebene aus einem Punkte $L$ gelegt; die Kugel wird durch einen Kegel aus $L$ in einem Kreise berührt, dessen Ebene senkrecht auf dem durch $L$ gehenden Durchmesser steht und die Polarebene von $L$ ist. — Die Meridianebene **L** von $L$ ist Symmetrieebene des Berührungskegels und der Berührungskurve der **F**.

**165.** Wir wählen als Meridian eine *Cosinuslinie* (= Sinuslinie), Fig. 80
als Umdrehungsaxe $a$ ihre Normale in einem Scheitel $A$, welche $\perp$ $\mathbf{P}_1$ gestellt werde. Seien vom Hauptmeridiane gegeben der Scheitel $A''$, die Normale $a''$ in $A''$, der benachbarte Wendepunkt $B''$, sei $B''C'' \perp a''$, seien $C''B''$, $C''A''$ bezw. die $x$- und $z$Axe der Coordinaten, sei ferner $C''A'' = c$, $C''B'' = \frac{1}{2}\pi r$, so ist

$$z = c \cos \frac{x}{r}$$

die Gleichung des Meridianes. Dabei ergibt sich für $z = 0$, $\frac{x}{r} = \frac{1}{2}\pi$, $x = C''B''$, also $r = 2 . C''B'' : \pi = \frac{7}{11} C''B'' = MB_1$ (Fig. a) als Halbmesser des Grundkreises. Zieht man dann aus dem Punkte $M$ mit den Halbmessern $MB_1 = r$ und $MB_2 = c$ Kreise und die (auf einander senkrechten) Halbmesser $MB_1B_2 \parallel B''C''$ und $MA_1A_2$ $\perp$ $C''A''$, so ist $C''B''$ = Bog. $A_1B_1$. Für weitere Punkte ziehe man (etwa unter Dreiteilung des Viertelkreises) die $MD_1D_2$ und bestimme vier Punkte, wie $D''$, vermittelst $z = \pm D_3D_2$ und $x = \pm$ Bog. $A_1D_1$ oder $x = \pm$ Bog. $A_1'D_1$ ($= 2\,C''B''$ — Bog. $A_1D_1$).

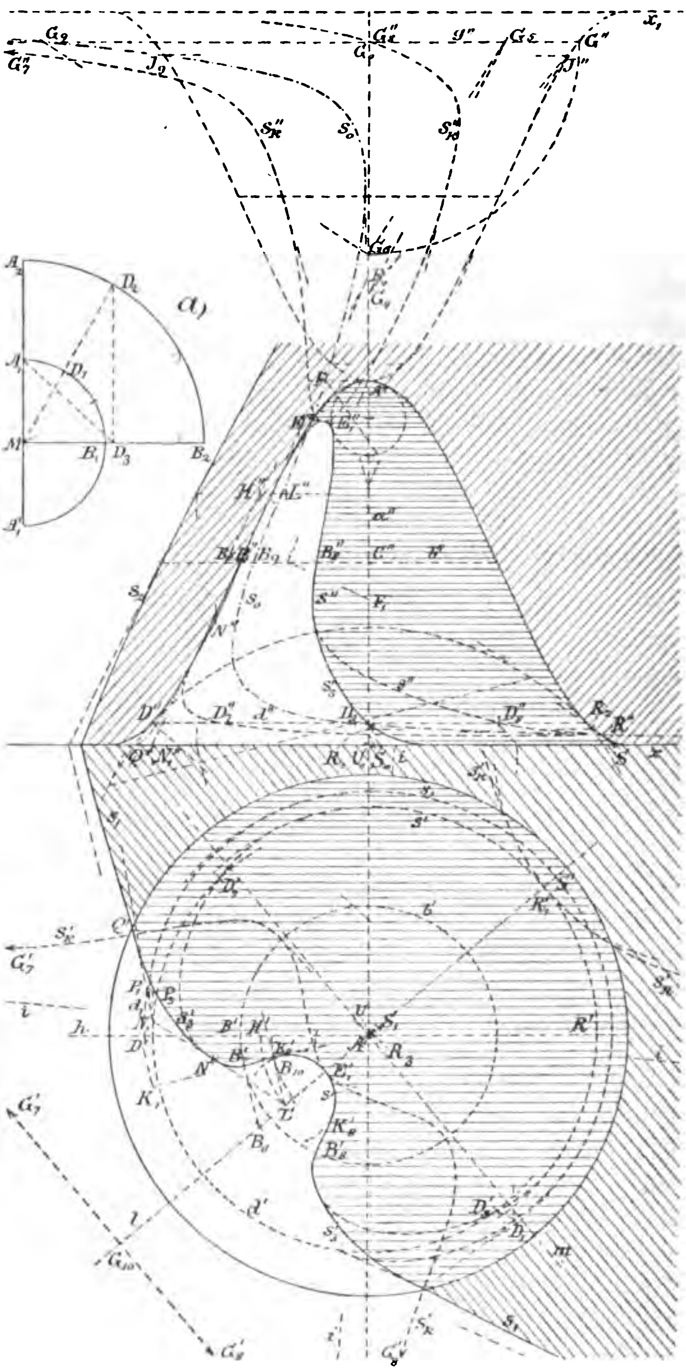
Zur Verzeichnung der Tangente erhält man durch Differentiation der Gleichung, oder auch durch eine einfache geometrische Betrachtung unendlich kleiner Dreiecke, oder auch aus der Figur 26b der Verwandelten des ebenen Schnittes eines Kreiscylinders,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c}{r} \sin \frac{x}{r} = MD_3 : MA_1 \quad \text{(Fig. a)},$$

so daß die Tangente der Sinuslinie in $D''$ senkrecht auf $A_1D_3$ (oder bei negativem $x$, $\perp A_1'D_3$) steht. Auf diese Weise ist ein ganzer Gang der Cosinuslinie, dessen Bogenmitte $A$, gezeichnet.

**166.** *Bestimmung der Punkte der Eigenschattengrenze* s a) *durch das Verfahren der berührenden Kegel.* Der Kegel, welcher die Fläche in dem Parallelkreise $b$ des Punktes $B$ berührt, hat seine Spitze in $B_4$ auf $a$. Dreht man nun den Meridian $l$ des $L$ um $a$ in den Hauptmeridian $h$, wodurch $L$ nach $H$ gelangt, zieht die $B_4H$, schneidet sie mit der Ebene des $b$ in $B_5$, dreht die Meridianebene zurück, wodurch $B_5$ nach $B_6$ auf $A'L'$ ($A'B_6 = C''B_5$) gelangt,

Fig. 80.



zieht aus $B_6$ die beiden Tangenten an $b'$, so sind deren Berührungspunkte $B_7$, $B_8$ die gesuchten Punkte der $s$. — Man kann die Punkte auf $b$ auch dadurch finden, daß man den berührenden Kegel mit der Parallelkreisebene von $L$ in einem Kreise schneidet, an diesen aus $L'$ die Tangente zieht, und die Halbmesser (so $A'B_{10}$) der Berührungspunkte, welche zugleich die ersten Projektionen der Berührungserzeugenden des Kegels sind, mit $b'$ in $B_7'$ und $B_8'$ zum Schnitte bringt. Dies Verfahren liefert insbesondere die Punkte $B_7'$, $B_8'$ und $K_7'$, $K_8'$ des Grundrisses, in welchen die Tangenten der $s'$ nach $A'$ gerichtet sind. Sie liegen auf denjenigen Parallelkreisen, deren Berührungskegel die Parallelkreisebene von $L$ in einem größten oder kleinsten Kreise schneiden. Der Parallelkreis des Wendepunktes $B$ der Cosinuslinie liefert einen größten solchen Kreis, wodurch die Punkte $B_7'$, $B_8'$ desselben kleinste Winkel $L'A'B_7'$ und $L'A'B_8'$ bestimmen. Der Parallelkreis des $L$ liefert einen kleinsten solchen Kreis, wodurch die Punkte $K_7'$, $K_8'$ desselben größte Winkel $L'A'K_7'$ und $L'A'K_8'$ bestimmen. Im Aufriß gehen dann die Tangenten der $s''$ in jenen Punkten durch die Spitzen der umschriebenen Kegel, so in $B_8''$ durch $B_4$.

**167.** b) *Das Verfahren der berührenden Cylinder.* An den Cylinder, welcher die Fläche entlang eines Meridians, $A'B_7'$, berührt, legt man die Berührungsebenen aus $L$, indem man von $L'$ die Senkrechte $L'B_{10}$ auf $A'B_7'$ fällt, dann den Meridian samt dem Fußpunkte in dem Hauptmeridian dreht, aus der neuen Lage des Fußpunktes an den Hauptmeridian $h$ die Tangenten zieht, deren Berührungspunkte, wie $B''$, bestimmt, und aus ihnen durch Zurückdrehen in den ursprünglichen Meridian die gesuchten Punkte, wie $B_7'$ ermittelt. Man bemerkt, daß hier dieselben Linien wie bei dem ersten Verfahren, nur in umgekehrter Reihenfolge, gezogen werden. Zur Bestimmung des Berührungspunktes einer gezeichneten Tangente der Cosinuslinie dient ebenfalls die umgekehrte Linienfolge. — Das Verfahren der Meridiancylinder dient zur Bestimmung der Punkte des zweiten Umrisses oder des Hauptmeridians, als der Berührungspunkte der an ihn aus $L''$ gezogenen Tangenten. Ebenso findet man durch es die Punkte des durch $L$ gehenden Meridians $l$, bei dessen Drehung in den Hauptmeridian $L$ nach $H$ gelangt; die Berührungspunkte, wie $E''$, der aus $H''$ an den Hauptmeridian gezogenen Tangenten, gelangen beim Zurückdrehen in $l$ in die gesuchten Punkte, wie $E_1$.

**168.** c) *Das Verfahren der berührenden Kugeln.* Die Normale des Hauptmeridians in $D''$ bestimmt auf $a''$ den Mittelpunkt der Kugel, welche die Fläche entlang des Parallelkreises $d$ berührt. Dreht man wieder $L$ nach $H$, so ist die zweite Projektion des aus

Fig. 80. $H$ der Kugel umschriebenen Kegels eine Gerade, welche die $d''$ in $D_9$ trifft. Die zwei durch $D_9$ dargestellten Punkte des $d$ gelangen beim Zurückdrehen nach $D_7$ und $D_8$, wenn die Abstände von $D_7'$ und $D_8'$ von dem auf $l$ senkrechten Kreisdurchmesser $m$ gleich dem Abstande des $D_9$ von $a''$ sind. — Das Kugelverfahren erfordert zur Bestimmung der beiden Punkte eines schon gezeichneten Parallelkreises zehn Operationen, das Kegelverfahren sieben. Dennoch ist für den Parallelkreis $d$ wegen entfernter Lage von Punkten das Kugelverfahren zweckmäßiger.

$D_9$ ist ein Punkt der Projektion $s_0$ der Berührungskurve $s$ auf die Meridianebene **L**, nach deren Drehung in die Hauptmeridianebene. Man erhält mittelst des Kugelverfahrens diese Kurve unabhängig von der ersten Projektion und kann sie auch noch über die Umrisse der Fläche ausdehnen, wo erst die Verlängerungen derjenigen Geraden sich schneiden, welche bezw. den Parallelkreis der Fläche und den Berührungskreis der Kugel mit dem ihr aus $H$ umschriebenen Kegel abbilden. In der Figur ist der Punkt $F$ auf der Tangente der Cosinuslinie in ihrem Scheitel $A$ vermittelst des Krümmungskreises der Kurve in $A$ konstruirt. Der Krümmungshalbmesser wird aber gefunden, wenn man aus $A''$ eine Parallele zu der Tangente im Wendepunkte $B''$ zieht ($\perp A_1 B_2$ der Fig. a), dieselbe mit $B''C''$ schneidet, von da aus eine Senkrechte zu ihr zeichnet, welche die $a''$ in $F_1$ trifft. $F_1 C''$ ist dann der gesuchte Krümmungshalbmesser. Von der Richtigkeit dieser Konstruktion überzeugt man sich durch Vergleichung mit der entsprechenden Konstruktion in der Fig. 26, deren Punktefolge $A_1''A''A_2$ durch $A''C''F_1$ in unserer Figur ersetzt ist.

Auch das Kegelverfahren liefert die Kurve $s_0$ und ihre Fortsetzung über die Umrisse. Ihr Punkt $B_9$ auf $b''$ ist durch $C''B_9$ = Abstand $B_7'$ von $m$ bestimmt, und weil $B_6$ und $B_7' B_8'$ Pol und Polare zu $b'$, so sind $B_5$ und $B_9$ harmonisch getrennt durch die Endpunkte von $b''$. Von $E''$ an wird der dem $B_5$ entsprechende Punkt ein innerer, daher sein zugeordnet harmonischer ein äußerer.

**169.** Es hat aber eine Fortsetzung der Kurve $s_0$ über den Umriß hinaus auch räumlich eine Bedeutung, weil die Projektion $s_0$ der $s$ auf die Meridianebene **L** ungeändert bleibt, wenn man die Fläche **F** durch eine affine Fläche $\mathbf{F}_1$ ersetzt, wobei **L** die Affinitätsebene und die dazu Senkrechten die Affinitätsstrahlen sind, da hierbei die aus $L$ der **F** und der $\mathbf{F}_1$ umschriebenen Kegel, sowie die Berührungskurven sich entsprechen, die letzteren also dieselbe Projektion $s_0$ auf **L** besitzen. Nimmt man nun in den Ebenen der Parallelkreise die Charakteristik der Affinität $= \sqrt{-1}$, d. h. bildet man die Imaginärprojektionen der Kreise, so sind diese Projektionen gleichseitige

Hyperbeln und erzeugen eine neue Fläche $\mathbf{F}_1$, die wir die *Imaginärprojektion oder die konjugirte Fläche von* $\mathbf{F}$ *in Bezug auf die Meridianebene* $\mathbf{L}$ *und die auf ihr senkrechte Richtung* nennen wollen (96 ff.). Um die Stetigkeit derselben bei $A$ nicht zu unterbrechen, in welchem Punkte die erzeugende Hyperbel in zwei gegen die Meridianebene $\mathbf{L}$ unter $45^0$ geneigte Gerade $i$, $i$ übergeht, setzen wir sie über $A$ hinaus fort, entsprechend wie es bei der übereinstimmenden Imaginärprojektion des Umdrehungsparaboloides, dem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide, geschieht. Wir fügen nämlich zur (ausgezogenen) Cosinuslinie des Meridians eine zu ihr in Bezug auf $A$ symmetrische (gestrichelte) hinzu; dann sind die auf $a$ senkrechten Ordinaten der ersteren die halben reellen, die der letzteren die halben ideellen Axen der erzeugenden gleichseitigen Hyperbeln. Die beiden so entstehenden Flächenteile sind unter einander kongruent, grenzen in den genannten auf einander senkrechten Geraden $i$ an einander und sind in Bezug auf jede derselben gegenseitig symmetrisch.

Die auf der konjugirten Fläche $\mathbf{F}_1$ liegende Berührungskurve des ihr aus $L$ umschriebenen Kegels wollen wir die zu $s$ *konjugirte Kurve* $s_k$ nennen. Um ihre Punkte auf einer hyperbolischen Erzeugenden $g$ der $\mathbf{F}_1$ zu finden, lege man entlang der $g$ den berührenden Kegel an die $\mathbf{F}_1$. Seine Spitze ist der Schnittpunkt $G_4$ der $a$ mit der Tangente eines Meridianschnittes der $\mathbf{F}_1$, in dessen Punkte $G''$ auf $g$, in der Figur des Meridians der ideellen Scheitel. Schneidet man $H''G_4$ mit $g''$ in $G_5$ und sucht auf der gleichlaufenden Involution, welche auf $g''$ in Bezug auf die Hyperbel $g$ und den berührenden Kegel stattfindet, und von welcher $G_0$ auf $a$ der Mittelpunkt, $G''$ ein ideeller Doppelpunkt ist, den zu $G_5$ zugeordneten Punkt $G_9$ (vermittelst $G_0 G_6$ auf $a = G_0 G''$, $\sphericalangle G_5 G_6 G_9 = 90^0$), so ist $G_9$ die Projektion der Berührungspunkte der beiden aus $G_5$ an die Hyperbel $g$ gezogenen Tangenten, d. i. ein Punkt der $s_0$. Die Punkte $G_7'$, $G_8'$ der $s_k'$ auf der ersten Projektion der zurückgedrehten Hyperbel $g$, die nicht verzeichnet zu werden braucht, erhält man, wenn man auf $l$ die $A'G_{10} = G_0 G_9$ aufträgt, und $G_{10} G_7' = G_{10} G_8' \perp l$ und $= G_6 G_9$ zeichnet (I, 371).

Zieht man aus $H''$ die Tangenten an die gestrichelte Cosinuslinie, so sind die den Berührungspunkten symmetrisch in Bezug auf $a''$ gegenüberliegenden Punkte solche der $s_0$. So ist in dem Berührungspunkte $J''$ auch der Punkt $J_5$ gelegen, dessen zugeordneter der gegenüberliegende $J_9$ ist. Die Tangenten der $s_0$ und $s_k$ in den Punkten der Hyperbel des Wendepunktes der Cosinuslinie gehen wieder nach der Spitze des berührenden Hilfskegels, weil dieser Kegel wieder die Parallelkreisebene des Punktes $L$ in einer kleinsten oder

Fig. 80. größten Kurve, diesmal einer Hyperbel, schneidet. — Die Asymptoten der $s_0$ und $s_k''$ sind die zu $A''$ symmetrischen Geraden $x$, $x_1$, diejenigen der $s_k'$ sind die Asymptoten $i$, $i$ der Hyperbeln; denn wenn sich $G''$ der $x$ oder $x_1$ nähert, nähert sich auch $G_4$ der $x$ oder $x_1$, $G_5$ der $a$, $G_9$ geht ins Unendliche, und es wird $G_6G_9 = G_0G_9$, daher $G_{10}G_7 = A'G_{10}$.

Die Umdrehungsfläche **F** setzt sich über alle Gänge der Cosinuslinie fort, jenseits $A$ wird sie imaginär; die konjugirte Fläche $\mathbf{F}_1$ setzt sich reell über alle Gänge der Cosinus- und ihrer in Bezug auf $A$ symmetrischen Linie fort; ebenso die Kurven $s$ und $s_k$ auf beiderlei Flächen.

**170.** Die *Schlagschattengrenzen* $s_1$ und $s_2$ auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ sind die Schatten der $s$. Man sucht durch Strahlen aus $L$ die Schatten der einzelnen Punkte, so $D_1$ von $D_8$. Die Tangente an $s_1$ in $D_1$ ist parallel zur Tangente an den Parallelkreis $d$ in $D_8$, d. i. $\perp A'D_8'$. Denn sie ist der Schatten der Tangente von $s$ in $D_8'$; die Lichtstrahlenebene dieser Tangente enthält aber zwei Tangenten der Fläche in $D_8$, die der $s$ und den Strahl $LD_8$; sie ist daher eine Berührungsebene der Fläche in $D_8$, enthält demnach auch die Tangente an $d$ in $D_8$, und mit dieser ist ihre erste Spur, d. i. die Tangente an $s_1$, parallel.

Bemerkenswert ist der Schatten $N_1$ des Punktes $N$ der $s$, in welchem $s$ von dem Lichtstrahle $LN$ berührt wird, weshalb $N_1$ eine *Spitze von* $s_1$ wird (I, 260). Die Tangente aus $L$ an $s$ wird durch Anlegen, der Berührungspunkt durch eine Fehlerkurve bestimmt. Die Tangente der $s_1$ in der Spitze $N_1$ ist entsprechend, wie vorhin, $\perp A'N'$. — Die *unendlich fernen Punkte der* $s_1$ sind die Schatten von $K_7$ und $K_8$, weil $LK_7$ und $LK_8 \parallel \mathbf{P}_1$. Die Asymptoten der $s_1$ sind die Schatten der Tangenten an $s$ in $K_7$ und $K_8$. Die erste Spur der Tangente in $K_7$ ist $K_1$, und die Asymptote geht durch $K_1$ und ist $\parallel L'K_7'$ oder $\perp A'K_7'$.

Von $s_2$ ist ein Teil gezeichnet; $s_2$ besitzt in unserem Falle ebenfalls zwei Asymptoten, die man durch die zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Lichtstrahlen findet.

Der Schlagschatten $s_3$ von $s$ auf die Fläche **F** selbst beginnt in den Berührungspunkten der die $s$ berührenden Lichtstrahlen, so in $N$. Diese Punkte heißen die *Grenzpunkte der Eigenschattengrenze* $s$. Denkt man sich die Fläche als Grenze eines undurchsichtigen Körpers, wodurch eine äußere und eine innere Seite der Fläche unterschieden sind, so trennen die Grenzpunkte denjenigen Teil von $s$, nach welchem die Lichtstrahlen von außen kommen und nach außen gehen, welche also *physische Eigenschattengrenze ist*, von demjenigen Teile, in welchem sie von innen kommen und nach innen gehen, wo also $s$

nur die Bedeutung einer geometrischen Berührungskurve hat. In den Grenzpunkten berührt und schneidet zugleich der Lichtstrahl die **F**. Den Schattenpunkt $P_s$ auf einem beliebigen Parallelkreise $d$ erhält man (I, 502), indem man mittelst der Strahlen aus $H''$ den Schatten $d_1$ von $d$ auf die $\mathbf{P}_1$ sucht, und den $d_1$ mit $s_1$, so in $P_1$, schneidet; $L'P_1$ bestimmt dann $P_s$ auf $d'$. Die zweiten Endpunkte von $s_3$ liegen in den Schnittpunkten, so in $Q$, des Berührungskreises der **F** mit $\mathbf{P}_1$ und der $s_1$. In diesen Punkten berühren sich $s_1$ und $s_3$, weil sich in ihnen $\mathbf{P}_1$ und **F** berühren; in den Grenzpunkten $N$ berühren sich $s$ und $s_3$, weil der dem $N$ benachbarte Punkt der $s_3$ von $N$ einen Abstand $= 0^1$, und von der Tangente $LN$ der $s$ einen solchen $= 0^2$ besitzt.

**171.** *Die Krümmungshalbmesser der Schattengrenzen in ihren Scheiteln. Der Scheitel $R_1'$ von $s'$* kommt bei der Drehung von $l$ in $h$ nach $R$ $(R', R'')$; dann steht die Schmiegungsebene von $s$ in $R \perp \mathbf{P}_2$ und projicirt sich auf $\mathbf{P}_2$ in die Tangente $R''R_0$ von $s_0$, welche man mittelst einer Fehlerkurve (I, 201), oder hier bei der schwachen Krümmung genügend genau durch Anlegen eines Lineals findet, und welche die $a''$ in $R_0$ treffe. Ersetzt man die Umdrehungsfläche **F** durch den entlang des Parallelkreises von $R$ berührenden Kegel, so hat die Schnittellipse jener Schmiegungsebene mit dem Kegel in $R$ den Krümmungshalbmesser $R_0R_2$, wenn dies der Halbmesser des Parallelkreises des Kegels vom Mittelpunkte $R_0$ ist (57). $R_3R_1' = R_0R_2$ bildet daher den Krümmungshalbmesser der $s'$ in $R_1'$. — Ebenso wurde der Krümmungshalbmesser der $s'$ im Scheitel $E_1'$ bestimmt.

Die *konjugirte Kurve $s_k'$ hat in jedem Scheitel $R_1'$, $E_1'$ bezw. den gleichen und entgegengesetzt gerichteten Krümmungshalbmesser wie die ursprüngliche Kurve $s'$*. Denn zwei konjugirte Kegelschnitte haben in jedem ihrer Berührungspunkte gleiche und entgegengesetzt gerichtete Krümmungshalbmesser. Läßt man nämlich in I, Fig. 234 die $A_1R$, also auch die $A_1Q$ unendlich klein werden, so wird $BB_1C_1C$ ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkte $A_1$; darin wird $BB_1 = CC_1 = 0^1$, $A_1R = -A_1Q = 0^2$, deshalb weichen die Fußpunkte der von $A_1$ auf die Seiten $BB_1$, $CC_1$ gefällten Senkrechten von deren Mitten um $0^2$ ab, dieses verschwindet gegen $BB_1$ und $CC_1$, es sind daher die Dreiecke $BB_1A_1$ nnd $CC_1A_1$ kongruent, und die durch sie gelegten Kreise, d. i. die Krümmungskreise der konjugirten Kegelschnitte in ihrem Berührungspunkte, gleich. — Nun wird aber der Umdrehungskegel, welcher unsere Fläche **F** in dem Parallelkreise von $R$ berührt und sein in Bezug auf die Meridianebene von $R$ konjugirter hyperbolischer Kegel von der Schmiegungsebene der $s$

in $R$ in konjugirten Kegelschnitten getroffen (96), und diese beiderlei Kegel haben mit $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ bei $R$ zwei erzeugende Kreise, bezw. Hyperbeln, gemein, also haben jene konjugirten Kegelschnitte mit $s$ bezw. $s_k$ je vier Punkte bei $R$ gemein, also besitzen alle vier Kurven gleiche vierpunktig berührende Krümmungskeise in $R$. Da nun auch die Projektionen jener kongruenten Dreiecke $BB_1A_1$, $CC_1A_1$ auf dieselbe Ebene kongruent sind, so haben auch gleichnamige Projektionen der konjugirten Kurven in $R$ gleiche Krümmungskreise, und zwar $s'$, $s_k'$ vierpunktig, $s''$, $s_k''$ dreipunktig berührende.

*Der Schlagschatten* $s_4$ *der Eigenschattengrenze* $s$ *auf die Ebene des Parallelkreises* $r$ *ihres Scheitels* $R$ *hat diesen Parallelkreis zum Krümmungskreise in* $R$. Denn trägt man auf der gemeinschaftlichen Tangente der drei Kurven $s$, $s_4$, $r$ in $R$ das unendlich kleine $RT = 0^1$ auf, und schneidet die durch $T$ senkrecht zur Tangente gelegte Ebene mit $s$, $s_4$, $r$ bezw. in $V$, $V_4$, $W$, so ist $V_4$ der Schatten von $V$, $VV_4$ ein Lichtstrahl, welcher die Schnittkurve $VW$ jener Ebene mit $\mathbf{F}$ in $V$ berührt. Daher sind $TV$, $TV_4$, $TW$, sowie $VW$ gleich $0^2$, dagegen ist $WV_4 = 0^4$ als Abweichung der Schnittkurve von ihrer Tangente in einem Abstande $VW = 0^2$ vom Berührungspunkte $V$, also ist $r$ der Krümmungskreis von $s_4$ (I, 237). — Der Krümmungshalbmesser $US'$ von $s_1$ auf $\mathbf{P}_1$ in $S'$ ist daher der Schatten des Halbmessers jenes Parallelkreises in $R$, d. i. $US' = U_0S$.

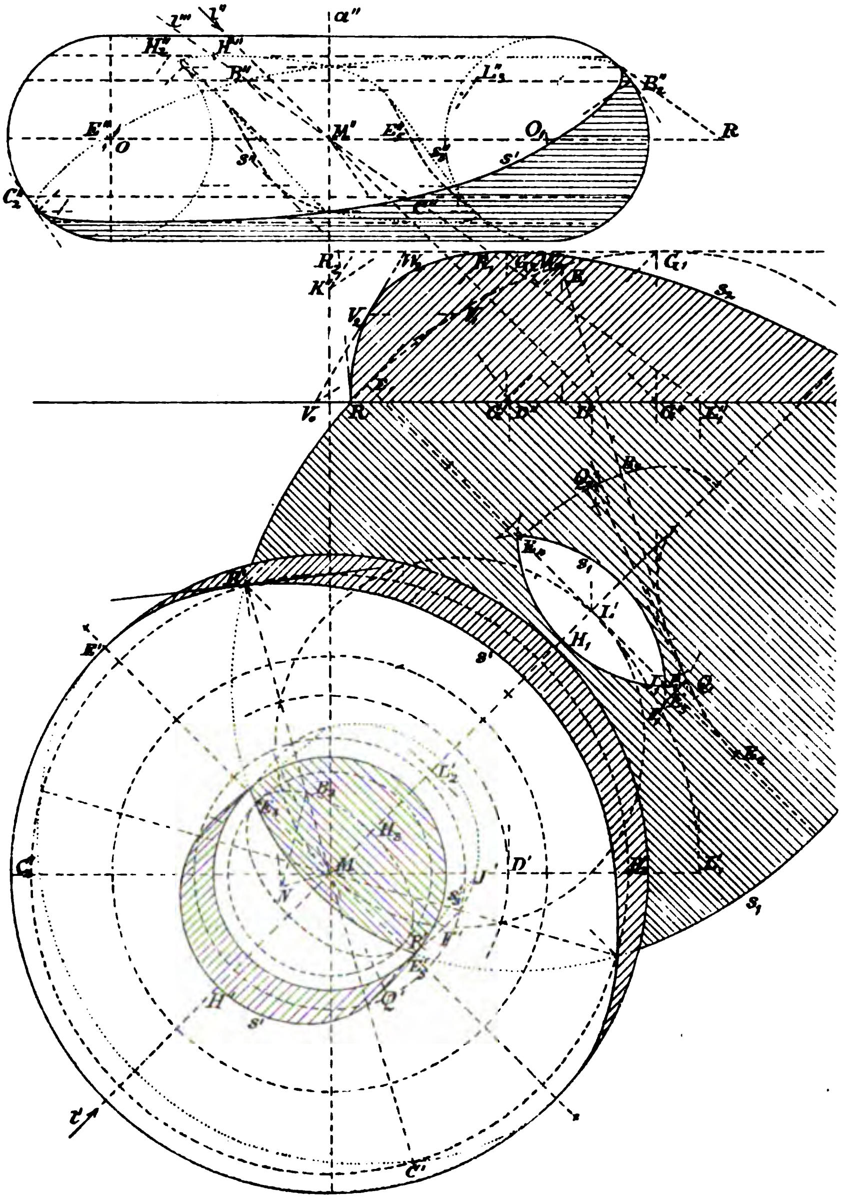
**172.** *Aufg. Für eine Umdrehungsfläche bei Parallelbeleuchtung die Eigen- und Schlagschattengrenzen* $s$ *und* $s_1$, $s_2$ *zu bestimmen.*

Fig. 81. *Aufl.* Sei die Fläche ein Ring, dessen Axe $a \perp \mathbf{P}_1$ steht, und gebe die durch den Mittelpunkt $M$ der Fläche gezogene Gerade $l$ die Richtung der Lichtstrahlen an. Man wendet wieder die drei Verfahren an.

a) Das *Kegel-Verfahren.* Zwei von der Äquatorebene gleich weit entfernte, durch die Punkte $B_2$ und $C_2$ des Hauptmeridians geführte Ebenen schneiden die Fläche in vier Parallelkreisen, deren zweite Projektionen zwei Gerade und deren erste Projektionen zwei Kreise sind. Die vier der Fläche entlang dieser Keise umschriebenen Kegel sind in ihrer unbegrenzten Gestalt alle kongruent, so daß sie sich decken, wenn man durch Parallelverschiebung (in der Richtung von $a$) ihre Spitzen, etwa in $M$, zusammenbringt; zwei der Parallelkreise liegen auf den unteren, zwei auf den oberen Kegelästen. Man zeichnet diesen Kegel durch die Parallele $M''D''$ zu den Tangenten des Hauptmeridians in $B_2''$ und $C_2''$, und seine erste Spur als Kreis aus $M'$ durch $D'$. Um an diesen Kegel Berührungsebenen $\parallel l$ zu legen, zieht man aus der ersten Spur $L'$ des durch

seine Spitze $M$ gehenden Lichtstrahles $l$ die Tangenten an die erste Spur des Kegels, oder bestimmt vielmehr nur ihre Berührungs-

Fig. 81.



punkte durch den über $M'L'$ als Durchmesser gelegten Kreis. Die aus $M'$ nach den Schnittpunkten beider Kreise gezogenen Geraden sind die ersten Projektionen der Berührungserzeugenden des Kegels,

Fig. 81. und bleiben es auch, wenn man die Kegel wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückschiebt. Diese Berührungserzeugenden schneiden die Parallelkreise, welche auf unteren Kegelästen liegen, in den gesuchten Punkten, wie $B'$, und ihre Verlängerungen über $M'$ hinaus schneiden die auf oberen Kegelästen liegenden. Parallelkreise in Punkten, wie $C'$. So ergeben sich aus dem Kegel $MD$ acht Punkte der Eigenschattengrenze $s$. Die Punkte des *Äquators* und *Kehlkreises*, d. i. der ersten Umrisse, liegen auf dem zu $l'$ senkrechten Durchmesser; so der Punkt $E$.

b) Das *Cylinder-Verfahren* liefert, wie in Nr. 167, dieselben Linien, wie das der Kegel, nur in umgekehrter Reihenfolge. Es ist von Wert für den *Symmetriemeridian* $l'$, in welchem es durch Umdrehen in den Hauptmeridian, wobei $L$ nach $L_1$ und $l''$ nach $l'''$ gelangt, die zwei höchsten und die zwei tiefsten Punkte der Kurve liefert, so den höchsten inneren $H$, vermittelst der Endpunkte, wie $H_2''$, der auf $l'''$ senkrechten Durchmesser der Meridiankreise. Ebenso ist es von Wert für den *Hauptmeridian*, den zweiten Umriß, und ergibt in ihm vier Punkte durch die auf $l''$ senkrechten Durchmesser der Meridiankreise.

c) Nach dem *Kugel-Verfahren* legt man in $B_2''$ die Meridiannormale, welche die $a''$ in $K''$, dem Mittelpunkte der die Fläche nach dem Parallelkreise von $B_2''$ berührenden Kugel, trifft. Der $\parallel l'''$ dieser Kugel umschriebene Cylinder berührt sie nach einem größten Kreise, welcher durch die auf $l'''$ senkrechte Gerade $K''L_3''$ dargestellt ist; dieselbe schneidet den Parallelkreis von $B_2''$ in $L_3''$, nud dieser Punkt bestimmt nach dem Zurückdrehen in $L_2'$ zwei Punkte des Parallelkreises, so den $B'$, wenn man den Abstand des $B'$ von $M'E'$ gleich dem Abstande des $L_3''$ von $a''$ macht.

Der *Schlagschatten* $s_1$ auf $P_1$ wird durch die ersten Spuren der durch die Punkte der Eigenschattengrenze gelegten Lichtstrahlen gefunden, so $B_1$ als Schatten von $B$. Die Tangente von $s_1$ in $B_1$ ist parallel zur Parallelkreistangente in $B'$ oder $\perp M'B'$ (170). Weil $M$ der Mittelpunkt der Fläche, so ist sein Schatten $L'$ *Mittelpunkt* der $s_1$; außerdem ist $M'L'$, weil in der Symmetrieebene gelegen, eine *Axe* dieser Grenze; dann muß auch die $\perp l'$ gezogene $L'E_1$ eine *Axe* sein. Die Gestalt der $s_1$ wird nachher erörtert werden.

Den *Schlagschatten* $s_2$ auf $P_2$ findet man am genauesten aus $s_1$ als dessen Schatten auf $P_2$ mit rückwärts gezogenen Lichtstrahlen. So ergibt sich aus $G_1$ der $s_1$ der Punkt $G_2$ der $s_2$ durch die Linienzüge $G_1G''G_2$, $G_1G'G_2$. Ist die Tangente an $s_1$ in $G_1 \parallel x$, so gilt dies auch für $s_2$ in $G_2$; und bilden, wie in der Figur, $l'$ und $l''$ Winkel von $45^0$ mit $x$, so fallen jene Tangenten in $G_1$ und $G_2$

zusammen, und es ist $G_1G_2 = G''G_1 = G'G_2$. $s_1, s_2$ sind affin mit $x$ als Axe, und in unserem Falle mit Affinitätsstrahlen parallel $x$. $s_1, s_2$ schneiden sich auf $x$ in $R$, und man findet aus der Tangente $RR_1$ an $s_1$ die Tangente $RR_2$ der $s_2$, indem man $R_1R_2 = G_1G_2$ macht, wenn jene Tangenten die $G_1G_2$ in $R_1$ und $R_2$ treffen.

In gleicher Weise ist noch aus einem beliebigen Punkt $V_1$ der $s_1$ mit seiner Tangente $V_0W_1$ der Punkt $V_2$ der $s_2$ mit der Tangente $V_0W_2$ abgeleitet ($W_1W_2 = G_1G_2$).

**173.** Eine einfache Konstruktion der Schatten $s$ und $s_1$ eines Ringes bei Parallelbeleuchtung gibt *Dunesme**) für den allgemeineren Fall, daß jede der beiden symmetrischen Meridianhälften ein Kegelschnitt ist, dessen eine Axe parallel zur Umdrehungsaxe $a$ steht, ein Fall, der bei unserem Ringe, dem Kreisringe, stattfindet. Verschiebt man in jeder Meridianebene eine solche Hälfte in der zu $a$ senkrechten Richtung, bis die zu $a$ parallele Axe in $a$ fällt, also alle um dieselbe Verschiebungslänge $m$, so sind alle verschobenen Linien Meridiane einer Umdrehungsfläche zweiten Grades, beim Kreisringe von einer Kugel. Der dieser Fläche parallel zum Lichtstrahl umschriebene Cylinder berührt nach einem Kegelschnitte, welcher leicht zu verzeichnen ist. Schiebt man nun die Meridiane wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück, so gelangen die Punkte der Berührungskurve der Fläche zweiten Grades nach Punkten der Berührungskurve des Ringes, weil die Berührungsebenen beider Flächen in solchen entsprechenden Punkten offenbar parallel sind. Zwei entsprechende Punkte besitzen den Abstand $m$.

Die dem Kreisringe zugehörige Kugel ist in der Figur in der ersten Projektion gezeichnet, in welcher die Berührungskurve, ein größter Kreis, als Ellipse erscheint, deren große Halbaxe $M'E_3$ senkrecht auf $l'$ steht, während die kleine Halbaxe $M'H_3$ gleich dem Abstande des $H_2''$ von dem zu $a$ parallelen Meridiankreisdurchmesser (aus $O$) ist. Auf dem Meridiane $M'B'$ befinden sich zwei Punkte der Ellipse, welche nach dem einen und nach dem andern Sinne im Meridiane um $m$ verschoben, die vier Punkte des Meridians angeben. So entsteht z. B. $B'$ aus dem $B_3$ der Ellipse vermittelst $B_3B' = m$.

**174.** Da die gewöhnliche *Konchoide* entsteht, wenn man auf Strahlen, die aus einem Punkte, dem *Pole*, gezogen werden, von ihren Schnittpunkten mit einer Geraden aus eine unveränderliche Länge $m$ nach beiden Seiten aufträgt, so ist unsere im Grundrisse konstruirte Kurve eine verallgemeinerte Konchoide, indem die Gerade

---

*) Comptes rendus. B. 38 (1854), S. 953 und B. 45 (1857), S. 527.

durch eine Ellipse ersetzt ist; den Pol bildet der Mittelpunkt $M'$ der Ellipse. Denkt man aus dem Pole als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser $m$ gezeichnet, so entsteht die Konchoide durch Addition der Leitstrahlen zweier Grundkurven (Kreis und Gerade bezw. Kreis und Ellipse) aus einem gemeinschaftlichen Pole. Die noch weiter *verallgemeinerte Konchoide* kann auf dieselbe Weise aus beliebig vielen, beliebig gestalteten Grundkurven gebildet werden. Für eine solche läßt sich aber die Tangente aus den Tangenten der Grundkurven leicht bestimmen.

Fig. 82.

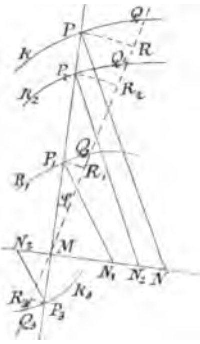


Fig. 82. Seien $k_1, k_2, k_3 \ldots$ die Grundkurven, $k$ die Konchoide, $M$ der Pol, $MP$ ein Strahl, auf welchem durch die Kurven die Leitstrahlen

$$MP_1 = r_1, \qquad MP_2 = r_2, \ldots \qquad MP = r$$

abgegrenzt werden, so ist die Konchoide durch die Gleichung bestimmt

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots,$$

wobei die Summe algebraisch genommen und in der Figur $r_3$ negativ ist.

Bilde nun ein benachbarter Leitstrahl $MQ$ mit $MP$ den Winkel $\varphi$, und seien $RQ = dr$, $R_1Q_1 = dr_1 \ldots$ die Zunahmen von $r, r_1 \ldots$, wobei $MR = MP$, $MR_1 = MP_1 \ldots$, so ist auch

$$MQ = MQ_1 + MQ_2 + \cdots,$$

daher auch
$$dr = dr_1 + dr_2 + \cdots.$$

Sei ferner $PN$ die Normale der $k$ in $N$, und schneide dieselbe auf der zum Leitstrahle $MP$ gezogenen Senkrechten die $MN = s$ ab, welche die *Subnormale* heißt, so folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$MN : MP = RQ : RP,$$

oder
$$s : r = dr : r\varphi, \qquad dr = s\varphi.$$

Entsprechend ist, wenn $MN_1 = s_1$ die Subnormale von $k_1$ u. s. w.,

$$dr_1 = s_1\varphi, \qquad dr_2 = s_2\varphi \ldots,$$

daher

$$s\varphi = s_1\varphi + s_2\varphi + \cdots, \quad \text{oder} \quad s = s_1 + s_2 + \cdots,$$

d. h. *die Subnormale der Konchoide ist gleich der algebraischen Summe der Subnormalen ihrer Grundkurven.*

Fig. 81. In unserem Falle sind die Grundkurven ein Kreis und eine Ellipse, die Subnormale des Kreises ist Null, die der Ellipse für den Punkt $B_3$ ist $M'N$ (wenn $B_3N$ ihre Normale), demnach die der Konchoide ebenfalls $M'N$, ihre Normale daher $NB'$, wodurch ihre Tangente bestimmt ist.

**175.** Der *Schlagschatten* $s_1$ *des Ringes* wird ebenfalls aus dem der zugehörigen Fläche zweiten Grades, hier der Kugel, hergeleitet. Ihr Schatten ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkte $L'$, deren große Halbaxe sich $= O_1R$ ergibt ($B_2''R \parallel l'''$), und deren kleine Halbaxe $L'E_4$ gleich dem Kugelhalbmesser ist. Die Schatten der entsprechenden Punkte $B$ und $B_3$ seien $B_1$ und $B_4$; dann ist $B_4B_1 \# B_3B' = m$. Ferner sind die Tangenten der Schattengrenzen in $B_4$ und $B_1$ parallel zu den Parallelkreistangenten in $B_3$ und $B$, d. i. $\perp M'B_3B'$ (170) oder $\perp B_4B_1$. Der Abstand $B_1B_4$ zweier entsprechenden Punkte beider Kurven ist also eine gemeinschaftliche Normale beider Kurven und von der unveränderlichen Länge $m$.

Die *Kurven* sind daher solche, welche *äquidistante* oder *parallele* genannt werden; sie besitzen wegen der gemeinschaftlichen Normalen eine *gemeinschaftliche Evolute.* Ein Quadrant der Ellipse und der zugehörige der Evolute sind verzeichnet; die Spitze $E_2$ der Evolute ist Krümmungsmittelpunkt der Ellipse und der Schlagschattengrenze $s_1$ in ihren Scheiteln $E_4$, bezw. $E_1$ und $E_5$. $s_1$ zerfällt in einen ellipsenartigen äußeren Teil und in einen inneren, der in unserem Beispiele vier Spitzen und zwei Doppelpunkte besitzt. Die Spitzen sind die Punkte, in denen die Kurve auf ihre Evolute auftrifft, und diejenige $Q_1$ z. B. erhält man, wenn man $E_2E_5$ auf dem Bogen der Evolute von $E_2$ bis $Q_1$ aufträgt. Der aus $Q_1$ rückwärts gezogene Lichtstrahl bestimmt auf der Eigenschattengrenze $s$ den Grenzpunkt $Q$, in welchem $s$ von dem Lichtstrahle berührt wird (170). Um den Berührungspunkt $Q'$ genauer zu bestimmen, beachtet man, daß die Tangente der $s_1$ in $Q_1$ parallel ist mit der Parallelkreistangente in $Q'$, daß also der Halbmesser $M'Q'$ parallel mit der Tangente der Evolute $Q_1Q_2$ gezogen werden muß, wodurch $Q'$ bestimmt wird. Die Tangente der Evolute in $Q_1$, deren Fußpunkt auf der Ellipse $Q_2$ sei, wurde durch eine Fehlerkurve ermittelt, indem für zwei dem mutmaßlichen Punkte $Q_2$ nahe liegende Punkte der Ellipse die Normalen und die Krümmungsmittelpunkte (nahe bei $Q_1$) konstruirt wurden.

Die vier mit $Q$ gleichartigen Punkte (so auch $F$) sind die *Grenzpunkte der Eigenschattengrenze* (170); sie trennen die physischen Schattengrenzen, wie $QH$, von den nur geometrischen Berührungskurven, wie $QPF$. In den Grenzpunkten beginnt der *Schlagschatten* $s_3$ *auf dem Ringe;* es berühren sich hier $s$ und $s_3$. Der andere Endpunkt ist $J$ auf dem unteren Teile der $s$ und rührt von dem Doppelpunkt $J_1$ der $s_1$ her. Der Lichtstrahl $JJ_1$ berührt die **F** in zwei getrennten Punkten der $s$, ist daher die Schnittlinie der Berührungs-

Fig. 81. ebenen der **F** in diesen beiden Punkten, und daher die Tangente des Schlagschattens auf **F** in $J$. Endlich erhält man einen Punkt $P$ der $s_3$ auf einem beliebigen Parallelkreise, z. B. dem Kehlkreise, wenn man dessen Schlagschatten (den Kreis aus $L'$ durch $E_5$) mit dem Teile $Q_1 J_1$ der $s_1$ in $P_1$ zum Schnitt bringt und aus $P_1$ durch den rückwärts geführten Lichtstrahl $P$ bestimmt, genauer durch $M'P' \parallel L'P_1$. In $P'$ berührt die erste Projektion des Kehlkreises die des gesuchten Schlagschattens. Diese drei Punkte von $s_3$ genügen meist. Aus $s_3'$ wird $s_3''$ erhalten.

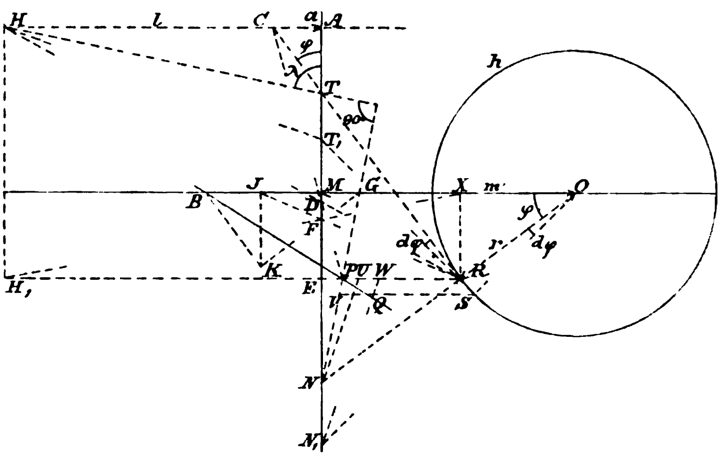
Wir werden alsbald auch die Verzeichnung der Schattengrenzen mittelst der Krümmungskreise in den Scheiteln bringen.

**176.** *Aufg. Die Eigen- und Schlagschattengrenze eines Ringes bei Centralbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Stellen wir (in Fig. 84) $\mathbf{P}_1$ senkrecht auf die Axe $a$ der Fläche **F**, und drehen den leuchtenden Punkt $L$ mit seiner Meridianebene **L** und der Meridianlinie $l$ derselben in die Hauptmeridianebene **H** bezw. die Hauptmeridianlinie $h$ und den Punkt $H$.

Fig. 83. Wir bestimmen dann wieder zuerst in Fig. 83 die Eigenschatten-

Fig. 83.




grenze $s_0$ aus $H$ und zwar ihre zweite Projektion ohne Benutzung der ersten, und darin zunächst einen Punkt $P$ des Parallelkreises eines beliebigen Punktes $R$ des Meridiankreises $h$, dessen Mittelpunkt $O$ ist. Ziehen wir in $R$ die Normale $ORN$ und die Tangente $RT$ der $h$, schneiden beide mit $a$ in $N$ und $T$, so sind $N$ und $T$ bezw. die Mittelpunkte der Kugel und des Kegels, welche die Fläche entlang jenes Parallelkreises berühren; zieht man dann aus $N$ eine Senkrechte zu $HT$, so schneidet diese den Parallelkreis in dem gesuch-

ten Punkte $P$. Denn $HT$ ist die Spur in **H** von den beiden aus $H$ an den Kegel gelegten Berührungsebenen, welche auch die Kugel je in einem Punkte des Parallelkreises von $R$ berühren, und auf $HT$ steht die Projektion $NP$ der nach den Berührungspunkten gehenden Kugelhalbmesser senkrecht. — Wenn $T$ sehr weit entfernt liegt, ist folgendes Verfahren*) vorteilhaft. Man fällt $HA \perp a$, schneidet $RT$ mit $HA$ in $C$ und $HR$ mit $a$ in $D$, so geht $CD$ durch $P$. Denn setzt man $\sphericalangle MOR = \varphi$, $\sphericalangle ATH = \lambda$, so gilt, wenn $E$ der Fußpunkt der von $R$ auf $a$ gefällten Senkrechten ist, nach der ersten Konstruktion:

$$EP : ER = \cot\lambda : \cot\varphi,$$

und nach der zweiten Konstruktion:

$$EP : ER = AC : AH = TA \operatorname{tg}\varphi : TA \operatorname{tg}\lambda = \cot\lambda : \cot\varphi,$$

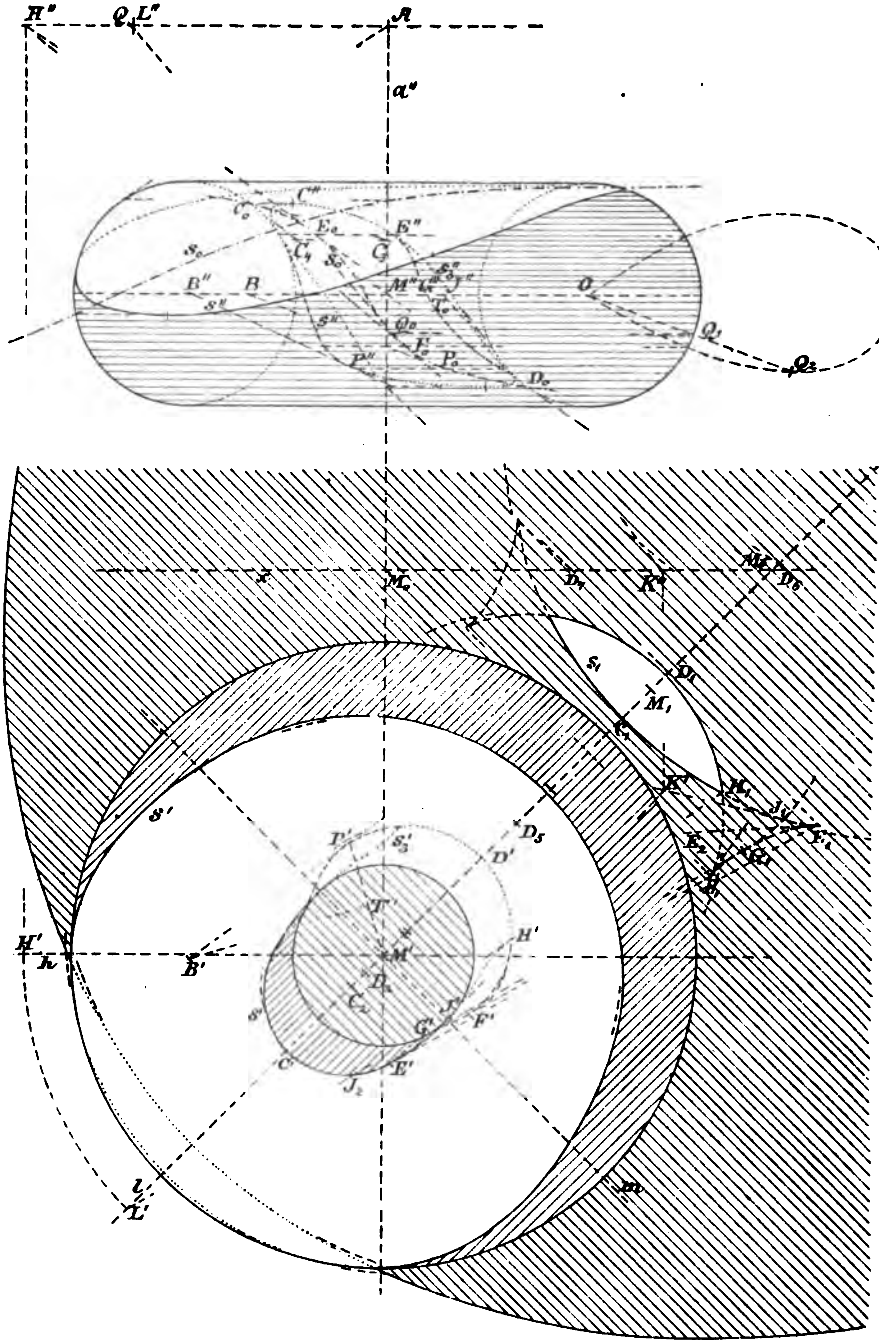
wonach beide Konstruktionen denselben Punkt $P$ liefern.

Auf diese Weise wurde in Fig. 84 $s_0$ konstruirt. Dabei ergeben sich als ausgezeichnete Punkte die des Hauptmeridians $h$, in welchen dessen Tangenten nach $H''$ laufen; die Punkte auf $a''$, welche auf den Parallelkreisen liegen, deren berührende Kegel ihre Spitze in dem Fußpunkte $A$ der von $H''$ auf $a''$ gefällten Senktrechten haben, und die Punkte des Äquator- und Kehlkreises, welche nach dem zweiten Verfahren bestimmt werden, oder noch zweckmäßiger zuerst im Grundriß als Berührungspunkte der aus $L'$ an diese Kreise gezogenen Tangenten, oder auch im Aufriß als die durch die Endpunkte der Projektion je eines Kreises von $H''H'$ harmonisch getrennten Punkte. Die Kurve $s_0$ kann wieder (168, 169) über den Umriß fortgesetzt werden, und zwar ohne Änderung des Verfahrens; $s_0$ hat die auf $a''$ senkrechten Meridiantangenten zu Asymptoten. Aus $s_0$ bestimmt man zuerst $s'$, indem man die Durchmesserlinie $m$ der Parallelkreise $\perp l$ zieht und aus einem Punkte $P_0$ der $s_0$ den Punkt $P'$ der $s'$ auf dem zugehörigen Parallelkreise bestimmt, vermittelst Abstand $P'$ von $m$ = Abstand $P_0$ von $a''$. Aus $s'$ bestimmt man $s''$. Man könnte, wie bei der Umdrehungsfläche der Cosinuslinie (169), die zur Fortsetzung des $s_0$ über den Umriß gehörigen $s'$ und $s''$ verzeichnen. Fig. 84.

**177.** Die *Tangente an* $s_0$ soll später mitteltst der Theorie der Krümmung der Flächen, hier aber durch das Verfahren der ähnlichen Figur bestimmt werden. Man findet den zu $P$ benachbarten Punkt $Q$ der $s_0$, indem man den zu $P$ gehörigen Punkt $R$ des Fig. 83.

*) De la Gournerie, géom. descr., B. 3, S. 14.

Fig. 84.



Meridians $h$ durch dessen benachbarten $S$ ersetzt, dadurch statt $N$ Fig. 83.
und $T$ die Punkte $N_1$ und $T_1$ erhält, worauf dann der Parallelkreis von $S$ durch die auf $HT_1$ senkrechte $N_1Q$ in $Q$ getroffen wird. So entsteht durch die Konstruktionslinien das Viereck (in der Grenze ein Parallelogramm) $PWQV$ (siehe Figur); die zu $N_1Q$ Parallele $NU$ schneide die $PW$ in $U$. Es sollen folgende Beziehungen gelten:

$$MO = m, \quad OR = r, \quad AH = l,$$

$$MX = ER = x, \quad PV = v, \quad PW = w, \quad \sphericalangle NON_1 = d\varphi.$$

Nun ist offenbar

$$PV = RS\frac{\cos\varphi}{\sin\lambda} \quad \text{oder} \quad v = r\,d\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\lambda},$$

$$w = PU + UW,$$

und wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $NPU$ und $HTT_1$

$$PU = TT_1\frac{PN}{TH} = -\,TT_1\frac{EN}{AH} = -\,TT_1\frac{EN}{l},$$

worin das negative Zeichen gesetzt wurde, weil $PU$ und $AH$ entgegengesetzten, $TT_1$ und $EN$ dagegen gleichen Sinn besitzen. Da ferner

$$TT_1 = \frac{TR\,d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{ER\,d\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{x}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

und $$EN = ER\operatorname{tg}\varphi = x\operatorname{tg}\varphi,$$

so ist $$PU = -\frac{x^2\,d\varphi}{l\sin\varphi\cos\varphi};$$

und da ferner

$$UW = NN_1\cot\lambda = \frac{ON\,d\varphi}{\cos\varphi}\cot\lambda = \frac{m\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\cot\lambda,$$

so ist $$w = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left(m\cot\lambda - \frac{x^2}{l}\cot\varphi\right).$$

Durch das Verhältnis von $v$ und $w$ ist die Tangente bestimmt, und es dürfte für die Konstruktion am zweckmäßigsten sein, beide Werte mit $\operatorname{tg}\varphi : d\varphi$ zu multipliciren, wodurch man $v_1$ und $w_1$ erhält; es ist dann

$$v_1 = r\frac{\sin\varphi}{\sin\lambda}, \quad w_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(m\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\lambda} - \frac{x^2}{l}\right).$$

Es ist aber $v_1 = GP$ (s. Fig.), weil $GP\sin\lambda = OR\sin\varphi$. Ferner ist

$$m\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\lambda} = MG, \qquad -\frac{x^2}{l} = JM.$$

Denn bestimmt man, in Bezug auf letzteres, $H_1$ durch $HH_1 \parallel a$,

Fig. 83. $RH_1 \perp a$, schneidet dann $H_1X$ mit $a$ in $F$, und $RF$ mit $MO$ in $J$, so ist

$$JM : MX = ER : H_1E \quad \text{oder} \quad JM : x = x : (-l).$$

Daher ist
$$JG = MG + JM = m\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\lambda} - \frac{x^2}{l};$$

und zieht man $JK \parallel a$, $GK \parallel OR$, schneidet diese Linien in $K$, zieht $KB \perp GK$ (oder $\perp OR$) bis $B$ auf $OM$, so ist

$$BG = KG : \cos\varphi = JG : \cos^2\varphi = w_1.$$

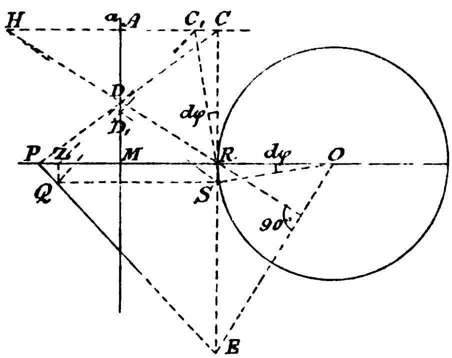
$PB$ ist dann die gesuchte Tangente, weil $v : w = v_1 : w_1$, also

$$PV : VQ = GP : BG.$$

Daraus folgt *zur Bestimmung der Tangente in $P$ folgende Regel:* Man ziehe durch den Lichtpunkt $H$ eine Parallele $HH_1$ zur Axe $a$, durch $P$ eine Senkrechte zu $a$, welche die $HH_1$ in $H_1$ und den Meridiankreis in dem Punkte $R$ des Parallelkreises von $P$ trifft, verbinde $H_1$ mit dem Fußpunkte $X$ der von $R$ auf die Verbindungslinie des Mittelpunktes $M$ der Fläche mit dem Mittelpunkte $O$ des Meridiankreises gefällten Senkrechten, schneide $H_1X$ mit $a$ in $F$, ziehe $RF$ bis $J$ auf $MO$, sodann $JK \parallel a$, $GK \parallel OR$, schneide beide in $K$, ziehe $KB \perp OR$ bis $B$ auf $MO$, so ist $PB$ die Tangente. Es sind sechs neue Hilfslinien notwendig.

**178.** *Fällt $P$ auf den Umriß $h$,* in $R$, so muß $RT$ durch $H$ gehen; dann gelangt $G$ in $O$ und $GK$ in die Linie $ON$. *Fällt dagegen $P$ in $a$,* so gelangt $T$ in $A$ (176) und $G$ in $M$. Fallen aber $R$ und $P$ auf den größten oder kleinsten Parallelkreis $MO$, so versagt sowohl das erste Verfahren zur Bestimmung von $P$, wie das darauf gestützte Tangentenverfahren. Man erhält dann nach dem zweiten Verfahren $P$, indem man $HR$ mit $a$ in $D$ schneidet, und die $RC \parallel a$ bis $C$ auf $HA$ zieht; die $CD$ bestimmt dann $P$ auf $MO$. Der dem $R$ benachbarte Punkt $S$ liefert $C_1$, $D_1$ und $Q$. Fällt man $QZ \perp MO$, so geht $ZC_1$ durch $D$, weil $QZ = SR$ und die Projektionen dieser Strecken aus $C_1$ und $H$ auf $a$ offenbar einander gleich sind und sich in $D_1D$

Fig. 85.

Fig. 85.


decken. Schneidet man die Tangente $PQ$ mit der $RC$ in $E$, so ist aus ähnlichen Dreiecken

$$RE = ZQ\,\frac{PR}{PZ} = RS\,\frac{CH}{CC_1} = OR\,\frac{CH}{RC}.$$

Hieraus aber folgt, daß die Dreiecke $ORE$ und $RCH$ ähnlich sind und daß $OE \perp HR$ steht, weil schon $OR \perp RC$ und $RE \perp CH$. — Man erhält also die *Tangente $PE$ in dem Punkte $P$ des in $R$ begrenzten größten oder kleinsten Parallelkreises*, wenn man $OE \perp HR$ zieht und in $E$ mit der Meridiantangente in $R$ schneidet.

**179.** *Bei Parallelbeleuchtung gestaltet sich die Konstruktion der Tangente wesentlich einfacher.* Indem $H$ ins Unendliche rückt, gelangt $H_1$ auf $RE$ ebenfalls ins Unendliche, gelangen $F$ und $J$ nach $M$, $JK$ in $a$, so daß nur noch zwei Hilfslinien, $GK$ ($K$ auf $a$) und $KB$, notwendig sind. — Andererseits ist in Fig. 85 $OE \perp l$, wenn $l$ der Lichtstrahl im Lichtmeridiane. Fig. 83. Fig. 85.

**180.** Aus der Tangente an $s_0$ in ihrem Punkte $P_0$, welche die $M''O$ in $B$ treffe, findet man diejenige an $s'$ in $P'$ und an $s''$ in $P''$, indem man beachtet, daß die Tangente an $s$ zugleich in der Berührungsebene der Fläche in $P$ enthalten ist. Man legt daher in dem Schnittpunkte des Parallelkreises von $P_0$ mit dem Hauptmeridiane an diesen die Tangente, schneidet sie mit der Mittelebene ($\parallel \mathbf{P}_1$ durch $M$) in $T_0$, trägt den Abstand $M''T_0$ auf $M'P'$ als $M'T'$ auf, zieht $T'B' \perp M'P'$, so ist $T'B'$ der Schnitt der Berührungsebene der Fläche in $P$ mit der Mittelebene. Bestimmt man nun auf $T'B'$ den Punkt $B'$ so, daß sein Abstand von $m = M''B$ ist, so ist $P'B'$ die gesuchte Tangente an $s'$, $B''P''$ diejenige an $s''$. Fig. 84.

**181.** *Die Grenzpunkte der Eigenschattengrenze*, in welchen die Tangenten derselben nach der Lichtquelle, bei $s_0$ nach $H$, gehen, und welche, wie früher bei der Parallelbeleuchtung, auf dem inneren Kurvenaste liegen, findet man *durch eine Fehlerkurve*. Geht eine Projektion der Tangente an $s$ durch die gleichnamige Projektion des Lichtpunktes $L$, so geht im allgemeinen auch die räumliche Tangente der $s$ durch $L$. Denn die Tangente ist der Schnitt der durch ihre Projektion gehenden projicirenden Ebene mit der Berührungsebene der Fläche im fraglichen Punkte, und beide Ebenen gehen durch $L$. Ausgenommen ist der Fall, in welchem diese Ebenen keine Schnittlinie liefern, weil sie ganz in einander fallen, wo also der Punkt auf dem Umrisse liegt. Dies gilt von den Punkten der $s'$ auf dem Kehlkreise und dem Äquator, und von den Punkten der $s''$ auf dem Hauptmeridiane. Bei $s_0$ kommen in unserem Falle solche Punkte nicht vor. Eine Fehlerkurve zur Be-

Fig. 84. stimmung der Berührungspunkte der aus $H''$ an $s_0$ gezogenen Tangenten kann man dadurch bilden, daß man die Tangente in einem Punkte $Q_0$ der $s_0$ mit $AH''$ in $Q$ schneidet und $QH''$ als Maß des Fehlers annimmt. Schneidet man die Parallelkreisebene von $Q_0$ mit dem Hauptmeridiane in einem behufs Trennung der Linien außen gewählten Punkte $Q_1$, und trägt auf dem Halbmesser $OQ_1$ den Fehler $QH''$ als $Q_1Q_2$ auf, so bilden die Punkte $Q_2$ für alle Punkte der $s_0$ eine Fehlerkurve, welche im allgemeinen zweimal durch $O$ geht, nämlich da, wo der Fehler gleich $Q_1O$ ist, und welche den Hauptmeridian in zwei Punkten schneidet. Auf den Parallelkreisebenen dieser Schnittpunkte liegen die gesuchten Grenzpunkte $E_0$, $F_0$; sie werden auf die gewöhnliche Weise gefunden und auf $s'$ und $s''$ übertragen.

**182.** Die *Schlagschattengrenzen* $s_1$ auf $\mathbf{P}_1$ und diejenige $s_3$ auf der Fläche selbst werden am genauesten aus $s_0$ und $s'$ konstruirt. So erhält man den Schatten $D_1$ von $D$ durch $M'D_1 = M_0D_6$, den Schatten $M_1$ von $M$ durch $M'M_1 = M_0M_6$. $s_1$ hat in den Schatten der vier Grenzpunkte Spitzen, wie $E_1$, $F_1$; in ihnen stehen die Tangenten senkrecht auf den nach den schattenwerfenden Punkten gehenden Parallelkreishalbmessern (170), so $E_1E_2 \perp M'E'$. Von dem *Schlagschatten* $s_3$ *auf der Fläche* ist wieder $E$ ein Anfangs-, und ein aus einem Selbstschnitte $H_1$ der $s_1$ bestimmter Punkt $H$ ein Endpunkt; in $E$ und $H$ laufen die Tangenten der $s_3$ nach $L$. Der Punkt $J$ der $s_3$ auf dem Kehlkreise wird aus dem Schnittpunkte $J_1$ des Schattens des Kehlkreises (ein Kreis aus $M_1$ durch $G_1$) mit $s_1$ bestimmt ($L'J_1J'J_2$). Die Tangente der $s_3''$ in $J''$ wird durch ihre erste Spur $K'$, $K''$ gefunden, wobei $K'$ der Schnitt der ersten Spur $J'K'$ der Berührungsebene der Fläche in $J$ und der Tangente $J_1K'$ ($\perp M'J_2$) der $s_1$ in $J_1$ ist.

**183.** *Die Krümmungshalbmesser der Schattengrenzen in ihren Scheiteln.* Für die Scheitel $C'$, $D'$ von $s'$ werden die Krümmungsmittelpunkte wieder (171) mittelst der nach den Parallelkreisen von $C$ bezw. $D$ berührenden Kegel gefunden. Schneidet die Tangente der $s_0$ in $C_0$ die $a''$ in $C_3$, und treffen sich die Senkrechte $C_3C_4$ zu $a''$ und die Meridiantangente $H''C_0C_4$ in $C_4$, so ist $C_4C_3 = C'C_2$ der gesuchte Krümmungshalbmesser.

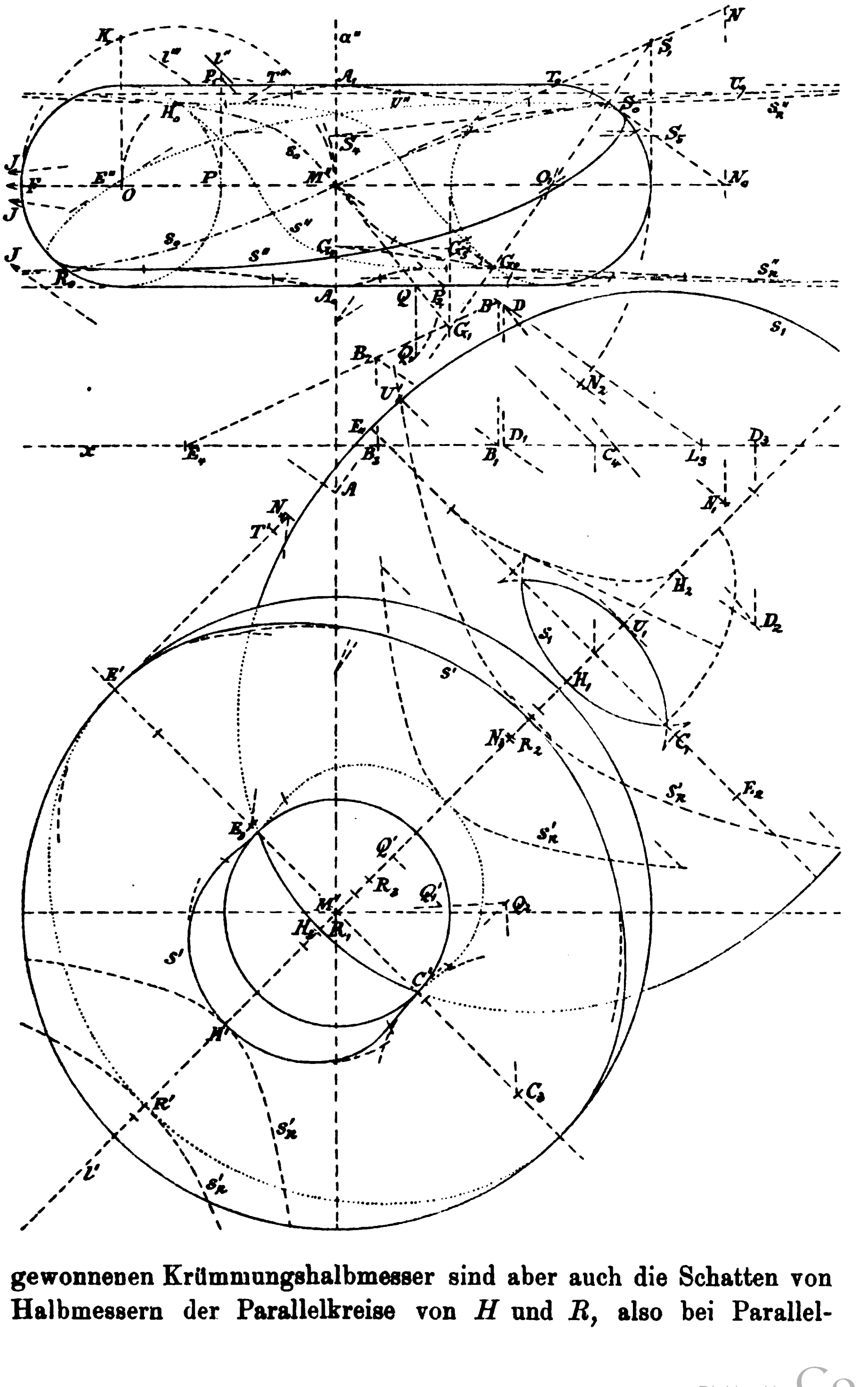
Die Krümmungshalbmesser der $s_1$ in $C_1$ und $D_1$, so $D_1D_5$, sind bezw. die Schatten von Halbmessern der Parallelkreise von $C$ und $D$ (171); daher $D_1D_5 = D_6D_7$.

**184.** *Verzeichnung der Schattengrenzen des Ringes bei Parallelbeleuchtung mit Benutzung der Krümmungskreise in den Scheiteln.*

Fig. 86 Der Schlagschatten $s_1$ ergab sich (175) als parallele Kurve zu

einer Ellipse, so daß beide Kurven dieselbe Evolute besitzen; von $H_1$, $R_1$ waren dabei $H_2$, $R_2$ die Krümmungsmittelpunkte. Die so

Fig. 86.



gewonnenen Krümmungshalbmesser sind aber auch die Schatten von Halbmessern der Parallelkreise von $H$ und $R$, also bei Parallel-

Fig. 86. beleuchtung denselben gleich, so daß sein muß $H_1H_2 = H'M'$, $R_1R_2 = R'M'$.

Zu weiteren Bestimmungen von Krümmungshalbmessern ermittelt man zuerst die *Tangenten der* $s_0$ in den Punkten $H_0$, $R_0$ des Meridians, oder in deren gegenüberliegenden Punkten $G_0$, $S_0$, sowie ihre Tangenten in $M''$. Zu dem Ende schneidet man den zu $l''$ senkrechten Meridiandurchmesser (aus $O_1$) mit $a$ und den beiden zu $a$ parallelen Tangenten des einen Meridiankreises bezw. in $A$, $G_1$, $S_1$, zieht $AJ \perp O_1A$ bis $J$ auf $M''O$, so sind $G_0J$, $S_0J$, $M''G_1$, $M''S_1$ die gesuchten Tangenten (179).

Nun erhält man den *Krümmungshalbmesser der* $s'$ *in* $R' = R'R_3 = S_4S_5$, wenn man die Tangente $S_0J$ der $s_0$ mit $a''$ in $S_4$ schneidet und $S_4S_5 \perp a''$ bis $S_5$ auf der Umrißtangente $S_0S_5$ zieht (171). Entsprechend findet man $H_3$ zu $H'$ durch $H'H_3 = G_4G_5$.

Der *Krümmungshalbmesser* $E'E_3$ *der* $s'$ *in ihrem Scheitel* $E'$ wird aus demjenigen $E_1E_2$ der $s_1$ in $E_1$ bestimmt. Weil $s_1$ und sein Krümmungskreis in $E_1$ drei Punkte (weil $E_1$ ein Scheitel, auch noch einen vierten) gemein haben, so haben die Cylinder, welche beide Kurven durch Lichtstrahlen projiciren, bei $E_1$ drei Erzeugende gemein, und die Schmiegungsebene der $s$ in $E$ schneidet beide Cylinder in Kurven, welche unter einander und mit $s$ drei Punkte bei $E$ gemein haben, und für deren Projektionen auf irgend eine Ebene dasselbe gilt. Daher hat $s'$ bei $E'$ denselben Krümmungskreis, wie die Projektion des elliptischen Schnittes jener Schmiegungsebene mit dem schiefen Kreiscylinder. Der Grundkreis dieses Cylinders und die Ellipse des schiefen Schnittes und deren Projektion haben in der Richtung $E_1E_2$ die gleichen Halbaxen $E_1E_2$, in der darauf senkrechten Richtung dagegen bezw. die Halbaxen $E_1E_2$, $E_4B$, $E_4B_1$, wenn man auf der Projektionsaxe $x$ von deren Schnittpunkte $L_3$ mit $l'''$ die $L_3E_4 = E_2E_1$ aufträgt, $E_4B$ parallel $M''S_1$ (der Schmiegungsebene der $s$ in $E$) bis $B$ auf $l'''$ zieht, und dann $BB_1 \perp x$ fällt. Der Krümmungshalbmesser der letzten Ellipse, also auch der $s'$ in $E'$ ist dann $= E_4B_1^2 : E_4L_3 = E_4B_1 \dfrac{E_4B_1}{E_4L_3} = E_4B_3 = E'E_3$, wenn man $B_1B_2 \parallel l'''$ bis $B_2$ auf $E_4B$ und $B_2B_3 \perp x$ bis $B_3$ auf $x$ zieht.

Entsprechend findet man von $s'$ in $C'$ den Krümmungshalbmesser $C'C_3 = C_4D_3$, wenn man denjenigen $E_2C_1$ von $s_1$ in $C_1$ auf $x$ als $L_3C_4$ aufträgt, $C_4D \parallel M''G_1$ bis $D$ auf $l'''$ zieht, $DD_1 \perp x$ fällt, $D_1D_2 \parallel l'''$ bis $D_2$ auf $C_4D$ zieht und $D_2D_3 \perp x$ fällt.

Man kann *die Krümmungshalbmesser von* $s'$ *in* $E'$ *und* $C'$ *auch unabhängig von* $s_1$ durch eine Umdrehungsfläche zweiten Grades finden, welche mit dem Ringe den Parallelkreis von $E$, bezw. $C$, und

noch zwei und dann auch noch einen vierten benachbarten Parallelkreis gemein hat. Für $E$ ist diese Fläche ein Ellipsoid, dessen Meridianellipse die beiden Meridiankreise des Ringes zu Krümmungskreisen hat und dessen in $a$ liegende Axe daher $\sqrt{FM'' \cdot FO} = FK$ ist. Dieses Ellipsoid wird von der Schmiegungsebene der $s$ in $E$ in einer Ellipse geschnitten, deren erste Projektion wieder eine Ellipse ist, welche $M'E'$ und $M'N_3$ = dem Abstande $N_2$, $a''$ zu Halbaxen hat. Abstand $N_2$, $a''$ ist auch gleich dem Abstande des Schnittpunktes der $M''S_1$ (Schmiegungsebene in $E$) mit der Lichtmeridianellipse jenes Ellipsoides von $a''$, und diesen Abstand findet man mittelst des aus $M''$ durch $F$ gezogenen Kreises, welcher zu jener Ellipse affin ist in Bezug auf $M''F$ als Axe und $a''$ als Strahl der Affinität. Der Geraden $M''S_1N$ entspricht dabei diejenige $M''N_1$, wenn $N$ auf $M''S_1$ so bestimmt ist, daß sein Abstand von $M''F$, $N_0N = FK$, und wenn $N_1$ auf $NN_0$ durch $N_0N_1 = M''F$ festgelegt wurde; $M''N_1$ trifft dann den affinen Kreis in $N_2$. In jener Ellipse von den Halbaxen $M'E'$, $M'N_3$ ($\# E'N_4$) ist aber der Krümmungsmittelpunkt $E_3$ für $E'$ durch $N_4E_3 \perp E'N_3$ bestimmt.

Die nach dem Parallelkreise von $C$ sich anschmiegende Fläche zweiten Grades ist ein einschaliges Umdrehungshyperboloid, von welchem die in $a$ liegende ideelle Axe $= \sqrt{M''P \cdot PO} = PP_1$, daher eine Meridianasymptote die Linie $M''P_1P_2$ ist. Die Schmiegungsebene der $s$ in $C$, bestimmt durch $M''G_1$, schneidet daher das Hyperboloid in einer Hyperbel, deren reelle Halbaxe $M'C'$, deren ideelle $= C'Q_2$ ist. Ihre Asymptote $M'Q_2$ nämlich ist die Projektion einer Schnittlinie jener Schmiegungsebene mit dem Asymptotenkegel und ist durch $M'Q' = A_0Q$ (s. Fig.) und $Q'Q_1' = QQ_1$ bestimmt. Der Krümmungsmittelpunkt $C_3$ der $s'$ in $C'$ wird dann durch $Q_2C_3 \perp M'Q_2$ ermittelt.

Aus der Zeichnung ersieht man, daß die Krümmungshalbmesser der äußeren Kurve $s'$ in allen vier Scheiteln Minima sind, daß also dazwischen noch Maxima liegen müssen, so daß die Evolute acht Spitzen besitzt. Dieses Flacherwerden der $s'$ zwischen den Scheiteln bedingt den Unterschied in ihrem Aussehen gegen die Ellipse.

Von $s''$ findet man die *Tangenten in ihren Punkten der Mittelebene*, so $E''T''$ in $E''$, aus den Tangenten der $s_0$ in $M''$. Schneidet die Tangente des äußeren Astes von $s_0$ in $M''$ die Ebene des höchsten Parallelkreises in $T_0$, und trägt man Abstand $T_0$, $a'' = A_1T_0$ auf der Tangente von $s'$ in $E'$ nach $E'T'$, so ergibt sich aus $T'$ der Punkt $T''$ in jener höchsten Parallelkreisebene.

**185.** Es sind auch die zu $s'$ und $s''$ *konjugirten Kurven* $s_k'$ und

$s_k''$ nach Art derjenigen in Nr. 169 zugefügt. Aus dem Punkte $U_0$ der $s_0$ ist wieder $U'$ gewonnen durch $M'U_1$ = Abst. $U_0$, $a''$, und $U_1 U'$ = Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse = Abst. $U_0$, $a''$, und dessen andere Kathete gleich dem Halbmesser des Parallelkreises von $U_0$ ist. Aus $U'$ ergibt sich $U''$. Die Asymptoten der $s_k''$ sind die (geraden) Projektionen der äußersten Parallelkreise, die der $s_k'$ die Geraden aus $M'$, welche 45° mit $l'$ bilden. Die $s_k'$ haben das ungefähre Ansehen zweier Hyperbeln mit je zwei kongruenten Ästen; der Übergang durch das Unendliche geschieht aber von einem Aste zu dem gegenüberliegenden nicht kongruenten, weil er in derselben zu $a$ senkrechten Ebene vor sich geht. Bei $s_k''$ projiciren sich zwei Asymptoten als Punkte, so $A_1$, wodurch jener Übergang im Unendlichen in das Endliche projicirt ist.

**186.** *Übungsaufgaben.* Aus einem gegebenen Punkte $L$ einen Kegel, oder parallel zu einer gegebenen Geraden $l$ einen Cylinder zu umschreiben, oder bei Central- ($L$) oder Parallelbeleuchtung ($l$) die Eigen- und Schlagschattengrenzen zu bestimmen für folgende Flächen:

1) ein Umdrehungsellipsoid, ein ein- oder zweischaliges Umdrehungshyperboloid, ein Umdrehungsparaboloid;

2) einen elliptischen Ring, mag die Axe der Meridianellipse parallel oder geneigt gegen die Umdrehungsaxe sein;

3) eine Umdrehungsfläche der Cosinuslinie (165), wobei man die Umdrehungsaxe parallel mit der Tangente oder mit der Normale des Scheitels legen kann; besonders ist der Fall zu beachten, in welchem der Lichtpunkt in einer Tangente der Cosinuslinie in ihrem Wendepunkte liegt.

## III. Die durch eine gegebene Gerade an eine Umdrehungsfläche gelegte Berührungsebene.

**187.** Die Berührungsebenen einer *beliebigen Fläche* F, welche durch eine gegebene Gerade $g$ gehen, berühren jeden Kegel, der aus einem Punkte von $g$ der F umschrieben ist, und ihre Berührungspunkte liegen auf der Berührungskurve eines jeden solchen Kegels. Alle diese Kegel werden daher von jenen Ebenen berührt, und die Berührungskurven aller gehen durch die Berührungspunkte jener Ebenen. Um die durch $g$ gehenden Berührungsebenen an F zu bestimmen, kann man daher

1) aus zwei Punkten der $g$ berührende Kegel an F legen und ihre Berührungskurven verzeichnen; die Schnittpunkte derselben sind dann die Berührungspunkte der gesuchten Ebenen, und ihre Anzahl

ist bei algebraischen Flächen eine endliche. Der unendlich ferne Punkt der $g$ liefert einen umschriebenen Cylinder. Schneiden sich zwei Berührungskurven nicht reell, so gibt es keine durch $g$ gehenden Berührungsebenen.

2) Oder man kann aus Einem Punkte der $g$ einen Kegel um **F** beschreiben und an ihn die berührenden Ebenen durch $g$ legen. Ist die Berührungskurve eine ebene, so legt man aus dem Schnittpunkte der $g$ mit ihrer Ebene die Tangenten an die Berührungskurve; ihre Berührungspunkte sind auch die der gesuchten Ebenen.

Ist **F** eine *abwickelbare Fläche*, so gibt es im allgemeinen keine Auflösung, weil ein Punkt der $g$ schon die Berührungsebenen bestimmt (163).

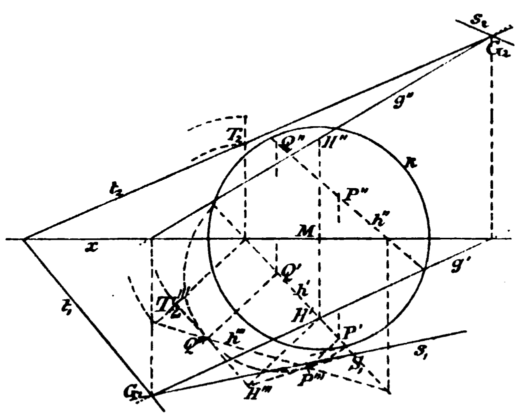
Für die *Flächen zweiten Grades* wurde unsere Aufgabe schon in Nr. 134 gelöst. Dennoch soll zur Veranschaulichung des eben angegebenen Verfahrens für die Umdrehungsflächen eine solche zweiten Grades gewählt werden, weil für andere Umdrehungsflächen ein anderes Verfahren zweckmäßiger ist.

**188.** *Aufg. Durch eine gegebene Gerade $g$ an eine gegebene Kugel* **F** *eine Berührungsebene zu legen.*

Man lege die Projektionsaxe $x$ durch den Mittelpunkt $M$ der Kugel, so fallen die beiden Umrisse in einem aus $M$ mit dem Kugelhalbmesser beschriebenen Kreise $k$ zusammen.

*Aufl.* 1. Als Spitzen der umschriebenen Kugel nimmt man Fig. 87.
zweckmäßig die Spuren $G_1$ und $G_2$ der $g$ an; dann sind die Ebenen der Berührungskurven bezw. auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ senkrecht, die erstere hat die Berührungssehne $h'$ der aus $G_1$ an $k$ gelegten Tangenten zur ersten Spur und Projektion; die zweite hat die Berührungssehne $h''$ aus $G_2$ zur zweiten Spur und Projektion. Der Schnitt beider Ebenen ist die Polare $h$ der $g$ zu **F**. Um ihre Schnittpunkte $P$ und $Q$ mit der Kugel zu bestimmen, lege man die $h$ mit ihrer ersten projicirenden Ebene und deren Durchschnitt mit der Kugel (einen Berührungskreis) in $\mathbf{P}_1$ um, so trifft $h'''$ den umgelegten Kreis

Fig. 87.

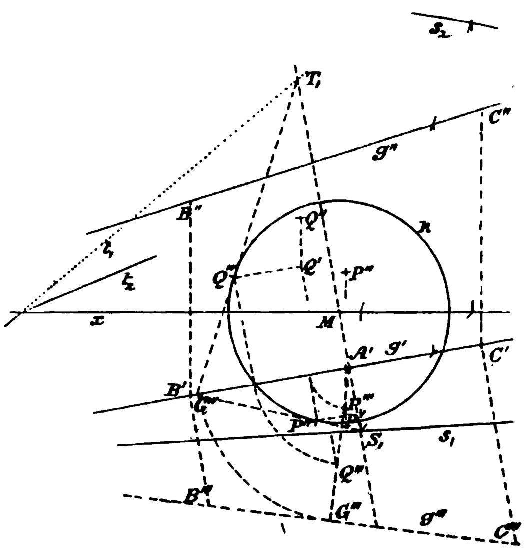


in $P'''$ und $Q'''$, aus denen sich $P'$, $Q'$ auf $h'$ und $P''$, $Q''$ auf $h''$ ergeben. Weil die Berührungsebene **S** in $P$ senkrecht auf dem Halbmesser $MP$ steht, so lege man durch $G_1$ die $s_1 \perp MP'$, durch $G_2$ die $s_2 \perp MP''$; ebenso für die Berührungsebene **T** in $Q$ durch $G_1$ die $t_1 \perp MQ'$, durch $G_2$ die $t_2 \perp MQ''$.

*Aufl.* 2. Die $g$ schneidet die Ebene des Berührungskreises $h'$ in $H$, welcher Punkt durch die Umlegung nach $H'''$ gelangt. Die beiden aus $H'''$ an den umgelegten Berührungskreis gelegten Tangenten bestimmen die Berührungspunkte $P'''$ und $Q'''$ und haben, die eine $S_1$ zur ersten, die andere $T_2$ (bestimmt aus $T_2'''$) zur zweiten Spur, so daß $s_1$ durch $S_1$, $t_2$ durch $T_2$ gezogen werden kann.

Fig. 88. *Aufl.* 3. Sind die Spuren der $g$ nicht erreichbar, so denke man sich der Kugel parallel zu $g$ einen Cylinder umschrieben, dessen Berührungskurve der größte Kreis der auf $g$ senkrechten Durchmesserebene ist. Ihre erste Spur ist $MA' \perp g'$ mit dem Fußpunkte $A'$ auf $g'$. Legt man die erste projicirende Ebene der $g$ in die $\mathbf{P}_1$ um, wobei $g$ nach $B'''C''' = g'''$ gelangt, so zeigt sich der Schnitt der Ebene jenes größten Kreises mit der projicirenden Ebene als die auf $g'''$ gefällte Senkrechte $A'G'''$, und der Fußpunkt $G'''$ auf $g'''$ bestimmt den Schnittpunkt $G$ der Ebene jenes größten Kreises mit $g$. Legt man nun diesen Kreis

Fig. 88.

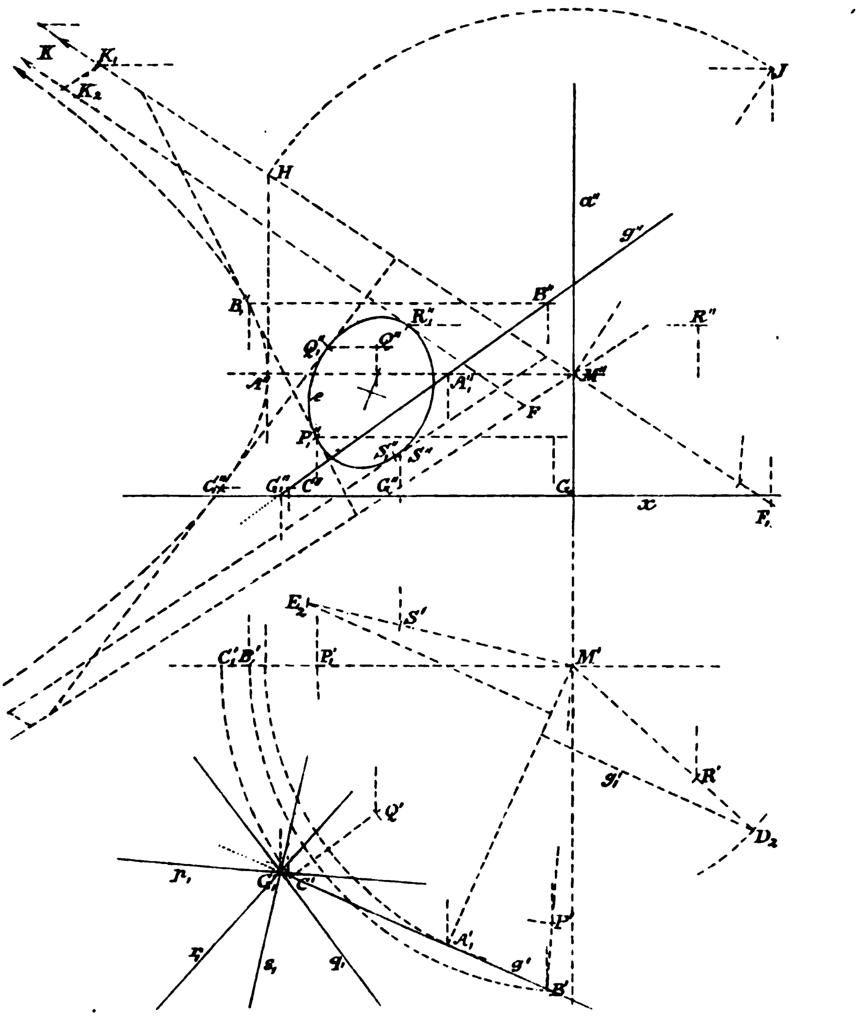



samt $G$ in $\mathbf{P}_1$ um, wobei der Kreis in den Umriß $k$ und $G$ nach $G^{IV}$ auf $g'$ gelangt, zieht aus $G^{IV}$ die beiden Tangenten an $k$, welche die Berührungspunkte $P^{IV}$, $Q^{IV}$ besitzen und die $MA'$ in $S_1$ und $T_1$ schneiden, schlägt dann den Kreis wieder zurück, so erhält man (und zwar auf diese Weise am genauesten) von den Berührungspunkten vermittelst der dritten Projektionen der beschriebenen Kreisbogen die dritten Projektionen $P'''$ und $Q'''$, und dadurch $P'$, $Q'$, $P''$, $Q''$, während die ersten Spuren $S_1$ und $T_1$ der Tangenten an ihrer Stelle bleiben. Die Spuren der durch $g$, $P$, $S_1$, bezw.

$g$, $Q$, $T_1$ gehenden und auf $MP$, bezw. $MQ$ senkrechten Ebenen **S** und **T** sind nun leicht zu verzeichnen.

**189.** Ist die Umdrehungsfläche **F** nicht vom zweiten Grade, so vermeidet man die beiden Berührungskegel durch ein von Monge gegebenes und in I, 23 angedeutetes Verfahren, indem man die $g$

Fig. 89.




durch Drehung um die Umdrehungsaxe $a$ der **F** ein Umdrehungshyperboloid beschreiben läßt. Eine durch $g$ an die **F** gelegte Berührungsebene berührt auch dieses Hyperboloid, weil es die Erzeugende $g$ desselben enthält, und zwar beide Flächen in Punkten derselben auf der Berührungsebene senkrechten Meridianebene. Man hat

daher nur an beide Flächen mittelst der gemeinschaftlichen Tangenten entsprechender Meridiane die dabei möglichen gemeinschaftlichen Berührungsebenen zu legen und jede derselben zu drehen, bis sie $g$ enthält.

*Aufg. An einen Ring* **F** *durch eine gegebene Gerade g eine Berührungsebene zu legen.*

Fig. 89. *Aufl.* Es stehe die Umdrehungsaxe $a$ $(M', a'')$ des Ringes $\perp$ **P**$_1$, es sei die geneigte Ellipse $e$ die Hälfte seines Hauptmeridians und $G_1$ die erste Spur der $g$. Von dem durch Drehung der $g$ um $a$ entstehenden Umdrehungshyperboloide geht der Kehlkreis durch den Fußpunkt $A_1$ der von $M'$ auf $g'$ gefällten Senkrechten $M'A_1'$. Seine zweite Projektion geht daher durch $A_1''$ auf $g''$, bestimmt auf $a$ den Mittelpunkt $(M'', M')$ des Hyperboloids und trifft den Hauptmeridian in $A''$, wobei $M''A'' = M'A_1'$. $A''$ ist dann ein Scheitel der Hyperbel des Hauptmeridians, und einen Punkt $G''$ einer Asymptote $M''G''$ derselben erhält man noch auf der von $G_1''$ auf $a''$ gefällten Senkrechten $G_1''G_0$, wenn man $G_0G'' = A_1'G_1'$ macht. Damit wird die Hyperbel verzeichnet.

In der Hauptmeridianebene kann man vier gemeinschaftliche Tangenten an die Ellipse und die Hyperbel legen; eine derselben berührt die erstere in $P_1$, die letztere in $B_1$, der Mitte des Abschnittes der Tangente zwischen den Asymptoten. Die durch eine solche Tangente senkrecht zu $P_2$ geführte Ebene ist eine gemeinschaftliche Berührungsebene beider Flächen und enthält eine aus $g$ entstandene, durch den Berührungspunkt des Hyperboloids gehende Erzeugende desselben. Man dreht nun jene in $B_1$ berührende Ebene um $a$, bis $B_1$ nach $B$ in $g$ fällt; dabei ist $B'$ als einer der beiden Schnittpunkte des Parallelkreises $B_1'B'$ mit $g'$ eindeutig aus $B''$ bestimmt, oder im Grundriß allein durch die Regel, daß $B'$ und $G_1'$ auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von $A_1'$ liegen, je nachdem $B_1''$ und $G_1''$ sich auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von $M''A_1''$ befinden. Bei der Drehung bleibt jene Ebene eine gemeinschaftliche Berührungsebene beider Flächen; ihre Lage nach der Drehung geht durch $g$, ist daher eine der gesuchten Ebenen. Der Berührungspunkt $P'$ der Ebene mit dem Ringe liegt auf dem Parallelkreise von $P_1$, in der Meridianebene von $B$ und in unverändertem Abstande von $B$. Die erste Spur $p_1$ der Berührungsebene geht durch $G_1$ und ist $\perp M'P'$. Entsprechend findet man, für eine zweite Berührungsebene, $Q$ und $q_1$. Zwei weitere Ebenen bereiten im vorliegenden Falle dadurch eine Schwierigkeit, daß in dem Hauptmeridiane die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten auf der Hyperbel über die Grenze der Zeichenfläche hinausfallen. Man kann dabei durch eine Verkleinerung jeder Projektion bezw.

mit $M'$ und $M''$ als Ähnlichkeitspunkte zum Ziele gelangen. Diese Verkleinerung wurde im Grundriß vorgenommen, im Aufrisse aber, um die Verzeichnung neuer Kurven zu vermeiden, durch ein Annäherungsverfahren ersetzt. Zieht man hier schätzungsweise eine gemeinschaftliche Tangente, welche die beiden Asymptoten in dem erreichbaren Punkte $F$ und in dem unerreichbaren $K$ treffe, so muß (vergl. d. Fig.) $M''F \cdot M''K = M''H^2$ (I, 379), oder, wenn $n$ eine passende ganze Zahl, in unserem Falle 4, $n \cdot M''F \cdot \frac{1}{n} M''K = M''H^2 = M''J^2 (M''J \perp M''H)$. Macht man $M''F_1 = n \cdot M''F = 4M''F$, so ergibt sich durch $\sphericalangle F_1JK_1 = 90^0$ der Punkt $K_1$ und $M''K_1 = \frac{1}{n} M''K = \frac{1}{4} M''K$. Zieht man dann $K_1K_2$ parallel zur Asymptote $M''F$ und macht $K_1K_2 = \frac{n-1}{n} M''F = \frac{3}{4} M''F$, so müßte $K_2$ ein Punkt der angenähert gezeichneten Tangente sein, und diese kann daher, ohne große Änderung von $F$, eine Verbesserung erfahren. Der ebenfalls unerreichbare Berührungspunkt $D_1$ dieser Tangente ist die Mitte von $FK$; sein Abstand von $a''$ ist daher Abst. $D_1 = \frac{1}{2}$ (Abst. $K$ + Abst. $F$) $= \frac{n}{2}$ Abst. $K_1 + \frac{1}{2}$ Abst. $F$. Verkleinert man nun den Grundriß aus $M'$ als Ähnlichkeitspunkt auf $\frac{1}{n}$ $\left(\text{hier } \frac{1}{4}\right)$ seiner Größe, wodurch aus $g'$ die zu ihr Parallele $g_1'$ wird, schneidet $g_1'$ mit einem Kreise aus $M'$, dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{n}$ Abst. $D_1 = \frac{1}{2}$ Abst. $K_1 + \frac{1}{2n}$ Abst. $F = \frac{1}{2}$ Abst. $K_1 + \frac{1}{8}$ Abst. $F$ ist, und bestimmt unter den beiden Schnittpunkten den $D_2$ nach der gegebenen Regel, so liegt $R'$ auf $M'D_2$ und auf dem Parallelkreise des $R_1$. Entsprechend wird mit $n = 6$ der Punkt $S$ bestimmt, und dann $r_1 \perp M'R'$ und $s_1 \perp M'S'$ gezogen.

**190.** Liegt die Gerade $g$ im Unendlichen und ist durch eine Ebene **G** gegeben, so wird auch verlangt, an eine Fläche **F** eine Berührungsebene parallel zu **G** zu legen. Die beiden aus Punkten von $g$ der **F** umschriebenen Kegel werden dann zu Cylindern, welche der **F** bezw. parallel mit zweien nicht unter einander parallelen Geraden der **G** umschrieben werden. — Ist **F** eine Umdrehungsfläche, so liegen die Berührungspunkte auf dem Meridiane, dessen Ebene $\perp$ **G** steht, und die Meridiantangenten in ihnen sind parallel mit der Schnittgeraden dieser Meridianebene mit der **G**. — Ist **F** ein einschaliges Umdrehungshyperboloid, so liegen in den Berührungsebenen die zu **G** parallelen Erzeugenden, und diese laufen parallel zu den Schnittgeraden des Asymptotenkegels mit einer durch seine Spitze parallel zu **G** gelegten Ebene.

## V. Abschnitt.

### Die Beleuchtung krummer Flächen im allgemeinen, und die des Cylinders, des Kegels und der Umdrehungsfläche im besonderen.

#### I. Allgemeines.

**191.** Die Helligkeit $H$ einer matten Körperoberfläche an irgend einer Stelle bei Parallelbeleuchtung fanden wir in I, 483 (5)

$$H = L' \cos \varepsilon A,$$

worin $\varepsilon$ den Einfallswinkel des Lichtstrahles (Winkel mit der Flächennormale) an jener Stelle, $L'$ die Stärke des Lichtes und $A$ das Rückstrahlungsvermögen der Oberfläche bedeuten. Dabei war das Lambertsche Gesetz vorausgesetzt, wonach eine Stelle einer matten Körperoberfläche bei einer bestimmten Beleuchtung gleich hell erscheint, von welcher Seite man sie auch betrachten mag. Dieses Gesetz entspricht, wie wir sahen (I, 481), nur annäherungsweise der Wirklichkeit. Insbesondere zeigen sich bei mattem Gipse, bei welchem unter mittleren Ein- und Ausfallswinkeln im allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit diesem Gesetze stattfindet, hauptsächlich zwei Abweichungen, eine an dem Glanzpunkte und eine am Umrisse. Der *Glanzpunkt* ist derjenige Punkt der Fläche, an welchem sich das Spiegelbild der Lichtquelle zeigen würde, wenn die Fläche spiegelnd wäre; es ist also der Punkt, an dem die Flächennormale den Winkel des Licht- und des Sehstrahles halbirt. An diesem Glanzpunkte tritt nun eine Verstärkung der Helligkeit ein, die bei großem Einfallswinkel sehr bedeutend ist und das Ansehen einer Glanzstelle hervorbringt, während sie bei Winkeln von weniger als 35° fast verschwindet. Da wir nun, entsprechend der gewöhnlichen Annahme, den Projektionen des Lichtstrahles eine Neigung von 45° gegen die Projektionsaxe geben werden, und da hierbei der Lichtstrahl einen Winkel von 54° 44′ (dessen Tangente $= \sqrt{2}$ ist) mit den Sehstrahlen bilden, so ist der Einfallswinkel 27° 22′, also die Spiegelung fast unmerklich. Andererseits tritt in der Nähe des Umrisses vorwiegend eine Verminderung der Helligkeit ein, die

auf der Seite des Lichtes am größten ist, während auf der entgegengesetzten Seite, der der Spiegelung, bei großen Einfallswinkeln eine Verstärkung und zwar eine recht bedeutende stattfindet. Im ersteren Falle, der bei unserer Annahme allein vorkommt, kann in der Nähe des Umrisses, wo der Ausfallswinkel 90° ist, eine Verdunkelung bis auf 0,6 der nach dem Lambertschen Gesetze herrschenden Helligkeit eintreten. Dieselbe erstreckt sich mit allmählicher Abnahme bis zu den Punkten mit einem Ausfallswinkel von 75°, so daß dieser verdunkelte Streif bei der Kugelabbildung eine Breite von $\frac{1}{30}$ ihres Halbmessers (1 — sin 75°) einnimmt, also nur schwach merklich ist.

Wir begehen also bei Gips unter der angeführten Annahme des Lichtstrahles bei Befolgung des Lambertschen Gesetzes keine erheblichen Fehler, und werden auch für viele andere Körper, deren verschiedenartiges Verhalten gegen das Licht wir nur sehr oberflächlich kennen, mit guter Annäherung dieses auch durch seine große Einfachheit so zweckmäßige Gesetz anwenden.

Wir wollen in der Folge nur eine Art von Oberflächenbeschaffenheit voraussetzen. Dann ist $L'A$ unveränderlich; und indem wir es $= 1$ setzen, nehmen wir die Helligkeit dieser Oberfläche bei senkrechter Beleuchtung als Helligkeitseinheit an. Wir erhalten dann

$$H = \cos \varepsilon .$$

**192.** Um auf der Abbildung einer Fläche in richtiger Weise die Helligkeit darstellen zu können, zeichnet man auf dieselbe zunächst *Linien von gleicher Helligkeit*, das sind Linien, in deren Punkten dieselbe Helligkeit herrscht, also $\cos \varepsilon$ (und $\varepsilon$) unveränderlich ist. Diese Linien heißen auch *Isophoten* (ἴσος, gleich; φῶς, das Licht); wir wollen sie *Lichtgleichen* nennen. Zu ihnen gehört die *Eigenschattengrenze*, für welche $\varepsilon = 90°$, $\cos \varepsilon = 0$ ist; sie heißt auch die *Grenzisophote* oder *Grenzlichtgleiche*. Man legt Lichtgleichen von unveränderlichem Helligkeitsunterschiede, der gewöhnlich $= 0{,}1$ angenommen wird, so daß in den Lichtgleichen die Helligkeiten 0; 0,1; 0,2 . . . 0,9; 1 herrschen. Diese Zahlenreihe der Helligkeiten heißt die *zehnstufige Stärkereihe* oder Intensitätsskala. Die entsprechenden Lichtgleichen bezeichnet man abgekürzt mit 0, 1, 2 . . . 9, 1.. Wir werden uns hier mit der Hälfte derselben begnügen.

Legt man nun die Streifen des beleuchteten Teiles zwischen den auf einander folgenden Lichtgleichen nach den Regeln von I, 496 mit Tuschlagen an, so erhält man ein gutes Bild dieses Teiles der Fläche. Will man noch die Beleuchtung durch die Luft und durch den Reflex von anderen Körpern berücksichtigen, so könnte man

dies in der Weise von I, 500 für eine Anzahl von Punkten ausführen, wodurch sich veränderte Lichtgleichen ergeben würden. Wir gehen hierauf nicht ein, bemerken aber, daß die Bestimmung der Helligkeit im Schatten auf diese Weise durch Rechnung oder durch Schätzung geschehen muß. Die gewöhnlich für den Eigenschatten gemachte Annahme, daß er durch den sog. atmosphärischen Strahl, der dem Sonnenstrahle gerade entgegengesetzt angenommen wird, beleuchtet werde, ist nach I, 488 ganz zu verwerfen; die dabei benutzten Lichtgleichen auf dem Schattenteile der Fläche haben in Bezug auf dessen Helligkeit keine Bedeutung.

Geometrisch betrachtet, *liegen die Lichtgleichen, als Linien von unveränderlichem Einfallswinkel* $\varepsilon$, *auf beiden Seiten der Eigenschattengrenze.* Physisch haben immer nur die Linien im beleuchteten Flächenteile Bedeutung, also die einerseits oder die andererseits der Eigenschattengrenze liegenden, je nachdem die Körpermasse auf der einen oder auf der anderen Seite der Oberfläche liegt, z. B. bei der Kugelfläche, je nachdem es sich um eine Vollkugel oder um eine geöffnete Hohlkugel handelt.

Wir werden beiderlei Kurven bestimmen, sie auf den verschiedenen Seiten der Fläche liegend denken und die einen, wie gebräuchlich, mit +, die anderen mit — bezeichnen.

Es sei noch bemerkt, daß der Verfasser die Linien gleicher Helligkeit für eine Gipskugel nach seinen über den Gips angestellten Beobachtungen konstruirt hat, die er auch später mit den Ergebnissen über die Beleuchtung durch die Luft und den Bodenreflex zu veröffentlichen gedenkt; daß er aber bei der gemachten Annahme des Lichtstrahles nur kleine, immerhin aber bemerkbare Abweichungen von den nach dem Lambertschen Gesetze bestimmten Lichtgleichen erhalten hat.

**193.** *Zur Bestimmung von Punkten der Lichtgleichen einer gegebenen Fläche* F wendet man das Verfahren der Berührungsebenen und das der Normalen an.

1) *Das Verfahren der Berührungsebenen.* Alle durch einen Punkt gelegten Ebenen von unveränderlichem Einfallswinkel $\varepsilon$ eines Lichtstrahles werden von einem Umdrehungskegel eingehüllt, dessen Axe ein Lichtstrahl ist, dessen Erzeugende mit diesem Lichtstrahle den Winkel $90^0 - \varepsilon$ bilden, und welcher der *Tangentialkegel* heißen soll. Ein solcher Kegel würde eine gleichförmige Helligkeit $= \cos \varepsilon$ besitzen. Jeder Punkt der F, in welchem ihre Berührungsebene parallel zu einer Berührungsebene jenes Kegels ist, bildet einen Punkt der Linie von der Helligkeit $\cos \varepsilon$. Man kann solche Punkte auf einer beliebigen Linie der F finden, wenn man in Punkten derselben die

Berührungsebenen der F legt, parallele Ebenen zu denselben durch die Spitze des Tangentialkegels führt, einen zweiten Kegel bildet, welcher sie einhüllt, und für beide (koncentrische) Kegel die gemeinschaftlichen Berührungsebenen bestimmt. Trägt man diese Ebenen durch Parallelverschiebung an die F zurück und ermittelt ihre Berührungspunkte (im allgemeinen durch Einschaltung), so sind dies die gesuchten Punkte auf der gewählten Linie.

2) *Das Verfahren der Normalen.* Alle durch einen Punkt unter dem Winkel $\varepsilon$ gegen den Lichtstrahl gelegten Geraden bilden einen Umdrehungskegel, dessen Axe ein Lichtstrahl ist, und welcher *Normalkegel* heißen soll. Die Punkte der F, in denen ihre Normalen parallel mit Erzeugenden jenes Kegels laufen, sind Punkte der Linie von der Helligkeit $\cos \varepsilon$. Man kann die Punkte auf einer beliebigen Linie der F finden, wenn man in Punkten derselben die Normalen der Fläche zieht, Parallele mit denselben durch die Spitze des Normalkegels legt, durch sie einen zweiten Kegel führt, und beide (koncentrische) Kegel zum Schnitte bringt. Trägt man die Schnitterzeugenden durch Parallelverschiebung an die F zurück, so sind ihre Fußpunkte (die im allgemeinen durch Einschaltung ermittelt werden) die gesuchten Punkte auf der gewählten Linie. Zur Bestimmung des Schnittes beider Kegel wendet man gewöhnlich am zweckmäßigsten eine zu ihnen koncentrische *Kugel* an; und da diese bei vielen Konstruktionen eine hervorragende Rolle spielt, so gewinnen wir die größte Anschaulichkeit, wenn wir zunächst für sie die Lichtgleichen bestimmen.

## II. Die Beleuchtung der Kugel, des Cylinders und des Kegels.

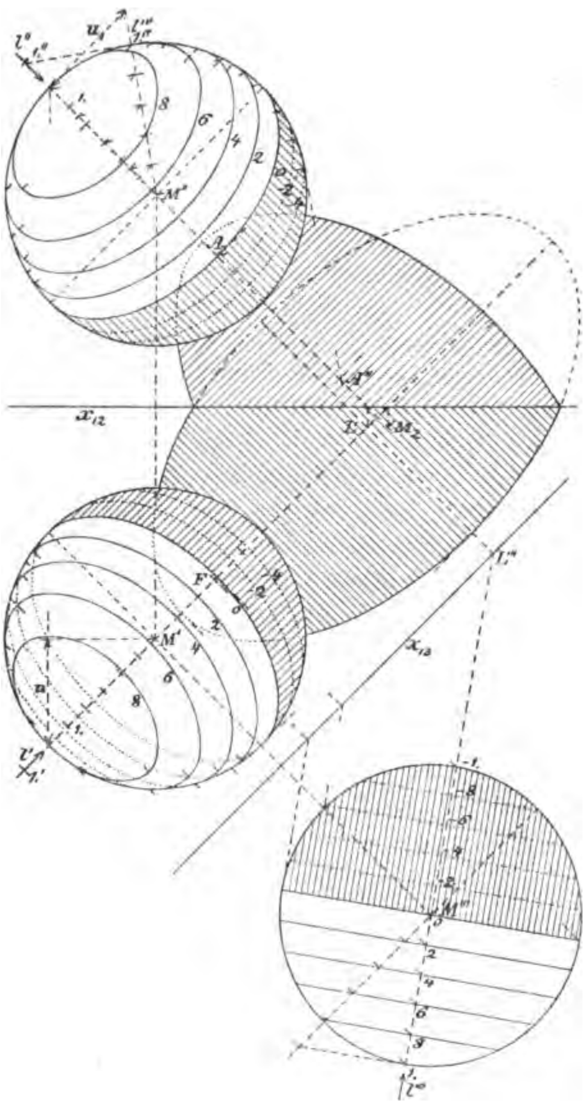
**194.** *Aufg. Die Lichtgleichen einer Kugel zu verzeichnen.* Fig. 90.

*Aufl.* Bestimmen wir die Linien von den Helligkeiten 0; 0,2; 0,4 . . . 1, und bezeichnen sie mit 0, 2, 4 . . . 1., — 2, — 4 . . . — 1..

Sei $M$ der Mittelpunkt der Kugel, $l$ ($l'$, $l''$) der durch $M$ gehende Lichtstrahl, so bildet man die Projektion auf eine zu $P_1$ senkrechte, mit $l$ parallele dritte Ebene $P_3$, und erhält vermittelst der ersten Spur $L$ von $l$ die dritte Projektion $M'''L''' = l'''$ von $l$. Die Schnittpunkt 1. und — 1. von $l'''$ mit dem dritten Umriß der Kugel bezeichnen die hellsten Punkte der positiven und negativen Flächenseite der Kugel von der Helligkeit 1. Teilt man nun die beiden Halbmesser $M'''$ 1. und $M'''$ — 1. in je fünf gleiche Teile, und legt durch die Teilungspunkte 1., 8, 6 . . . — 6, — 8, — 1. Ebenen senkrecht zum Halbmesser $l$, so schneiden diese die Kugel in Parallelkreisen von den angegebenen Helligkeiten. Denn für die Punkte

dieser Kreise haben die Cosinus der Winkel der Normalen oder Kugelhalbmesser mit $l$ oder $M'''$ 1. jene Werte 0; 0,2 . . . 1. Die Lichtgleiche Null ist die Eigenschattengrenze. Ein Umdrehungskegel, welcher einen dieser Parallelkreise aus $M$ projicirt, ist ein Normalkegel; alle zusammen sollen das *Büschel der Normalkegel* heißen.

Fig. 90.



Die ersten *Projektionen der Lichtgleichen* sind Ellipsen, deren Mittelpunkte die Halbmesser $M'$ 1. und $M'$ — 1. in je fünf gleiche Teile teilen; ihre großen Axen sind $\perp l'$ und gleich den in der dritten Projektion gegebenen Kreisdurchmessern; ihre kleinen Axen liegen in $M'$ 1. und werden aus der dritten Projektion erhalten. Die Ellipsen sind ähnlich und ähnlich gelegen, so daß aus der kleinen Axe der Grenzlichtgleiche diejenigen der anderen gefunden werden können, da die Sehnen, welche zwei benachbarte entsprechende Scheitel verbinden, bei allen parallel sind.

Die zweiten Projektionen der Lichtgleichen werden am kürzesten

und genauesten unmittelbar konstruirt, ohne Benutzung ihrer ersten Projektionen, woraus zugleich ersichtlich, daß die dritte Projektion nur der Erklärung halber gezeichnet wurde. Legt man die zweite projicirende Ebene von $l$ in eine parallel zu $P_2$ durch $M$ gelegte Ebene um, so gelangen $l$ und der in jener Ebene liegende größte Kugelkreis nach $l^{IV}$ und in den Kugelumriß, wobei zur Bestimmung von $l^{IV}$ die $u_1 \perp l''$ und berührend an den zweiten Kugelumriß gleich der $u$ der ersten Projektion gemacht wird. Den Kugelhalbmesser $M''\,1.^{IV}$ auf $l^{IV}$ teilt man nun in fünf gleiche Teile und zieht durch die Teilungspunkte Senkrechte zu $l''$, so enthalten diese die großen Axen der zweiten Projektionen der Lichtgleichen. Ihre halben Längen erhält man durch die aus den Teilungspunkten von $M''\,1.^{IV} \perp l^{IV}$ bis zum Kugelumriß gezogenen Geraden, die kleinen Axen auf $M''$ 1. durch die aus den gewonnenen Punkten des Kugelumrisses auf $l''$ gefällten Senkrechten. Die negativen Lichtgleichen werden durch Fortsetzung der Teilung kongruent mit den positiven gezeichnet. Ist die erste Projektion schon ausgeführt, so bestimme man in der zweiten nur $l^{IV}$, $1.^{IV}$, 1., teile $M''$ 1. in fünf gleiche Teile, mache die großen Axen der Ellipsen gleich denen im Grundriß, die kleine Halbaxe der Grenzlichtgleiche $=$ 1. $1.^{IV}$ (wegen eines rechten Winkels bei $M''$), und bestimme die anderen kleinen Axen aus der Ähnlichkeit. Bilden, wie in der Figur, $l'$ und $l''$ $45^0$ mit $x$, so sind Grund- und Aufriß kongruent.

*Die Lichtgleichenpunkte auf den Kugelumrissen* erhält man durch die Schnittlinien der Ebenen der Lichtgleichen mit der Ebene des Umrisses; die Schnittlinien bilden eine Schaar paralleler Geraden von gleichförmigem Abstande. Schneidet man z. B. in der zweiten Projektion die durch $1.^{IV} \perp l^{IV}$ gelegte Gerade mit $M''$1. in 1.'', teilt $M''$ 1.'' in fünf gleiche Teile und trägt die Teilung über $M''$ weiter, zieht durch die Teilungspunkte Gerade $\perp l''$, so bilden diese jene Schaar und schneiden auf dem zweiten Umrisse die Lichtgleichenpunkte ein.

Der *Schlagschatten der Kugel* auf $P_1$ ist mittelst der dritten Projektion bestimmt, und es sei nur bemerkt, daß die Schatten der Endpunkte des auf $P_1$ senkrechten Kugeldurchmessers (wie $F$) die Brennpunkte der Schattenellipse bilden. Denn der der Kugel umschriebene Lichtstrahlencylinder ist ein Umdrehungscylinder, sein Schnitt mit einer zu $P_1$ parallelen, die Kugel in einem Endpunkte des auf $P_1$ senkrechten Durchmessers berührenden Ebene ist eine Ellipse, deren einen Brennpunkt der Berührungspunkt mit der Kugel bildet (I, 329), und der Schlagschatten der Kugel ist auch derjenige dieser Ellipse. — Der Schlagschatten auf $P_2$ ist eine Ellipse, deren

große Axe $M_2 A_2 = M'' A''$, wenn durch den Punkt $A''$ der $l''$ eine zu $l^{IV}$ parallele Tangente des Umrisses geht.

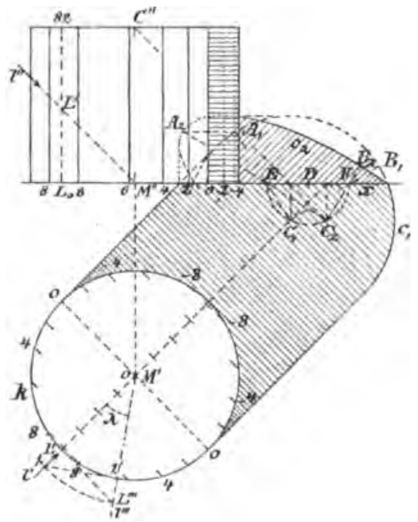
**195.** *Die Lichtgleichen von abwickelbaren Flächen sind geradlinige Erzeugende,* weil entlang einer solchen die Fläche von ein und derselben Ebene berührt wird. Es kommt also nur auf die Bestimmung der Lichtgleichenpunkte auf einer passend gewählten Kurve der Fläche an.

*Die Lichtgleichen eines Cylinders sind Erzeugende desselben.*

*Aufg. Die Lichtgleichen eines auf* $\mathbf{P}_1$ *senkrecht stehenden geraden Kreiscylinders zu bestimmen.*

Fig. 91. *Aufl.* Man denke sich eine den Cylinder entlang seines Grundkreises $k$ berührende Kugel (mit dem Mittelpunkte $M$), so sind die Lichtgleichenpunkte der Kugel auf jenem Kreise auch die des Cylinders. Legt man entsprechend dem Verfahren der vor. Nr. die erste projicirende Ebene des durch $M$ gehenden Lichtstrahls in $\mathbf{P}_1$ um, so daß $l$ nach $l'''$ ($L'L''' = L^0 L''$) und der größte Kugelkreis in den Grundkreis des Cylinders gelangt, so wird dieser Kreis von $l'''$ in 1.′ geschnitten; die Senkrechte zu $l'''$ durch 1.′ gelegt, bestimmt auf $l'$ den Punkt 1., wobei $M'1. = M'L'''$; die Teilung von $M'1.$ in fünf gleiche Teile und ihre Fortsetzung über $M'$ liefert vermittelst der durch die Teilungspunkte geführten Senkrechten zu $l'$ die Lichtgleichenpunkte auf dem Grundkreise, durch welche dann die Erzeugenden als Lichtgleichen gezogen werden. Die hellste Erzeugende (gestrichelt) besitzt die Helligkeit 0,82 (in der Figur mit 82 bezeichnet); man kann auch von jeder beliebigen Erzeugenden die Helligkeit leicht rückwärts auf dem Maßstabe 1. — 1. bestimmen.

Fig. 91.

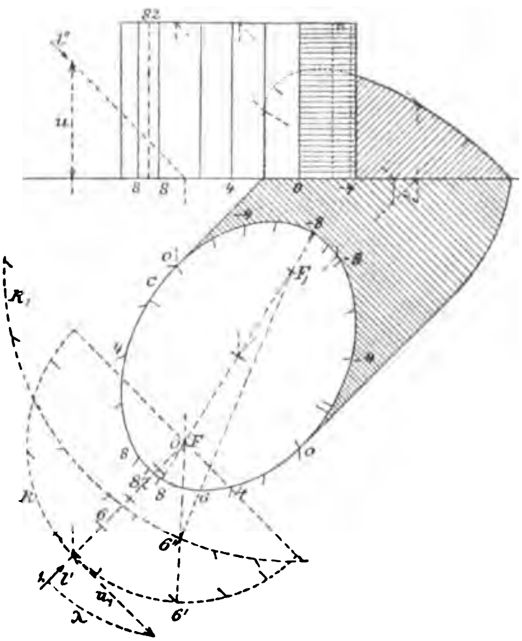



Der *Schlagschatten* $c_1$ des oberen Grenzkreises auf $\mathbf{P}_1$ ist ein ihm gleicher Kreis mit dem Mittelpunkte $C_1$, der Schlagschatten $c_2$ auf $\mathbf{P}_2$ eine Ellipse mit dem Mittelpunkte $C_2$. $c_1$ und $c_2$ sind affin mit $x$ als Axe und $C_1 C_2$ als Strahl der Affinität, der, für $\sphericalangle x l' = \sphericalangle x l''$, $\parallel x$ ist. Um die Axen von $c_2$ zu bestimmen, legt man (I, 377, 1)) aus einem Punkte ($D$) der $x$ durch $C_1$ und $C_2$ einen Kreis, schneidet ihn

mit $x$ in $E$ und $F$, so liegen in $C_2E$ und $C_2F$ die Axen von $c_2$, deren Endpunkte $A_2$, $B_2$ aus den entsprechenden Endpunkten $A_1$, $B_1$ der Durchmesser $C_1E$, $C_1F$ des Kreises $c_1$ durch Affinitätsstrahlen $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$ ($\perp x$) gefunden werden.

**196.** Wir nennen mit *Burmester**) die geteilte Linie $M'$ 1. die Intensitätsskala oder den *Stärkemaßstab*, die Länge $M'$ 1. die *Einheit* des Stärkemaßstabes, das Strahlenbüschel, welches die Lichtgleichenpunkte des *Grundkreises* aus $M'$ projicirt, das *Normalbüschel*, und das Strahlenbüschel, welches aus ihm durch Drehung in seiner Ebene um 90° entsteht, das *Tangentialbüschel*, weil ihre Strahlen bezw. mit den Normalen und Tangenten der Spur des Cylinders in den bestimmten Lichtgleichenpunkten parallel sind. Der Winkel $\lambda = 1.\,M'\,1.'$ ist der *Neigungswinkel* des Lichtstrahles gegen die Ebene des senkrechten Schnittes des Cylinders, und es ist die *Einheit des Stärkemaßstabes* $M'\,1. = M'L''' = \sec\lambda$, wenn der Halbmesser des Grundkreises $= 1$. Wir nennen die Projektion des Lichtstrahles auf die Ebene der Strahlenbüschel, also $M'L' = l'$ den *Grundstrahl*, den nach dem Nullpunkt der Kreisteilung gehenden Strahl $M'0$ den *Nullstrahl*; derselbe steht bei dem Normalbüschel senkrecht auf dem Grundstrahle und fällt bei dem Tangentialbüschel in denselben. Der Winkel $l'l = \lambda$ des Lichtstrahles mit der Ebene des Büschels heiße der *Grund-* oder *Modelwinkel* des Büschels; $\cos\lambda$ ist die größte in den Büscheln enthaltene Helligkeit. In unserem Falle bei $\sphericalangle xl' = \sphericalangle xl'' = 45°$ ist $\operatorname{tg}\lambda = \sqrt{1/2}$, $\lambda = 35°\,16'$, $\cos\lambda = 0{,}82$, $\sec\lambda = 1{,}22$, die Helligkeit der Projektionsebene $= \sin\lambda = 0{,}61$, und endlich der Abstand des in der

Fig. 92.



*) *Burmester*, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, 1871, S. 24.

Zeichnung unsicheren Punktes 8 des Grundkreises $k$ vom Grundstrahle $l'$ ist $= 0{,}2$, da $0{,}8 \,.\, 1{,}22 = 0{,}98$ und $0{,}98^2 + 0{,}2^2 = 1$.

Man bemerkt, daß das Normal- und das Tangentialbüschel involutorisch sind und den Grund- und Nullstrahl zu Doppelstrahlen haben.

Fig. 92. **197.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines auf* $\mathbf{P}_1$ *senkrecht stehenden elliptischen Cylinders zu bestimmen.*

*Aufl.* Die Lichtgleichenpunkte auf der Grundellipse $c$ sind die Fußpunkte von deren zu den Strahlen des Normalbüschels parallelen Normalen. Zu ihrer Bestimmung konstruire man aus einem Brennpunkte $F$ der Grundellipse $c$ mittels eines aus $F$ gezogenen Kreises $k$ und dem Grundwinkel $\lambda$ das Normalbüschel, schneide seine Strahlen mit dem aus dem anderen Brennpunkte $F_1$ mit der großen Axe der Ellipse als Halbmesser gezogenen Kreise $k_1$ (z. B. $F6'$ in $6''$), so schneiden die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte mit $F_1$ (so $F_1 6''$) auf der Ellipse $c$ die gesuchten Punkte (6) ein (I, 222), durch welche dann die Lichtgleichen gezogen werden.

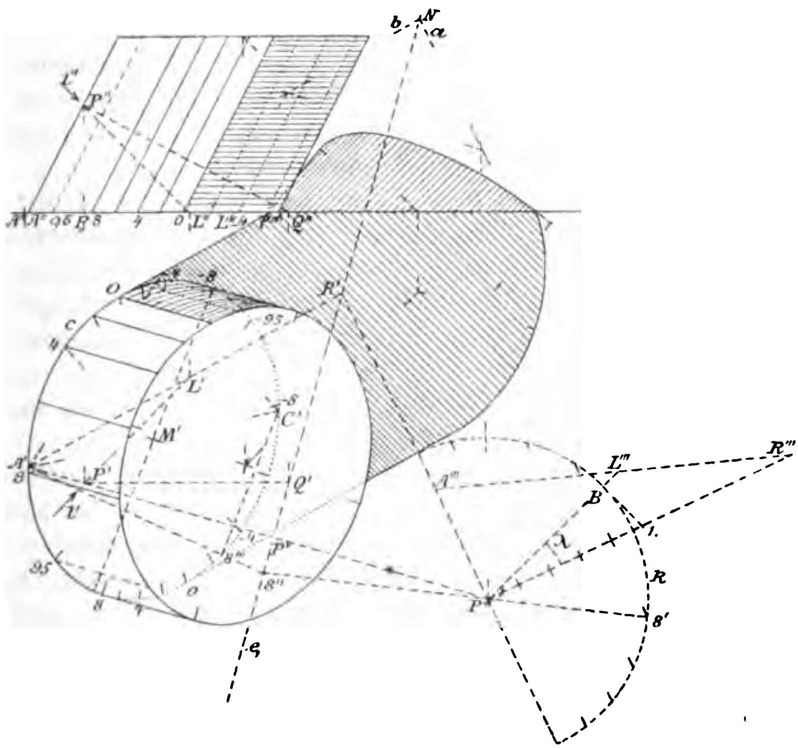
**198.** *Die Lichtgleichen eines auf* $\mathbf{P}_1$ *schief aufstehenden elliptischen Cylinders zu bestimmen.* Fig. 93.

*Aufl.* Eine zu den Erzeugenden des Cylinders senkrechte Ebene $\mathbf{E}$ vertritt die Stelle der $\mathbf{P}_1$ in der vorigen Aufgabe. Man projicire daher den Lichtstahl $l$ auf $\mathbf{E}$, bestimme seine Neigung $\lambda$ gegen $\mathbf{E}$, so kann man in $\mathbf{E}$ das Normal- oder das Tangentialbüschel angeben, und mittelst desselben die Lichtgleichenpunkte auf der Schnittkurve der $\mathbf{E}$ mit dem Cylinder ermitteln. Um aber die Verzeichnung dieser Schnittkurve zu vermeiden, projicire man das Tangentialbüschel durch Parallele mit den Erzeugenden auf die $\mathbf{P}_1$, oder auf die Ebene, in welcher die Leitlinie des Cylinders gegeben ist, und bestimme auf ihr mittelst dieser Projektion des Büschels die Lichtgleichenpunkte. Das Normalbüschel dagegen verliert durch Projektion seine bezeichnende Eigenschaft, da die Projektionen der Normalen einer Kurve im allgemeinen nicht wieder Normale der Projektion der Kurve sind.

Legt man durch einen Punkt $P$ einer Erzeugenden $AP$ die Ebene $\mathbf{E}$, so erhält man einen Punkt $Q$ ihrer ersten Spur $e_1$ als erste Spur der $PQ$, welche $\perp A''P''$ und $\parallel P_2$ gezogen wird; $e_1$ zeichnet man dann durch $Q' \perp A'P'$. Die erste Spur des durch $P$ gehenden Lichtstrahles $l$ ist $L'$. Die den Strahl $l$ auf die $\mathbf{E}$ senkrecht projicirende Ebene enthält die $AP$ und hat zur ersten Spur $A'L'$, welche die $e_1$ in $R'$ trifft; die Projektion ist daher $PR$ (nicht gezeichnet). Legt man $\mathbf{E}$ um $e_1$ in $\mathbf{P}_1$ um, so gelangt $P$ nach $P'''$ ($P'P^{V}P''' \perp e_1$, $P_0P^{IV} = P'P^{V}$, $P^{V}P''' = P^{IV}P''$) und $PR$ nach $P'''R'$. $P'''R'$ wäre für das umgelegte Normalbüschel der Träger

des Stärkemaßstabes, für das umgelegte Tangentialbüschel ist dies daher die auf $P'''R'$ Senkrechte $P'''R'''$, und der Neigungswinkel $\lambda$ von $l$ gegen **E** ist in dem Dreiecke $RPL$ bei $P$ enthalten; man trägt ihn gegen $P'''R'''$ an, indem man $P'''R''' = PR = P'''R'$, $P'''L''' = PL = P'L^{IV}$ $(P_0L^{IV} = P'L')$ und $R'''L''' = RL = R'L'$ macht. Ist der Winkel des Dreiecks bei $L'''$ von 0 oder $180^0$ nicht sehr verschieden, so überträgt man erst das rechtwinklige Dreieck $RPA$ nach $R'''P'''A'''$ $(P'''A''' = P''A^{IV}$, $P_0A^{IV} = P'A')$, und macht dann auf $R'''A'''$ die $R'''L''' = R'L'$. Trägt man dann von $P'''$ gegen $R'''$ fünf gleiche Teile von willkürlicher abèr passender Länge

Fig. 93.



bis zu 1. weiter, fällt $1.B \perp P'''L'''$, beschreibt aus $P'''$ durch $B$ den Kreis $k$, so wird auf ihm das Tangential-, wie früher das Normalbüschel bestimmt.

Bei dem Zurückdrehen des Büschels um $e_1$ in **E** gelangt $P'''$ wieder nach $P$, und bei dem Projiciren in $\mathbf{P}_1$ in der Richtung der Cylindererzeugenden projicirt sich $P$ nach $A'$, während die Schnittpunkte der Strahlen mit $e_1$ an ihrer Stelle bleiben. Mit den Strahlen dieses Büschels $A'$ muß man dann parallele Tangenten an die Leit-

ellipse $c$ des Cylinders in $P_1$ gezogen denken und deren Berührungspunkte bestimmen, was durch das Büschel $M'$ der zu den Strahlen konjugirten Durchmesser geschieht. Dieses Büschel $M'$ ist aber parallel zu dem Büschel $C'$ der zu den von $A'$ ausgehenden Strahlen konjugirten Sehnen; wobei $A'M'C'$ ein Durchmesser von $c$ ist. Die Konstruktion ist also diese: Man schneide einen Strahl $P'''8'$ des Büschels $P'''$ mit $e_1$ in $8''$, ziehe die $A'8''$, schneide sie mit $c$ in $8'''$, lege nach $C'8'''$ an, und ziehe damit die Parallele $M'8$, so schneidet diese die $c$ in den Lichtgleichenpunkten $\pm 8$. Die hellste Erzeugende besitzt in unserem Beispiele die Helligkeit 0,95. Tritt eine Unsicherheit in der Lage der konjugirten Sehnen ein, so benutze man statt $A'C'$ einen anderen Durchmesser der $c$; fallen die Punkte auf $e_1$ außerhalb der Zeichenfläche, so benutze man ein passendes Paar entsprechender Geraden in den affinen ebenen Systemen der Büschel $P'''$ und $A'$, welche sich auf $e_1$ schneiden, wie z. B. die aus $N$ bezw. zu $R'P'''$ und $R'A'$ gezogenen Parallelen $a$ und $b$, mit denen zwei Punkte $\pm 4$ konstruirt wurden.

Man kann auch das Tangentialbüschel für $c$ mit $M'$ als Mittelpunkt konstruiren; das Büschel der konjugirten Durchmesser bestimmt dann die Lichtgleichenpunkte auf $c$; dasselbe wird auf einem durch $M'$ gelegten Kreise vermittelst der Involution hergeleitet (I, 348). — Man kann ferner zu den Strahlen von $A'$ Senkrechte aus einem Brennpunkte von $c$ ziehen; sie bilden das Normalbüschel für $c$, aus dem man nach der vor. Nr. die Punkte erhält. Das oben angegebene Verfahren dürfte etwas kürzer, als diese sein.

Von dem Schatten der oberen Grenzellipse auf $P_2$ sind zwei konjugirte Durchmesser bestimmt, als Schatten der von den Lichtgleichen 0 und 95 begrenzten Durchmesser; aus ihnen kann man dann die Axen der Schattenellipse herleiten, die in unserer Figur zufällig in jene konjugirten Durchmesser hineinfallen.

**199.** *Übungsaufgaben.*

1) Auf einem geraden Kreiscylinder, der schief gegen jede Projektionsebene steht, die Lichtgleichen zu bestimmen.

2) Auf einem Cylinder die Lichtgleichen zu bestimmen, dessen senkrechter Schnitt a) eine Kreisevolvente, b) eine Evolvente oder Evolute oder Äquidistante einer Ellipse, c) eine gemeine Cykloide oder eine Epi- oder Hypocykloide, d) eine Sinuslinie ist, mag der Cylinder senkrecht auf $P_1$ oder geneigt gegen beide Projektionsebenen stehen. — Es muß für alle diese Kurven die Aufgabe gelöst werden, ihren Berührungspunkt mit einer zu einer gegebenen Geraden parallelen Tangente zu konstruiren.

**200.** Die *Lichtgleichen eines Kegels sind Erzeugende desselben*

und lassen sich bei Umdrehungskegeln mittelst eines Stärkemaßstabes, bei anderen Kegeln aber mittelst der Tangentialkegel (193) finden. Letztere bestimmt man nach der angenommenen Stärkereihe, indem man durch die Spitze $S$ des gegebenen Kegels einen Lichtstrahl $l$ zieht, durch $l$ eine Ebene legt und in dieser aus $S$ das Tangentialbüschel für jene Reihe zeichnet; durch dessen Umdrehung um $l$ entsteht das *Büschel der Tangentialkegel.* Legt man nun an jeden dieser Kegel und an den (koncentrischen) gegebenen die gemeinschaftlichen Berührungsebenen, so sind deren Berührungserzeugende auf dem gegebenen Kegel die gesuchten Lichtgleichen. Um die gemeinschaftlichen Berührungsebenen zu bestimmen, schneide man eine auf dem Lichtstrahle senkrechte Ebene mit dem Kegelbüschel und mit dem gegebenen Kegel, wobei sich bezw. koncentrische Kreise und irgend eine Kurve ergeben werden, ziehe an diese und an die Kreise alle gemeinschaftlichen Tangenten, so sind die durch ihre Berührungspunkte auf der Kurve gehenden Erzeugenden des Kegels die gesuchten Lichtgleichen.

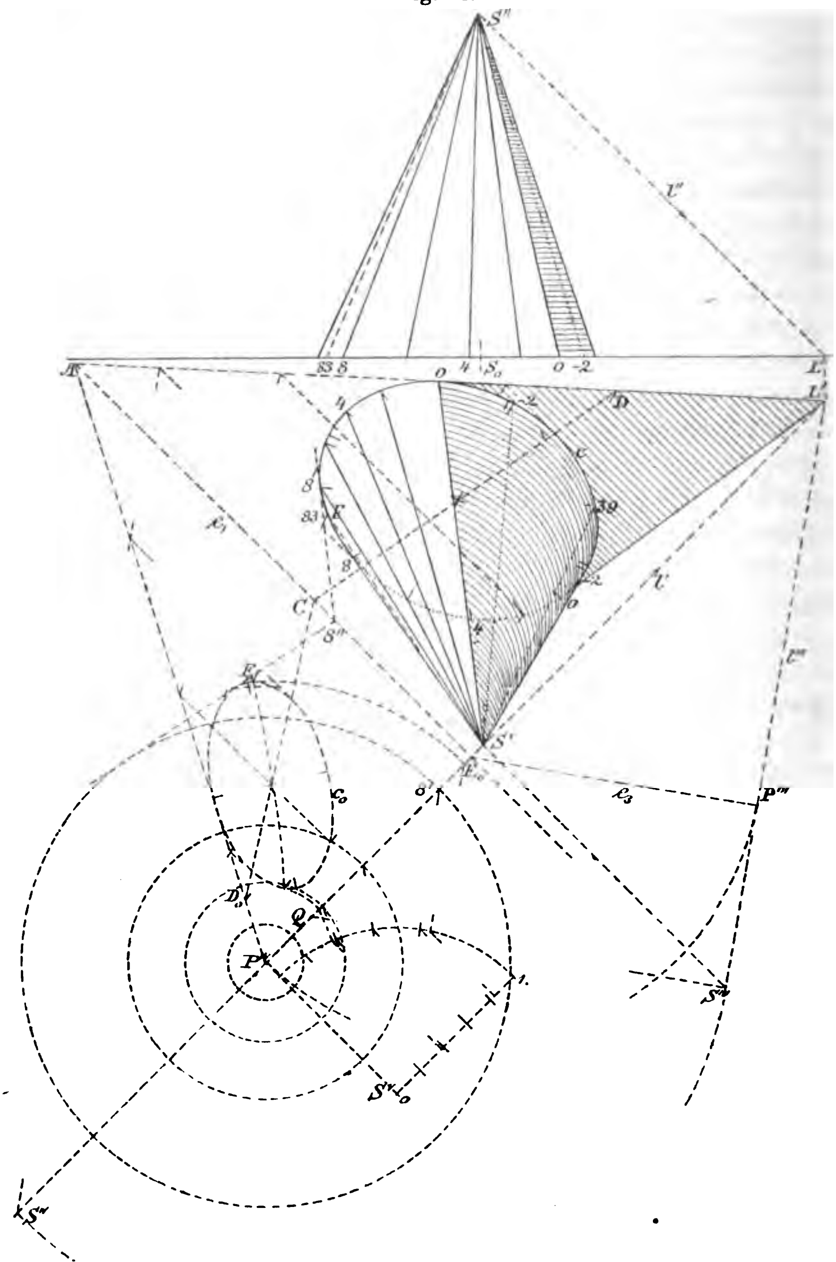
**201.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines auf die Grundrißebene aufgestellten elliptischen Kegels zu bestimmen.*

*Aufl.* Sei die Ellipse $c$ in $\mathbf{P}_1$ die Leitlinie, $S$ die Spitze des Fig. 94
Kegels. Der durch $S$ gelegte Lichtstrahl $l$ hat $L'$ zur ersten Spur und die Tangenten aus $L'$ an $c$ bestimmen durch ihre Berührungspunkte die Grenzlichtgleichen $0S$. Legt man die erste projicirende Ebene von $l$ um $l'$ in $\mathbf{P}_1$ um, so gelangt $l$ nach $l''' = S''' L'$, wenn $S'S''' \perp S'L'$ und $= S_0 S''$. Eine zu $l$ senkrechte Ebene $\mathbf{E}$ habe $e_1$ ($\perp l'$) zur ersten und $e_3$ ($\perp l'''$) zur dritten Spur, derart daß $e_1$ und $e_3$ sich in $E_0$ auf $l'$ treffen, und schneidet die $l$ in $P$, wobei $P'''$ der Schnittpunkt von $e_3$ und $l'''$. Die Tangentialkegel, aus $S$ um $l$ als Axe gelegt, schneiden die $\mathbf{E}$ in Kreisen, deren Mittelpunkt $P$ ist. Legt man $\mathbf{E}$ um $e_1$ in $\mathbf{P}_1$ um, so gelangt $P$ nach $P^{IV}$, und die auf $\mathbf{E}$ und nach der Umlegung auch auf $\mathbf{P}_1$ senkrechte Axe $PS$ der Tangentialkegel kann man dann um $l'$ in $P^{IV}S^{V}$ ($\perp l'$ und $= P'''S'''$) umlegen. Man zeichnet dann mit einer auf dem Lichtstrahle $S^{V}P^{IV}$ senkrechten Geraden $S^{V}1.$ als Stärkemaßstab 0 1. das Tangentialbüschel, und legt durch die Schnittpunkte seiner Strahlen mit $l'$ aus $P^{IV}$ jene koncentrischen Kreise.

Die Ebene $\mathbf{E}$ schneidet den Kegel in einem Kegelschnitte, der durch die Umlegung von $\mathbf{E}$ in $\mathbf{P}_1$ nach $c_0$ gelangt; $c_0$ liegt gegen $c$ perspektiv mit $e_1$ als Axe und $S^{IV}$ als Mittelpunkt der Kollineation. $S^{IV}$ ist aber aus $S$ entstanden durch Umlegung mit der durch $S$ parallel zu $\mathbf{E}$ geführten Ebene in $\mathbf{P}_1$ ($S''' Q \parallel e_3$, $Q$ auf $l'$, $QS^{IV} = QS'''$). Die $c_0$ wird als Kollineare von $c$ konstruirt, bequem mit

Zuhilfenahme der Tangente $L'0A$ von $c$ und deren Entsprechenden $P^{IV}A$, mittelst des zu $e_1$ konjugirten Durchmessers $CD$ der $c$, wel-

Fig. 94.



chem der Durchmesser $CD_0$ der $c_0$ entspricht, dessen konjugirter dann leicht aus $c$ erhalten wird, wie in der Figur angedeutet; aus

den konjugirten Durchmessern ist dann die Ellipse $c_0$ nach vorheriger Bestimmung der Axen (I, 377) verzeichnet worden.

Nun zieht man an die Kreise und an $c_0$ die gemeinschaftlichen Tangenten, bestimmt ihre Berührungspunkte auf $c_0$ und überträgt sie durch Strahlen aus $S^{IV}$ auf $c$; oder man schneidet jede Tangente mit $e_1$, zieht aus dem Schnittpunkte die entsprechende Tangente an $c$ und bestimmt deren Berührungspunkt. Letzteres ist in der Figur ausgeführt, und zwar wegen der größeren Ausdehnung der $c$ gegenüber $c_0$. So ist z. B. der Strahl $S^V 8'$ des Tangentialbüschels mit $l'$ in $8'$ geschnitten, an den durch $8'$ gelegten Kreis und an $c_0$ sind die gemeinschaftlichen Tangenten gezogen, deren eine die $e_1$ in $8''$ trifft, aus $8''$ ist die entsprechende Tangente an $c$ gelegt und deren Berührungspunkt 8 bestimmt. Diese Punkte liefern durch ihre Verbindungslinien mit $S$ im vorliegenden Falle zwei positive, dagegen keine negative Lichtgleichen.

Die aus $P^{IV}$ berührend an $c_0$ gezogenen Kreise bestimmen durch ihre Berührungspunkte die hellste positive und negative Lichtgleiche, deren Lichtstärkezahlen sich durch die rückwärts ausgeführte Konstruktion auf dem Stärkemaßstab als 0,83 und — 0,39 ergeben. Die Berührungspunkte werden am einfachsten durch eine Fehlerkurve bestimmt, welche durch die Mitten der von $c_0$ eingeschlossenen Bogen jener koncentrischen Kreise geht.

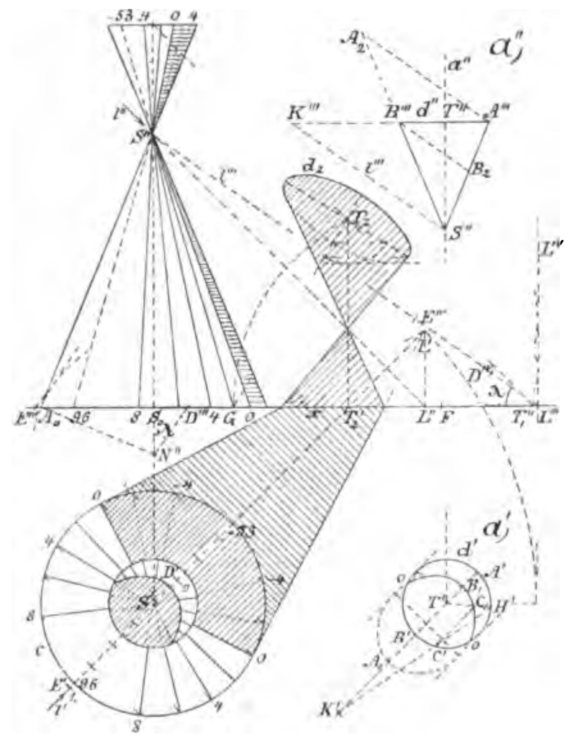
*Übungsaufg.* Man bestimme die Lichtgleichen auf einem Kegel, dessen Leitlinie, z. B. ein Kreis, in einer beliebigen Ebene gegeben ist.

**202.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines auf die Grundrißebene gerade aufgestellten Umdrehungskegels zu bestimmen.*

*Aufl.* Man lege, wie früher bei dem Umdrehungscylinder, eine Kugel, welche den Kegel nach dem Grundkreise berührt, bestimme auf ihr die Lichtgleichen nach der gewählten Stärkereihe, so schneiden diese den Grundkreis in Punkten der Lichtgleichen des Kegels von derselben Reihe. Der Mittelpunkt $N''$ der Kugel wird auf der Umdrehungsaxe $S'' S_0$ erhalten durch die aus dem Fußpunkte $A_0$ der Umrißerzeugenden $S'' A_0$ zu dieser gezogenen Normale $A_0 N''$. Aus $N''$ ist ein Kreis durch $A_0$ als Umriß der Kugel teilweise gezeichnet. Durch die Spitze des Kegels geht der Lichtstrahl $l$, dessen erste Spur $L$ ist. Dreht man die Lichtmeridianebene in die Hauptmeridianebene, wobei $l$ in der zweiten Projektion nach $S'' L''' = l'''$ gelangt, und denkt sich den Kugelhalbmesser parallel zu $l'''$ gezogen, in fünf gleiche Teile geteilt, und durch die Teilungspunkte die zu $l'''$ senkrechten Ebenen der Lichtgleichen der Kugel gelegt, so schneiden diese die $\mathbf{P}_1$ in parallelen Geraden von Fig. 95.

gleichen Abständen. Die äußersten dieser Ebenen werden angegeben, indem man Senkrechte zu $l'''$ durch $N''$ und berührend an den Kugelumriß zieht, welche die Projektionsaxe $x$ in $D'''$ bezw. $E'''$ treffen. Nach dem Zurückdrehen des Hauptmeridians in den Lichtmeridian kommen jene Punkte nach $D'$ und $E'$ auf $l'$, wobei $S'D' = S_0 D'''$, $S'E' = S_0 E'''$. Teilt man nun $D'E'$ in fünf gleiche Teile, schreibt zu $D'$ und $E'$ bezw. 0 und 1., trägt die Teilung über $D'$ nach der entgegengesetzten Seite weiter, und zieht durch die Teilungspunkte Senkrechte zu $l'$, so sind diese die ersten Spuren jener Lichtgleichenebenen der Kugel und schneiden auf dem Grundkreise $c$ die Lichtgleichenpunkte ein. Die ganze Teilung 1. 0 — 1. bildet den *Stärkemaßstab des Kegelkreises*, und es sind der Abstand seines Nullpunktes $D'$ vom Kreismittelpunkte $S''$ und seine Einheit $D'E'$ gegeben durch

Fig. 95.



$$S'D' = S'0 = s \operatorname{tg} \lambda, \quad D'E' = 0\,1. = n \sec \lambda,$$

wenn $\lambda$ den Neigungswinkel des Lichtstrahles gegen die Kreisebene $(xl''')$, $n = A_0 N''$ die Normale des Meridians in $A_0$, $s = S_0 N''$ die Subnormale bedeuten. Man erhält daher $S'D'$ und $D'E'$ noch etwas kürzer, was bei häufiger Wiederholung wesentlich ist, wenn man $L''' L^{IV} \perp x$ zieht, und $D^{IV}$ und $E^{IV}$ auf $l'''$ so bestimmt, daß ihre Abstände von $L''' L^{IV}$ bezw. gleich $s$ und $n$ sind. Dann ist der Abstand des $D^{IV}$ von $x = S'D'$ und $L''' E^{IV} = D'E'$.

Die hellsten Erzeugenden auf der positiven und negativen Flächenseite liegen in der Lichtmeridianebene, und ihre Helligkeitszahlen lassen sich auf dem Stärkemaßstabe $= + 0{,}96$ und $= - 0{,}53$ ab-

lesen. Die Grenzlichtgleichen können auch durch die Berührungspunkte der Tangenten aus $L'$ an $c$ bestimmt werden.

Bei dem gleichzeitigen Vorhandensein *beider Kegeläste* bemerkt man aus der Lage einer Berührungsebene, daß die äußere Seite des einen Astes die Fortsetzung der inneren Seite des anderen Astes ist, so daß die *positiven Lichtgleichen*, welche wir *bei dem unteren Aste außen* annehmen, *bei dem oberen nach innen* gelangen, die negativen dagegen auf dem unteren Aste innen, auf dem oberen außen liegen.

**203.** Um den *Schlagschatten in dem Inneren des oberen Kegelastes* zu bestimmen, der von dessen Grenzkreis $d$ (Mittelpunkt $T$) geworfen wird, lege man durch einen Punkt $C$ desselben den Lichtstrahl, Fig. a'a'. durch diesen und die Spitze $S$ des Kegels eine Hilfsebene, welche die Ebene des $d$ in $KC$ schneidet, wenn diese Ebene von dem durch $S$ gelegten Lichtstrahle in $K$ getroffen wird ($T'K' = T''K'''$). Schneidet $K'C'$ den $d'$, außer in $C'$, noch in $H'$, so enthält die Hilfsebene die Erzeugende $SH$ des Kegels, und deren Schnittpunkt mit jenem durch $C$ geführten Lichtstrahle ist der gesuchte Schatten $C_1$ von $C$. Der Schatten beginnt in den Berührungspunkten der aus $K'$ an $d'$ gezogenen Tangenten, d. i. in den Punkten 0 der Lichtgleichen. Um seine Punkte in der Lichtmeridianebene zu finden, dreht man diese um die Axe $a$ in die Hauptmeridianebene, so erhält man $B_1$ als Schatten von $B$ ($B'''B_2 \parallel l'''$, $T'B_1 =$ Abstand $B_2$ von $a''$).

Geometrisch kann man den Schlagschatten fortsetzen als Schnitt des durch $d$ gehenden Lichtstrahlencylinders mit dem Kegel, und insbesondere noch den Punkt $A_1$ im Lichtmeridiane bestimmen. Der Schnitt dieser Flächen besteht aus dem Kreise $d$ und dem gesuchten Schlagschatten, und der letztere ist ebenfalls eine ebene Kurve, daher ein Kegelschnitt. Denn, entsprechend wie in Nr. 67, schneidet die durch die drei Punkte $0, 0, A_1$ der Schattenkurve gelegte Ebene beide Flächen in Kegelschnitten, welche diese drei Punkte und die Tangenten in jedem der Punkte 0 gemein haben, letzteres, weil in jedem dieser Punkte beide Flächen zur gemeinschaftlichen Berührungsebene die Ebene der Tangente der $d$ und eines Lichtstrahles besitzen. Daher fallen beide Kegelschnitte ganz zusammen, und der Schatten von $d$ ist dieser Kegelschnitt; derselbe bildet bei Parallelbeleuchtung eine Ellipse. Ihre erste Projektion hat $A_1B_1$ zur großen Axe, $T'$ zum einen Brennpunkte (57), während die kleine Axe gleich dem Durchmesser von $d$ ist; und sind $a$, $b$, $e$ ihre Halbaxen und Excentricität, so ergibt sich $A_1$ aus $T'$, $B_1$, $b$ durch $A_1T'$. $T'B_1 = b^2$, weil $a^2 = b^2 + e^2$, daher $(a + e)(a - e) = b^2$.

*Die Schatten von $d$* auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ sind bezw. ein mit $d$ gleicher Kreis $d_1$ (nicht gezeichnet) und eine damit affine Ellipse $d_2$, deren

Mittelpunkte $T_1$, $T_2$ sind. Für $\sphericalangle xl' = \sphericalangle xl''$ können die Axen von $d_2$ nach Nr. 195 bestimmt werden, aber auch in folgender noch etwas vereinfachter Weise unter Entbehren von $d_1$. Aus der Mitte $F$ von $T_1''T_2'$ als Mittelpunkt legt man einen Kreis durch $T_2$ (und $T_1$), welcher $x$ in $G$ treffe; dann liegt die eine Axe von $d_2$ in $T_2G$, die andere steht darauf senkrecht. Zeichnet man aus $T_2$ als Mittelpunkt einen dem $d_1$ (und $d$) gleichen Kreis, so werden aus dessen Schnittpunkten mit den Axen der $d_2$ durch Parallele zu $x$ unter Vertauschung der Linien der Axen ihre Endpunkte bestimmt (begründet in Fig. 91 durch die gleiche Neigung der Linien $C_1E$, $C_2F$ und $C_2E$, $C_1F$ gegen $x$).

**204.** Ein *zweites Verfahren zur Bestimmung der Lichtgleichen* besteht darin, daß man zuerst die Helligkeit der beiden, in der Lichtmeridianebene liegenden, Punkte größter und kleinster Helligkeit bestimmt, wobei das Wort „kleinste" in physikalischem oder nur in geometrischem Sinne zu nehmen ist, und dazwischen den Stärkemaßstab einschaltet. Zu dem Ende dreht man bei der angenommenen aufrechten Stellung den Lichtmeridian in den Hauptmeridian, wodurch die Erzeugenden $SF$ und $SG$ nach $S''F'''$ und $S''G'''$, und $l$ nach $l'''$ gelangen. Zu $l'''$ zieht man die Senkrechte $S''$ 1., trägt auf derselben je fünf gleiche Teile von $S''$ bis 1. und bis — 1., zieht aus $S''$ durch 1. und — 1. einen Kreis, so werden die durch die Teilungspunkte zur Maßstabslinie gezogenen Senkrechten auf dem Kreise die Punkte der Strahlen des Tangentialbüschels bestimmen. Schneiden nun $S''F'''$ und $S''G'''$ jenen Kreis in $F'''$ bezw. $G'''$, und fällt man die Senkrechten $F'''F_1$, $G'''G_1$ auf die Linie des Maßstabes, so geben die Fußpunkte $F_1$, $G_1$ auf demselben die Helligkeiten des Kegels in $F$ und $G$ (0,96 und — 0,53) an. Da aber jede der Erzeugenden den Kreis in zwei Punkten trifft, so ist zu beachten, daß $F'''$, $G'''$ so gewählt werden müssen, daß $F'''G'''$ parallel zur Kegelaxe ist. Denn nur dadurch wird erreicht, daß wenn $\sphericalangle FSG = 0$ wird, beide Erzeugende gleiche Helligkeit mit entgegengesetzten Vorzeichen erhalten, wie es sein muß, daß dann beim Wachsen dieses Winkels diese entgegengesetzten Zeichen erhalten bleiben, bis eine der Erzeugenden in $l$ übergeht, und daß von da an gleiche Zeichen eintreten.

Fig. 96.

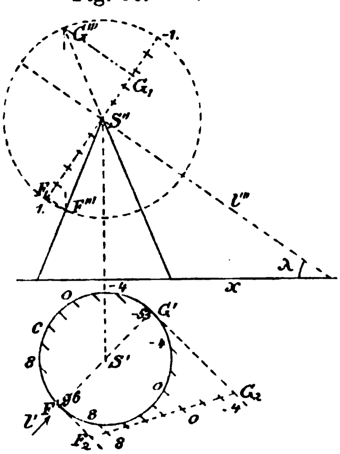
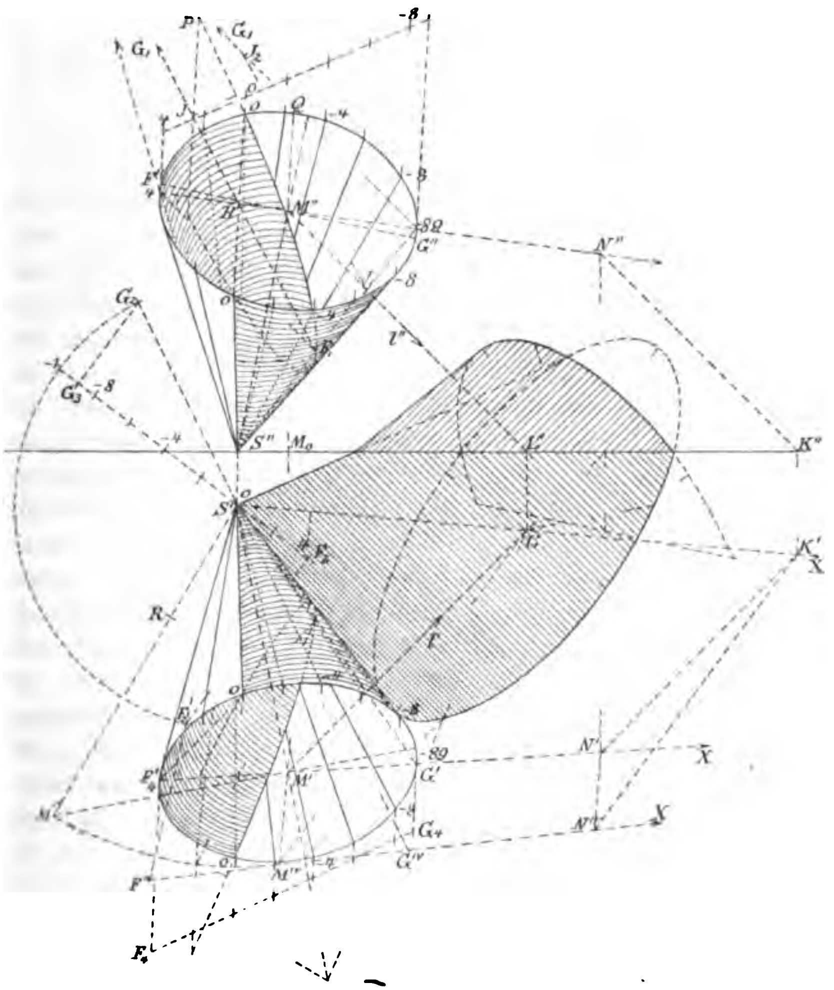



Fig. 96.

Zieht man nun in $F'$ und $G'$ Senkrechte zu $l'$ und schaltet zwischen sie $F_2 G_2 = F_1 G_1$ ein und überträgt alle zwischenliegende Teilungspunkte des Stärkemaßstabes, so erhält man aus ihnen durch Senkrechte zu $l'$ die Punkte der Lichtgleichen auf dem Kreise $c$. Ist $F' G' > F_1 G_1$, so nimmt man ein Mehrfaches von $F_1 G_1$ und seiner Teile.

**205.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines Umdrehungskegels zu bestimmen, dessen Axe gegen beide Projektionsebenen geneigt ist und in dessen Inneres Licht eindringt.*

Fig. 97.



*Aufl.* Liege die Spitze $S$ des Kegels in $\mathbf{P}_1$, sei $M$ $(M', M'')$ der Mittelpunkt und $r = S'R$ der Halbmesser des Grundkreises, so ist dessen erste Projektion eine Ellipse vom Mittelpunkte $M'$, deren Fig. 97.

große Halbaxe $\perp S'M'$ und $= r$, deren kleine Halbaxe in $S'M'$ liegt und gleich dem Abstande des $R$ von $S'M'$ ist, wenn $SR = r$ in der mit ihrer ersten projicirenden Ebene umgelegten Höhenlinie $SM$, nämlich in $S'M'''$, liegt, wobei $M'M''' \perp S'M'$ und $= M_0M''$, weil dieser Abstand $= r \cos M'M'''S'$, dieser Winkel aber derjenige jener kleinen Halbaxe mit dem sich in ihn projicirenden Kreishalbmesser ist. Übereinstimmend suche man die zweite Projektion des Grundkreises. — Sei ferner $ML$ der Lichtstrahl, $L$ seine erste Spur, so ist $SML$ die Lichtmeridianebene, und diese legen wir, zur Benutzung des zweiten Verfahrens (vor. Nr.), um $S'L'$ in $\mathbf{P}_1$ nach $S'M^{IV}L'$ um, wobei $M'M^{IV} \perp S'L'$, $S'M^{IV} = S'M'''$ ist; der umgelegte Lichtmeridian ist dann das gleichschenklige Dreieck $S'F^{IV}G^{IV}$, wenn $F^{IV}M^{IV}G^{IV} \perp S'M^{IV}$, $M^{IV}F^{IV} = M^{IV}G^{IV} = r$. In der Ebene des Lichtmeridianes bildet man dann den Stärkemaßstab des Tangentialbüschels, indem man die $S' — 1. \perp M^{IV}L'$ zieht und darauf von $S'$ aus nach beiden Seiten gleiche Längen von passender Größe aufträgt, deren fünf $= S — 1.$ etwa $= \frac{3}{2}r$ sind. Dann legt man aus $S'$ durch $— 1.$ einen Kreis, schneidet ihn mit $SF^{IV}$ und $SG^{IV}$ bezw. in $F_2$ und $G_2$, derart aber, daß $F_2G_2 \parallel S'M^{IV}$, zieht $F_2F_3$ und $G_2G_3 \perp S' — 1.$, so geben die Fußpunkte die größte und kleinste vorkommende Helligkeit ($+ 0{,}41$ und $= — 0{,}89$) an. — Die Punkte $F$, $G$ des Lichtmeridians an dem Kegel selbst liegen auf dem Durchmesser, welcher $M$ mit dem Schnittpunkte $X$ von $S'L'$ mit $M^{IV}G^{IV}$ verbindet. Da $X$ unzugänglich, ist ein mit $L'M^{IV}M'$ paralleles Hilfsdreieck $K'N^{IV}N'$ benutzt ($K''N'' \parallel L''M''$). Dann zieht man in jeder Projektion in $F$ und $G$ die Tangenten an die Ellipse (etwa vermittelst konjugirter Sehnen) und schaltet zwischen sie das Stück $F_3G_3$ des Stärkemaßstabes ein, z. B. $= F_4G_4$, so bestimmen die durch die Teilungspunkte gezogenen Parallelen zu den Tangenten die Lichtgleichenpunkte auf der Ellipse, und dadurch die Lichtgleichen. — Dies Verfahren dürfte hier etwas kürzer, als das der Nr. 202 sein, weil an die Stelle der Teilung einer gegebenen Strecke in jeder Projektion das Weitertragen einer willkürlichen Strecke und dann das Übertragen einer Teilung tritt.

Der *Schlagschatten des Grenzkreises im Inneren* wird im Grund- und Aufriß gleichartig konstruirt; betrachten wir den Aufriß. Die durch $F''$, $G''$ gelegten Lichtstrahlen schneiden bezw. auf $S''G''$, $S''F''$ die Schattenpunkte $F_1$, $G_1$ ein, welche einen Durchmesser der Schattenellipse begrenzen, und deren Mittelpunkt $J$ bestimmen. Ist $G_1$ unerreichbar, so zieht man $F_1J$ durch den Mittelpunkt $H$ der Sehne $OO$ der Schattenellipse und macht $F_1J = J_1J_2$, wenn $J_1$

der Schnittpunkt von $M''L''$ mit $S''G''$, also die Mitte von $F_1G''$, wenn $J_1J_2 \parallel F_1HJ$ und $J_2$ auf $G''G_1$; ($J_1J_2 = \frac{1}{2}F_1G_1$). Der zu $F_1J$ konjugirte Durchmesser ist $\parallel OO$ und gleich dem dazu parallelen Durchmesser der Grenzellipse, $JP \mathrel{\#} M''Q$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $JF_1$, $JP$ sind die angedeuteten Halbaxen konstruirt und vermittelst dieser die (durch $OO$ gehende) Ellipse gezeichnet.

Zur Bestimmung des *Schattens des Kegels auf* $\mathbf{P}_1$ *und* $\mathbf{P}_2$ sucht man die Schatten des Grundkreises vermittelst der Schatten zweier konjugirten Durchmesser, wozu in jeder Projektion die Axen gewählt sind, und bestimmt aus denselben die Axen der Schattenellipsen.

### III. Die Beleuchtung der Umdrehungsfläche.

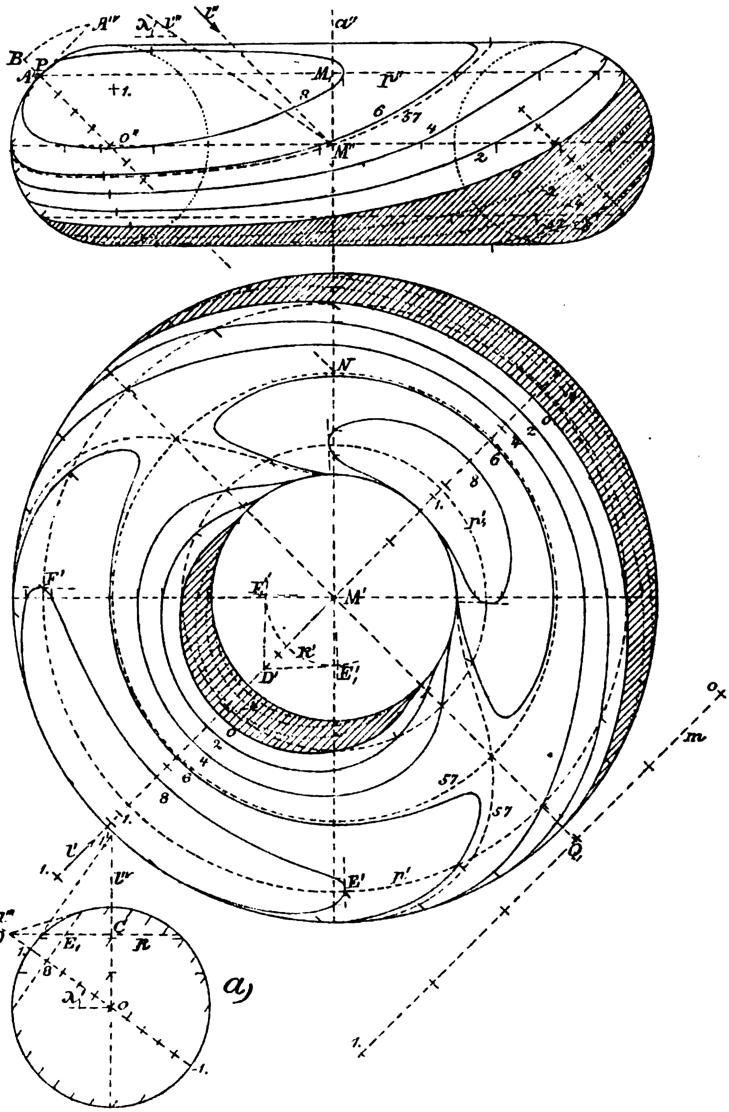
**206.** *Aufg. Die Lichtgleichen einer Umdrehungsfläche zu bestimmen. Dieselbe sei ein Ring, und ihre Axe a stehe* $\perp \mathbf{P}_1$.

*Aufl.* 1) *Bei dem Verfahren der Parallelkreise* wird dessen Stärke- Fig. 98.
maßstab mittelst einer entlang dieses Kreises die Fläche berührenden Kugel, wie bei dem Kegel (202), bestimmt. Sei wieder $l'''$ der mit der Lichtmeridianebene in die Hauptmeridianebene gedrehte Lichtstrahl, und $\lambda$ seine Neigung gegen $\mathbf{P}_1$. Von dem beliebigen Parallelkreise $p$ sei $M_1$ der Mittelpunkt, $P$ ein Punkt auf dem Hauptmeridiane, $PN = n$ die Normale in $P$ ($N$ auf $a$), $M_1N = s$ die Subnormale. Man trage nun den Stärkemaßstab für $p$ auf einer Parallelen $m$ zu $l'$ auf, welche von der $\perp l'$ durch $M'$ gelegten Geraden in $Q$ getroffen wird. Auf $m$ trägt man (202) $Q0 = s \operatorname{tg} \lambda$ in einem solchen Sinne auf, daß eine $\perp$ $l$ durch $N$ gelegte Ebene den Punkt 0 enthält, macht dann 0 1. $= n \sec \lambda$, teilt 0 1. in fünf gleiche Teile, welche man von 0 aus auch in entgegengesetztem Sinne weiter trägt, zieht durch die Teilungspunkte Parallele zu $QM'$, so schneiden diese auf $p$ die Lichtgleichenpunkte ein. Auf dem mit $p$ in derselben Ebene liegenden Parallelkreise $p_1$ liegen die Lichtgleichenpunkte den gleichbezifferten von $p$ diametral gegenüber, und auf den beiden Parallelkreisen, welche $p$ und $p_1$ symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt $M$ der Fläche gegenüber liegen, gilt dies auch von den Lichtgleichenpunkten. In der Figur sind besonders für den größten und kleinsten Parallelkreis ($s = 0$) die Lichtgleichenpunkte bestimmt.

2) *Bei dem Verfahren der Meridiane* wird der entlang des Meridians berührende Cylinder benutzt (195); es ist aber im allgemeinen nur vorteilhaft bei Kreismeridianen, also in unserem Falle. In der *Lichtmeridianebene* zieht man nach ihrer Drehung in die Hauptmeridianebene (Fig. $a$) den mit $l'''$ parallelen Durchmesser 1. 0 — 1.,

teilt ihn in $2 \times 5 = 10$ gleiche Teile, so bestimmen die durch die Teilungspunkte gezogenen Senkrechten zu $l'''$ auf dem Meridiane die Lichtgleichenpunkte, die man vermittelst ihrer Abstände von

Fig. 98.




dem mit $a$ parallelen Durchmesser $l^{IV}$ in den Grundriß auf $l'$, und von da in den Aufriß überträgt. In den so gewonnenen Punkten sind die Tangenten der Lichtgleichen senkrecht auf der Lichtmeridianebene. — Der *Meridian, dessen Ebene senkrecht auf der Licht-*

*meridianebene steht*, sei ebenfalls in Fig. *a* dargestellt. Dann ist $l^{IV}$ die Projektion eines Lichtstrahles auf seine Ebene, der Grundwinkel ist $90^0 - \lambda$, die Einheit des Stärkemaßstabes $0\ 1.' = (0\ 1.) \sec (90^0 - \lambda)$ wird durch die Tangente des Kreises in 1. abgeschnitten, so daß jene $\perp l'''$ gezogenen Geraden auch auf $0\ 1.'$ den Stärkemaßstab einschneiden. Die durch dessen Teilungspunkte $\perp l^{IV}$ gezogenen Geraden bestimmen die Lichtgleichenpunkte, welche in den Grund- und Aufriß übertragen werden. — Im *Hauptmeridiane* zieht man den zu $l''$ parallelen Halbmesser $0'' A''$, legt dessen zweite projicirende Ebene in die Hauptmeridianebene um, wobei der Punkt $A$ des Lichtstrahles nach $A^{IV}$ gelangt ($A'' A^{IV} \perp l''$ und $=$ Abstand des $A$ von der Hauptmeridianebene), so ist $A''\ 0''\ A^{IV}$ die Grundneigung, und $0''\ B = 0''\ A^{IV}$ die Einheit des Stärkemaßstabes, wodurch die Lichtgleichenpunkte des Hauptmeridianes im Aufriß und daraus im Grundriß bestimmt werden. Mit demselben stimmt der in Bezug auf die Lichtmeridianebene symmetrische Meridian überein, dessen Ebene in unserem Falle auf $\mathbf{P}_2$ senkrecht steht. — In ähnlicher Weise können die Punkte auf einem beliebigen Meridiane gefunden werden.

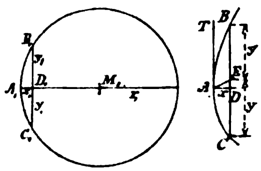
**207.** Einige der Lichtgleichen (6, 8) besitzen *äußerste Punkte*, das sind solche, in welchen sie von einem Meridiane der Fläche berührt werden. Um dieselben, z. B. auf der 8, zu finden, denken wir uns in Fig. *a* die Kugel, welche die Fläche nach einem der Kreise des Lichtmeridians berührt, in ihrer Projektion auf dessen Ebene dargestellt. Die Gerade $8 E_1$ stellt die Lichtgleiche 8 dieser Kugel dar, woraus sich die Spitze $D$ (auf $l'''$) des der Kugel nach 8 umschriebenen Kegels durch eine Tangente oder durch $0 D = \frac{5}{4} \times 0\ 1.$ $\left(\text{weil } 0 D \cdot 0 8 = 0 D \cdot \frac{4}{5} = 1^2\right)$ bestimmt. Die $\parallel \mathbf{P}_1$ durch $D$ gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise $k$, und dieser stellt sich, wenn man durch Parallelverschiebung der Kugel ihren Mittelpunkt nach $M$ gebracht denkt, im Grundriß als der Kreis $k'$ mit dem Mittelpunkte $M'$ dar. Überträgt man dann die Spitze $D$ des Kegels auf $l'$ nach $D'$ ($M' D' = CD$ in Fig. *a*) und zieht aus $D'$ die Tangenten an $k'$, so sind dies Erzeugende des Kegels, stehen daher senkrecht auf der Berührungskurve 8, sowohl im Raume, als im Grundriß auf der (elliptischen) Projektion der 8 (weil jene Tangenten $\parallel \mathbf{P}_1$), so daß die bezw. auf ihnen senkrechten $M' E_1'$, $M' F_1'$ Tangenten dieser Ellipsen, und $E_1'$, $F_1'$ äußerste Punkte derselben sind. Da nun aus jedem Punkte der 8 der Kugel durch Parallelverschiebung senkrecht zu $a$ um $m = M''\ 0''$ ein Punkt der 8 des Ringes entsteht, so sind $M' E_1'$, $M' F_1'$ auch Tangenten an die 8 des Ringes,

und auf jeder liegen zwei äußerste Punkte, so $E'$, $F'$, für welche die Abstände von $E_1'$, $F_1'$, so $E_1'E'$, $F_1'F'$, $= \pm m$ sind.

Vorteilhaft dürfte es sein, zuerst die Punkte auf den Meridianen zu bestimmen in der zu $l$ parallelen, in der darauf senkrechten, in der zu $\mathbf{P}_2$ parallelen und in der zu dieser in Bezug auf die Lichtmeridianebene symmetrischen Ebene; sodann die Punkte auf dem größten Parallelkreise und auf dem größeren der beiden, welche die äußersten Punkte ($D$, $E$) von 8 enthalten, und aus diesen die Punkte auf den anderen Parallelkreisen derselben Ebenen und auf den Parallelkreisen der in Bezug auf $M$ symmetrischen Ebenen.

**208.** Wir werden öfter das folgende *Verfahren zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers einer Kurve* gebrauchen. Ist von
Fig. 99. einem Kreise $M_1$ der Mittelpunkt, $M_1A_1 = r_1$ ein Halbmesser, $y_1 = D_1B_1 = -D_1C_1$ eine auf $M_1A_1$ senkrechte Ordinate, $x_1 = A_1D_1$, so ist $y_1^2 = x_1(2r_1 - x_1)$, und für $x_1$ unendlich klein

Fig. 99.



$$y_1^2 = 2r_1x_1, \qquad r_1 = \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{x_1}.$$

Im allgemeinen ist $r_1$ und damit das Verhältnis von $y_1^2$ und $x_1$ endlich, so daß $y_1 = 0^1$, $x_1 = 0^2$. Die besonderen Fälle sind durch die Bemerkung erledigt, daß bei $x_1 = 0^n$ für $n < 2$, $r_1 = 0$, für $n > 2$, $r_1 = \infty$ wird.

Ist für eine beliebige Kurve $AT$ die Tangente in ihrem Punkte $A$, $BC = 2y$ eine benachbarte mit $AT$ parallele Sehne, $AD = x$ die von $A$ auf $BC$ gefällte Senkrechte, $E$ der Mittelpunkt von $BC$, $\sphericalangle DAE = \alpha$, so ist

$$DB = y + x \operatorname{tg} \alpha = y, \qquad DC = -y + x \operatorname{tg} \alpha = -y,$$

weil $x \operatorname{tg} \alpha$ unendlich klein gegen $y$. Daher sind die Halbmesser der die $AT$ in $A$ berührenden Kreise, deren einer durch $B$, der andere durch $C$ geht, bezw.

$$= \frac{1}{2}\frac{DB^2}{x} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x} = r \quad \text{und} \quad = \frac{1}{2}\frac{DC^2}{x} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x} = r,$$

oder beide Kreise fallen zusammen, *der Krümmungshalbmesser $r$ ist daher unabhängig vom Winkel $\alpha$.*

Findet man nun bei der Vergleichung zweier von einander abhängigen Kurven, von deren einer der Krümmungshalbmesser $r_1$ bekannt ist, die Beziehung

$$x = ax_1, \qquad y = by_1,$$

so ist

$$r = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}\frac{b^2y_1^2}{ax_1} = \frac{b^2}{a}r_1.$$

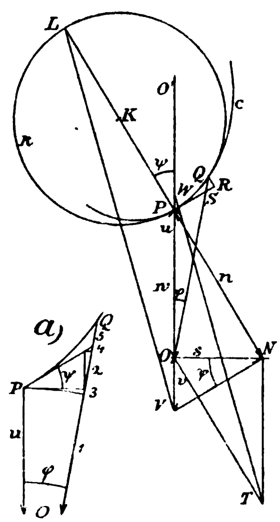
Es bestehen daher die Verhältnisse,

wenn $b = 1$ oder $y = y_1$, $r : r_1 = 1 : a = x_1 : x$,

wenn $a = 1$ oder $x = x_1$, $r : r_1 = b^2 : 1 = y^2 : y_1^2$.

**209.** Die Projektionen der Lichtgleichen des Ringes auf eine zur Ringaxe senkrechte Ebene, oder die *Grundrißlichtgleichen*, können als Konchoiden der Lichtgleichen einer Kugel angesehen werden, ebenso wie es bei der Lichtgleiche Null oder der Eigenschattengrenze der Fall war (173). Zur leichteren Verzeichnung einer solchen *verallgemeinerten Konchoide* wollen wir einen Satz aufsuchen, der Ähnliches über ihren *Krümmungshalbmesser* ausspricht, wie der in Nr. 174 entwickelte bekannte Satz über ihre Subnormale. Sei $c$ Fig. 100.
die Konchoide oder eine ihrer Grundkurven, $P$ ein Punkt derselben, $O$ der Pol, $OP = u$ der Leitstrahl, $OO'$ der positive Sinn des Leitstrahles, $PK$ die Normale der $c$ in $P$, $K$ ihr Krümmungsmittelpunkt in $P$, $k$ der Krümmungskreis, $PK = r$ der Krümmungshalbmesser, $O'PK = \psi$ sein Winkel mit dem Leitstrahle, $Q$ der dem $P$ benachbarte Punkt der $c$, daher $POQ = \varphi$ ein unendlich kleiner Winkel ($0^1$) und $OQ = u'$ der benachbarte Leitstrahl der $c$. Da $OQ$ den Krümmungskreis $k$ in einem Punkte schneidet, dessen Abstand von $Q$, außer wenn $\psi = 90^0$ (210), wenigstens unendlich klein von der dritten Ordnung ($0^3$) ist (I, 237), bei der Bestimmung des Krümmungshalbmessers aber nur $0^2$ in Betracht kommt, so haben wir $Q$ als einen gemeinschaftlichen Punkt von $c$ und $k$ anzusehen. Um $u'$ durch $u, \varphi, \psi, r$ auszudrücken, schneide man die in $P$ berührende Tangente $PS$ der $c$ mit $OQ$ in $S$, so ist $OQ = OS + SQ$. Es ergibt aber das Dreieck $OPS$

Fig. 100.




$$OS = OP \frac{\sin(90^0 + \psi)}{\sin(90^0 - \psi - \varphi)} = u \frac{\cos\psi}{\cos(\psi + \varphi)}$$

$$= u \frac{\cos\psi}{\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi} = \frac{u}{\cos\varphi - \operatorname{tg}\psi\sin\varphi},$$

oder, wenn man

$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2, \qquad \sin\varphi = \varphi$$

setzt, indem man die Reihen bis zur zweiten Potenz von $\varphi$ beibehält,

$$OS = \frac{u}{1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \varphi\operatorname{tg}\psi} = u(1 + \varphi\operatorname{tg}\psi + \varphi^2\operatorname{tg}^2\psi + \tfrac{1}{2}\varphi^2).$$

Um $SQ$ auszudrücken, ziehe man $QR \perp PS$, und setze $PR = y$, $RQ = x$, so ist $y^2 = 2rx$.

Darin ist $y = PS + SR$; und da aus dem Dreiecke $OPS$

$$PS = u \frac{\sin \varphi}{\sin(90^0 - \psi - \varphi)} = \frac{u\varphi}{\cos\psi}$$

ist, indem in dem Ausdrucke von $PS = 0^1$ die $\varphi$ gegen $\psi$ wegfällt, da sie mit dem $\varphi$ des Zählers ein $0^2$ hervorbringen würde, so folgt

$$y^2 = \left(\frac{u\varphi}{\cos\psi} + SR\right)^2 = \frac{u^2\varphi^2}{\cos^2\psi},$$

indem $SR$ und $SQ$ mit $RQ$ gleich $0^2$ sind. Andererseits liefert das Dreieck $SRQ$

$$RQ = x = SQ \cos(\psi + \varphi) = SQ \cos\psi.$$

Diese Werte von $y^2$ und $x$ in $y^2 = 2rx$ eingeführt, geben

$$SQ = \frac{u^2\varphi^2}{2r\cos^3\psi}.$$

Daher wird

$$OQ = OS + SQ = u + \varphi u \operatorname{tg}\psi + \varphi^2\left(\frac{u}{2} + u\operatorname{tg}^2\psi + \frac{u^2}{2r\cos^3\psi}\right). \quad (1)$$

Bezeichnet man die Glieder dieses Ausdrucks der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, so kann man diese Formel aus Fig. 100 *a*) ablesen. — Um nun die einzelnen Ausdrücke zu konstruiren, zieht man die $ON \perp OP$, schneidet sie mit $PK$ in $N$, so ist $NP = n$ die Normale, $ON = s$ die Subnormale von $c$ in $P$; zieht man dann die $NV \perp PN$ und schneidet sie mit $OP$ in $V$, so ist offenbar, wenn $VO$ mit $v$ bezeichnet wird,

$$\left.\begin{aligned} s = u \operatorname{tg}\psi, \quad & VO = v = u\operatorname{tg}^2\psi, \\ n = \frac{u}{\cos\psi}, \quad & \frac{u^2}{\cos^3\psi} = \frac{n^3}{u} = VP\cdot n. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Zieht man ferner $OT \parallel PN$, $NT \parallel PO$, schneidet beide Linien in $T$, so ist $TO = NP = n$; macht man dann auf $PK$ die $KL = PK = r$, so daß $PL = 2r$, zieht $TW \parallel VL$, und schneidet sie mit $OP$ in $W$, so ist (Gl. 2)

$$OW = TO\frac{VP}{PL} = \frac{n\cdot VP}{2r} = \frac{u^2}{2r\cos^3\psi} = w, \quad (3)$$

indem wir $OW = w$ setzen, und ferner

$$VW = VO + OW = u\operatorname{tg}^2\psi + \frac{u^2}{2r\cos^3\psi} = v + w.$$

Man erhält daher aus Gl. (1)

$$OQ = u + \varphi s + \varphi^2 \left(\frac{u}{2} + v + w\right).$$

Gelten diese Bezeichnungen für die Konchoide und gelten für die Grundkurven der Reihe nach die Bezeichnungen $u_1$, $u_2 \ldots$, $s_1$, $s_2 \ldots$, im allgemeinen $u_i$, $s_i \ldots$, so ist

$$OQ = OQ_1 + OQ_2 + \ldots = \Sigma\, OQ_i,$$

$$u + \varphi s + \varphi^2 \left(\frac{u}{2} + v + w\right) = \Sigma u_i + \varphi \Sigma s_i + \varphi^2 \Sigma \left(\frac{u_i}{2} + v_i + w_i\right). \quad (4)$$

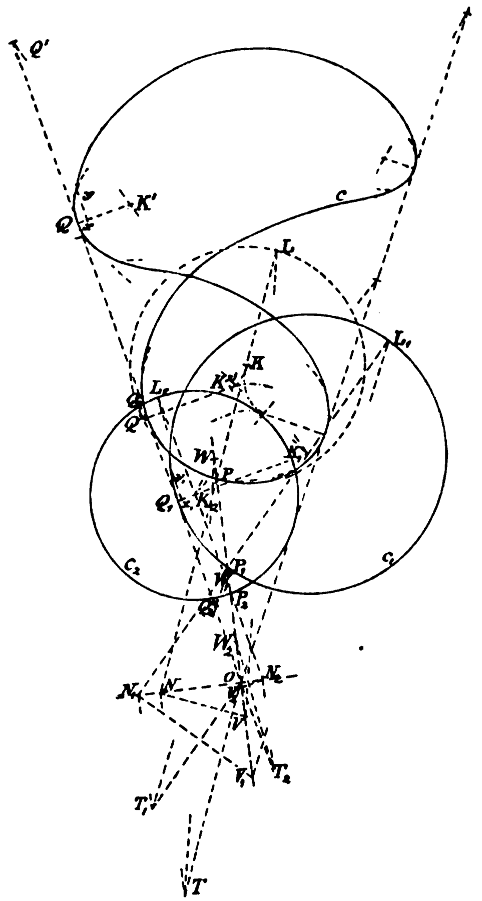
Diese Ausdrücke sind bei den bis zu Null abnehmenden Werten von $\varphi$ nur gleich, wenn die Glieder mit übereinstimmenden Potenzen für sich gleich sind. Es ist daher

$$u = \Sigma u_i, \qquad s = \Sigma s_i,$$

$$v + w = \Sigma (v_i + w_i). \quad (5)$$

Die erste dieser drei Gleichungen bestimmt die Punkte, die zweite die Tangenten, die dritte die Krümmungshalbmesser der Konchoide. Die zweite enthält wieder den Subtangentensatz (174), die dritte einen entsprechenden *Satz zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Konchoide, welcher sagt, daß die Strecke $VW$ ($= v + w$) der Konchoide gleich der Summe der Strecken $V_i W_i$ der Grundkurven ist.* Dabei konstruirt man in der angegebenen Weise das $V_i W_i$ der Grundkurven aus ihren Krümmungshalbmessern und dann umgekehrt aus dem $VW$ der Konchoide deren Krümmungshalbmesser.

Fig. 101.




Wählt man in einem Beispiele als *Grundkurven zwei Kreise* Fig. 101.
$c_1$, $c_2$, woraus mit dem Pole $O$ die *Konchoide* $c$ entsteht, so ist für einen Punkt $P$ der $c$ die $PN$ die Normale, wenn

$$ON = ON_1 + ON_2.$$

Ferner werden $V_1 W_1$ und $V_2 W_2$ aus der angegebenen Konstruktion erhalten. Bestimmt man daher $V$ und $T$ aus $N$, und macht $VW = V_1 W_1 + V_2 W_2$, so schneidet die zu $TW$ parallele $VL$ die Normale $NP$ in $L$, so daß $PL$ ein Durchmesser des Krümmungskreises ist. Eine etwaige Unsicherheit des Schnittes $L$ läßt sich beseitigen, wenn man $PV$ um $P$ und $OW$ um $O$ in gleichem Drehungssinne in die günstigen parallelen Lagen $PV'$ und $OW'$ (nicht gezeichnet) dreht, und dann $V'L \parallel W'T$ zieht (weil $\triangle PVL \sim \triangle OWT$). Da in der Figur der Krümmungskreis von $c$ in $P$ zufällig ganz im Äußeren, diejenigen für $Q^*$ und einen anderen gleichartigen Punkt ganz im Inneren von $c$ liegen, so liegen die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte nahe bei Spitzen der Evolute von $c$, wodurch diese teilweise verzeichnet werden konnte.

**210.** *Besondere Punkte der verallgemeinerten Konchoide.*

1) *Berührt ein Leitstrahl eine der Grundkurven*, etwa $c_1$, so berührt er auch die Konchoide $c$, weil dann die Subnormale für die erstere, und daher auch die für die letztere Kurve unendlich wird. Es trifft dies für $Q_1$ und $Q$, $Q^*$ zu.

Ferner wird, da $\psi_1 = \psi = 90^0$ (vergl. Fig. 100), nach Gl. (3) der vor. Nr. $w_1 = u_1^2 : 2r_1 \cos^3 \psi_1 = \infty$; daher fallen im Ausdrucke $w = \Sigma w_i$ die $w_2, w_3 \ldots$ weg, oder $r$ hängt nur von $r_1$ ab. Es wird dann auch $u^2 : 2r \cos^3 \psi = \infty$, woraus aber wegen $\cos \psi = 0$, $r$ unbestimmt bleibt. Die geometrische Betrachtung zeigt jedoch für $Q_1$ und $Q$ (vergl. die Fig. 101), wenn $\varphi = x : u$, daß

$$y^2 = 2rx, \quad y_1^2 = 2r_1 x_1, \quad y = y_1, \quad x = \varphi u, \quad x_1 = \varphi u_1,$$

daher

$$2rx = 2r_1 x_1, \quad ru = r_1 u_1 \quad \text{oder} \quad r : r_1 = u_1 : u; \tag{6}$$

*es verhalten sich also die Krümmungshalbmesser umgekehrt wie die Leitstrahlen.* Daher wird der Krümmungsmittelpunkt $K'$ für $Q$ aus demjenigen $K_1$ für $Q_1$ konstruirt, wenn man auf $OQ$ die $QQ' = OQ_1$ aufträgt und $Q'K_1$ mit der Normale $QK'$ der $c$ in $K'$ schneidet.

Berührt ein Leitstrahl mehrere Grundkurven $c_1, c_2 \ldots$, im allgemeinen $c_h$, so ist

$$y = \sqrt{2rx} = \sqrt{2\varphi}\sqrt{ru}, \quad y_h = \sqrt{2\varphi}\sqrt{r_h u_h}, \quad y = \Sigma y_h,$$

$$\sqrt{ru} = \Sigma \sqrt{r_h u_h}.$$

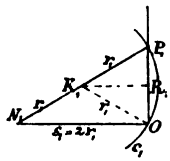
2) *Fallen die Normalen aller Grundkurven in den Leitstrahl*, so gilt dies auch für die Konchoide; es werden alle $\psi$, alle $s$ und

auch alle $v$ zu Null. Aus den Gleichungen (5) und (3) ergibt sich dann, da $\cos\psi = 1$,

$$w = \Sigma w_i, \qquad \frac{u^2}{r} = \sum \frac{u_i^2}{r_i}.$$

3) Geht eine der *Grundkurven, etwa $c_1$, durch den Ursprung $O$*, so liefert diese auf jedem Leitstrahle einen Wert $u_1 = 0$ und außerdem noch andere Werte, entsprechend den anderen Schnittpunkten des Leitstrahles mit $c_1$. Die Konchoide zerfällt daher in zwei Äste, wovon der erste die Konchoide ist, welche jene Grundkurve $c_1$ entbehrt, der zweite aber derjenige, bei welchem alle Werte von $u_1$ außer dem zu Null gewordenen zur Wirkung gelangen. In demjenigen Leitstrahle, welcher die $c_1$ in $O$ berührt, schneiden sich beide Äste und bilden einen *Doppelpunkt*. Bei der Bestimmung der Tangente und des Krümmungshalbmessers des zweiten Kurvenastes in dem Doppelpunkte ist zu beachten, daß die Subnormale $s_1$ der $c_1$ in $O$ gleich ihrem *doppelten* Krümmungshalbmesser $r_1$ ist ($s_1 = 2r_1$). Denn ist $P_1$ der dem $O$ benachbarte Punkt der $c_1$, $ON_1 \perp OP_1$, $P_1N_1$ die Normale der $c_1$ in $P_1$, so ist $ON_1 = s_1$; ist ferner $OK_1$ die Normale der $c_1$ in $O$, welche die $P_1N_1$ die $K_1$ trifft, so ist $OK_1 = P_1K_1 = r_1$; und da $ON_1$ parallel der Höhenlinie $R_1K_1$ des gleichschenkligen Dreiecks $OP_1K_1$, so ist $K_1N_1 = P_1K_1 = r_1$, daher in der Grenze $s_1 = ON_1 = P_1N_1 = 2r_1$. Fig. 102.

Fig. 102.



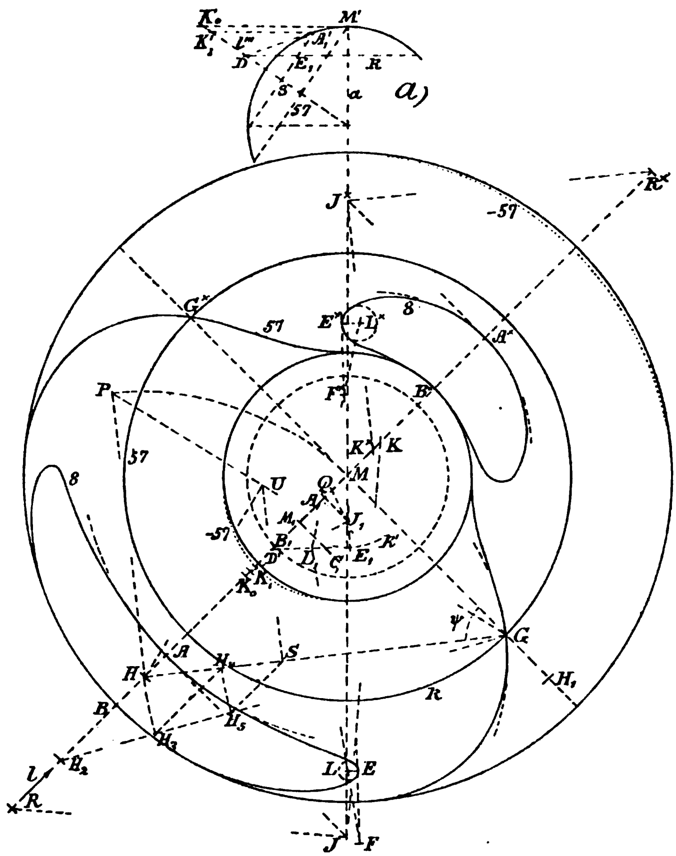
**211.** Wenden wir diese Ergebnisse auf die *Grundrißlichtgleichen des Ringes* **F** an. Für die koncentrische Kugel **K**, deren größter Fig. 103.
Kreis gleich einem Meridiankreise der **F** (173), ist die Grundrißlichtgleiche eine Ellipse; und es hat z. B. diejenige 8 die Punkte $A_1$, $B_1$ zu Scheiteln der in $l$ liegenden kleinen und daher $M_1C_1$ zur Linie ihrer großen Axe. Aus einer solchen Ellipse erhält man die entsprechende Lichtgleiche des Ringes durch Verschiebung eines jeden Punktes in der durch den Mittelpunkt $M$ der **F** gehenden Richtung um die unveränderliche Länge $m$, dem Abstande des Meridianmittelpunktes der **F** von $M$. So entstehen aus $A_1$ und $B_1$ die vier Punkte $A$, $A^*$, $B$, $B^*$, indem $A_1A = -A_1A^* = B_1B = -B_1B_1^* = m$. Die Lichtgleiche des Ringes ist eine Konchoide, deren Grundkurven $c_1$ und $c_2$ bezw. die Ellipse $A_1C_1B_1$ und der aus $M$ mit dem Halbmesser $m$ beschriebene Kreis $k$ sind. Man kann daher die *Tangente der Konchoide* in jedem ihrer Punkte leicht bestimmen, da ihre Subnormale und die der Ellipse für den entsprechenden Punkt zusammenfallen, weil die des Kreises Null ist.

Für die *Krümmungshalbmesser der Konchoide in ihren Scheiteln* $A$, $A^*$, $B$, $B^*$ gilt nach Nr, 210, 2):

$$\frac{u^2}{r} = \frac{u_1^{\,2}}{r_1} + \frac{u_2^{\,2}}{r_2}.$$

Für die Ellipse wird der Krümmungshalbmesser $r_1 = A_1 K_1 = A_1' K_1'$ der Fig. $a$) bestimmt, wenn man diese Linie $\perp a$ von $A_1'$ bis

Fig. 103.



$K_1'$ auf $l'''$ zieht; denn $K_1'$ ist (ebenso wie $D$) die Spitze eines über 8 gelegten geraden Kreiskegels, und $K_1'$ der Schnittpunkt der mit $\mathbf{P}_1$ parallelen Normalen zweier benachbarten Punkte der Grundrißlichtgleiche 8 in $A_1$; oder weil sich in Fig. $a$) $A_1' K_1' = a^2 : b$ der Grundrißellipse 8 ergibt. Entsprechend ergibt sich für den Kreis $k$ die $u_2 = r_2 = m$, daher

$$\frac{u^2}{r} = \frac{u_1^{\,2}}{r_1} \pm m,$$

wobei + oder — gilt, je nachdem $r_1$ und $r_2$ gleiche oder entgegengesetzte Sinne besitzen. Demnach gilt + für $A^*$ und $B$, — für $A$ und $B^*$. Zieht man nun $AJ \perp MA$ und $= MA = u$, und zeichnet $MJ$, so schneidet diese Linie auf allen Senkrechten zu $l$ das $u$ des Fußpunktes ab, so auch $A_1 J_1 = u_1 = MA_1$; die $J_1 Q \perp K_1 J_1$ bestimmt dann auf $l$ die $A_1 Q = u_1^2 : r_1$. Dann sind $AQ$ und $A^*Q$ bezw. $= u_1^2 : r_1 \pm m$. Trägt man nun in ungeändertem Sinne auf $l$ die $AR = A^*Q$ und die $A^*R^* = AQ$ ab und zieht $JK \perp RJ$, $J^*K^* \perp R^*J^*$, so bestimmen diese Linien auf $l$ die Krümmungsmittelpunkte $K$ und $K^*$ für $A$ und $A^*$. Denn es ist z. B. $\frac{u_1^2}{r_1} - m = A^*Q = AR = \frac{AJ^2}{AK} = \frac{u^2}{AK}$, daher $AK = r$.

Liegen die *Scheitel in einem Umrißkreise*, so findet man diesen als Krümmungskreis. Für $B$ und $B^*$ ist dies nahezu der Fall.

*Eine aus $M$ an die Ellipse $A_1 C_1 B_1$ gezogene Tangente berührt* diese in $E_1$ (aus Fig. *a*) durch $D$ und $k$ nach Nr. 207 erhalten) und die *Konchoide in $E$ und $E^*$*, wobei $E_1 E = - E_1 E^* = m$. Bestimmt man auf $E_1 D'$ mittelst der Linie $M_1 C_1$ der großen Axe nach I, 392, 3) den Krümmungshalbmesser $E_1 L_1$ der Ellipse, verschiebt $ME_1$ in seiner Linie nach $EF$ und nach $E^*F^*$, so schneiden $L_1 F$ und $L_1 F^*$ bezw. auf den Normalen der Konchoide in $E$ und $E^*$ deren Krümmungsmittelpunkte $L$ und $L^*$ ein (210, 1)).

Die *Grenzlichtgleiche* enthält auch *Scheitel* auf dem zu $l$ senkrechten Durchmesser des größten und kleinsten Parallelkreises, in denen die Krümmungshalbmesser ebenso wie in den Scheiteln auf $l$ (aber auch in der Weise der Nr. 184) bestimmt werden können.

**212.** *Die Lichtgleiche von der Helligkeit der zur Umdrehungsaxe $a$ der* **F** *senkrechten Ebene* $\mathbf{P}_1$ (= 0,57) enthält als Bestandteile den höchsten und tiefsten Parallelkreis $k$ und noch eine andere Kurve, welche die Kreise $k$ in den Doppelpunkten $G$ und $G^*$ schneidet. Die entsprechende Lichtgleiche der Kugel **K** hat zum Grundriß eine durch $M$ gehende Ellipse, deren Tangente in $M$ ($\perp l$) die Doppelpunkte $G$, $G^*$ der Konchoide enhält. Es ist dies der in Nr. 210, 3) betrachtete Fall, in welchem eine Grundkurve durch den Ursprung der Leitstrahlen geht. Bestimmt man den Krümmungshalbmesser $MK_0 = r_0$ ($= M'K_0'$ der Fig. *a*)) der Ellipse in $M$ und verlängert ihn über $K_0$ um sich selbst bis $H$ ($MH = 2r_0$), so ist $MH$ die Subnormale der Ellipse in $M$ (210, 3)), und auch die der Konchoide, da die Subnormale der zweiten Grundkurve, des Kreises aus $M$, Null ist. Also sind $GH$ und $G^*H$ *die Normalen der Konchoide in* $G$ und $G^*$.

Zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Konchoide in

$G$ ist das allgemeine Verfahren unbrauchbar, weil für die Ellipse $v$ unendlich und $v + w$ unbestimmt wird. Eine ursprüngliche Betrachtung zeigt aber, daß der Strahl $MG$ der Konchoide die Länge $m$, der benachbarte die Länge $m + 2r_0\varphi$ besitzt. Dies gleich dem Ausdrucke derselben Länge (1) in Nr. 209 gesetzt, gibt

$$m + \varphi . 2r_0 = u + \varphi . u \operatorname{tg} \psi + \varphi^2 \left(\frac{u}{2} + u \operatorname{tg}^2 \psi + \frac{u^2}{2r \cos^3 \psi}\right).$$

Daraus folgt $\qquad u = m, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2r_0}{m},$

also $\psi = \sphericalangle MGH$, wie schon bemerkt, und

$$\frac{m}{2} + m \operatorname{tg}^2 \psi + \frac{m^2}{2r \cos^3 \psi} = 0,$$

und hieraus $\qquad r = -\frac{m}{\cos \psi} \frac{1}{1 + \sin^2 \psi}.$

Da $GH = GM : \cos \psi = -m : \cos \psi$, so ergibt sich $r = GS$, wenn man $HP \perp HG$ und $= HM$, $HU \perp GP$ bis $U$ auf $GP$, $US \perp GH$ bis $S$ auf $GH$ zieht, weil $GP^2 = GH^2 + HP^2 = GH^2(1 + \sin^2\psi)$, daher $GS = GU\,(GH : GP) = GH(GH^2 : GP^2)$ $= (-m : \cos \psi) : (1 + \sin^2 \psi) = r$.

Bildet, wie bei unserer Annahme, der Lichtstrahl gleiche Winkel mit $P_1$ und $P_2$, so sind diejenigen Punkte der Umrißkreise des Grundrisses Punkte unserer Lichtgleiche, in denen die Berührungsebenen $\parallel P_2$ sind; und ebenso deren zu $l$ symmetrische Punkte.

Wir wollen eine Lichtgleiche dann *Typuslichtgleiche**) nennen, wenn sie als Bestandteil eine Kurve enthält, nach welcher die Fläche von einer Ebene berührt wird. In die bei ihren Doppelpunkten gebildeten Ecken schmiegen sich die benachbarten Lichtgleichen herein.

**213.** Wir wollen noch *eine andere Art der Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Typuslichtgleiche in ihrem Doppelpunkte*
Fig. 104. angeben. Gelten die Bezeichnungen der vor. Nr., seien $T$ und $U$ bezw. die dem $M$ und $G$ benachbarten, sich entsprechenden Punkte der Ellipse und der Typuslichtgleiche, so daß $MG = TU = m$, und sei auch auf $MU$ die $MV = m$, sei $MTH$ der aus $K_0$ gezogene Krümmungskreis der Ellipse in $M$, seien die unendlich kleinen Winkel $GMT = MHT = \varphi$, so ist $VU = MT = 2r_0\varphi$, $GV = m\varphi$.

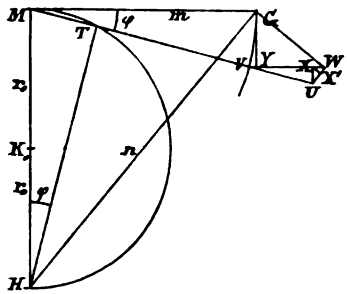
Zur *Bestimmung der Tangente* ist die Berücksichtigung der $0^1$

---

*) *Burmester* in s. Th. u. D. der Beleuchtung, 1871, S. 102, hat den Namen Typusisophote für diese Kurve bei Umdrehungsflächen eingeführt.

notwendig. Es sind aber die bezw. bei $V$ (in der Grenze) und $M$ rechtwinkligen Dreiecke $GVU$ und $GMH$ ähnlich, weil $GV : VU = m\varphi : 2r_0\varphi = GM : MH$; und da die Katheten des ersten Dreiecks durch Drehung um $G$ um $90^0$ mit den entsprechenden des zweiten nach Richtung und Sinn parallel gemacht werden können, so gilt dies auch von den Hypotenusen und es ist das Element $GU$ oder die Tangente $GW$ unserer Lichtgleiche $\perp GH$.

Fig. 104.




*Der Krümmungshalbmesser* der Lichtgleiche bei $G$ ist (208)

$$r = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}\frac{GW^2}{WU}.$$

Es ist aber $GW = GU$ ($= 0^1$, Unterschied $= 0^3$ nach I, 236, 8)), und aus den bezeichneten ähnlichen Dreiecken $GU : GV = GH : GM$, oder wenn man $HG = n$ setzt,

$$GW = GU = m\varphi \,.\, n : m = n\varphi.$$

Zieht man durch $V$ eine Parallele und durch $G$ eine Senkrechte zu $MG$, so bilden diese beiden Linien mit der Geraden $GW$ ein zu $HMG$ ($m$, $n$, $2r_0$) ähnliches Dreieck; und da $GY = GV$ ($0^1$, Unterschied $= 0^3$) $= m\varphi$, so ist die in $GW$ liegende Seite $= n\varphi = GW$, so daß $VY$ durch $W$ geht, und die dritte Seite $YW = 2r_0\varphi = VU$ ist. Fällt man $UX \perp VW$, so ist auch $VX = VU$, daher $WX = YV = \frac{1}{2}m\varphi^2$, $XU = VU \,.\, \varphi = 2r_0\varphi^2$; und bei $XX' \perp WU$ ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $XX'W$, $UX'X$, $HMG$

$$WU = WX' + X'U = WX\frac{m}{n} + XU\frac{2r_0}{n},$$

$$WU = \frac{1}{2}m\varphi^2\frac{m}{n} + 2r_0\varphi^2\frac{2r_0}{n} = \frac{1}{2}\varphi^2\frac{m^2 + 8r_0^2}{n}.$$

Setzt man die gewonnenen Werte von $GW$ und $WU$ in dem Ausdrucke von $r$ ein, so erhält man

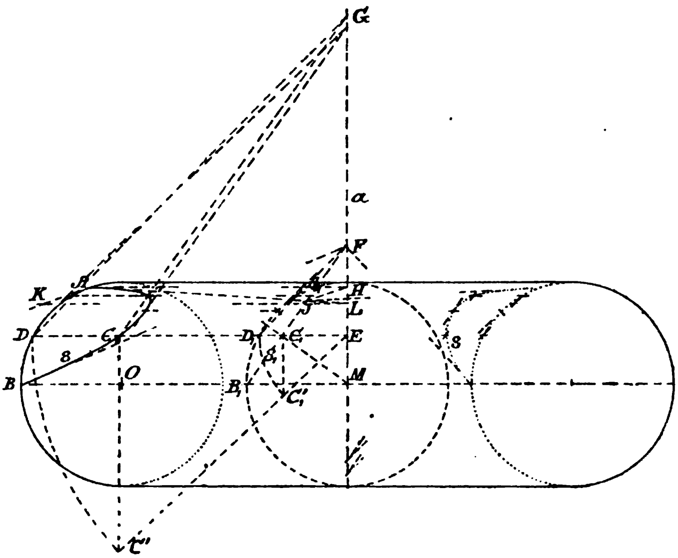
$$r = \frac{n^3}{m^2 + 8r_0^2}.$$

Macht man nun in Fig. 103 auf $MG$ die $MH_1 = MH = 2r_0$, auf $MH$ die $MH_2 = HH_1$, so ist $HH_1^2 = 2(2r_0)^2 = 8r_0^2$, $GH_2^2 = m^2 + 8r_0^2$; bestimmt man dann die Punkte $H_3$, $H_5$ auf $GH_2$, und $H_4$, $S$ auf $GH$ so, daß $GH_3 = GH$, $H_3H_4 \parallel MH$, $GH_5 = GH_4$, $H_5S \parallel MH$, so ist $GS = r$; denn es ist dann

$$GS = GH_5\frac{GH}{GH_2} = GH_4\frac{GH}{GH_2} = GH_3\frac{GH^2}{GH_2^2} = \frac{n^3}{m^2 + 8r^2}.$$

**214.** *Die Projektionen der Lichtgleichen des Ringes auf die Lichtmeridianebene.* Wir bestimmen sie aus den gleichartigen Projektionen der Lichtgleichen der mehrerwähnten koncentrischen Kugel,
Fig. 105. welche gerade Linien sind. Aus den Meridianpunkten $A_1$, $B_1$ der

Fig. 105.




Lichtgleiche $8_1$ der Kugel ergeben sich die Meridianpunkte $A$, $B$ der Lichtgleiche 8 des Ringes durch Senkrechte zur Umdrehungsaxe $a$. Aus einem beliebigen Punkte $C_1$ der $8_1$ erhält man den in derselben Parallelkreisebene liegenden Punkt $C$ der 8, indem man diese Ebene mit den beiden Parallelkreisen von den Halbmessern $ED_1$, $ED$ in die Lichtmeridianebene umlegt, wobei die aus $C_1$, $C$ entstehenden Punkte $C_1'$, $C'$ auf demselben Halbmesser $EC_1'$ liegen. Weil dabei $EC:ED = EC_1:ED_1$, kann man die Konstruktion abkürzen, indem man durch $C_1$ eine Gerade, vorteilhaft die $8_1$, zieht, sie mit $a$ in $F$ schneidet, und mit $D_1F$ die Parallele $DG$ bis $G$ auf $a$ zeichnet; dann geht die $\parallel FC_1$ durch $G$ gezogene Gerade durch $C$. Es ist vorteilhaft, wie es in der Figur geschehen, zugleich zwei Punkte der 8 zu bestimmen, entsprechend den beiden Schnittpunkten der $FD_1$ mit dem Umrißkreise der Kugel. Die mit $8_1$ parallele Tangente der 8 erhält man durch die aus $F$ an den Umrißkreis gezogene Tangente, wie die Figur zeigt (Punkt $E$ der Fig. 103).

Die *Tangente der Kurve in einem Meridianpunkte*, z. B. in $A$, erhält man, wenn man aus dem Mittelpunkte $H$ des Parallelkreises von $A$ eine Parallele zur Meridiantangente in $A$ (und $A_1$) bis zu $J$

auf $8_1$ zieht; $AJ$ ist dann die gesuchte Tangente. Denn die Linienstücke auf der zu $HA_1A$ benachbarten parallelen Geraden (der Projektion des benachbarten Parallelkreises), welche zwischen der $8_1$ und der Tangente des Meridianes in $A_1$ und zwischen der Tangente von 8 und der des Meridianes in $A$ enthalten sind, verhalten sich wie $HA_1 : HA$, weil, wenn $ED_1D$ dieser benachbarte Parallelkreis wäre, sie sich wie $D_1C_1 : DC = ED_1 : ED$ verhalten würden. Zwischen den Linien $JH$, $JA_1$ und zwischen $JH$, $JA$ liegen aber Stücke einer Senkrechten zu $a$, welche $HA_1$ und $HA$ selbst sind; und da $JH$ parallel zu den Meridiantangenten, $JA_1$ die $8_1$ ist, so muß $JA$ parallel zur Tangente an 8 in $A$, oder viemehr diese selbst sein.

Aus dieser Tangente erhält man dann leicht *den Krümmungshalbmesser der Grundrißlichtgleiche in ihrem Scheitel* $A$ nach dem Verfahren der Nr. 57, indem man $AJ$ mit $a$ in $L$ schneidet und $LK \perp a$ bis zu $K$ auf der Meridiantangente $AK$ zieht; $LK$ ist dann der gesuchte Krümmungshalbmesser.

**215.** *Die Lichtgleichen der Umdrehungsflächen zweiten Grades* werden im allgemeinen am zweckmäßigsten nach dem allgemeinen Verfahren für Umdrehungsflächen konstruirt. Wir werden später auch die den Flächen zweiten Grades eigentümlichen Eigenschaften der Lichtgleichen kennen lernen. Nur bei dem Umdrehungsparaboloide ist die Auflösung einfacher, als bei anderen Flächen zweiten Grades, abgesehen von der Kugel und dem Kegel.

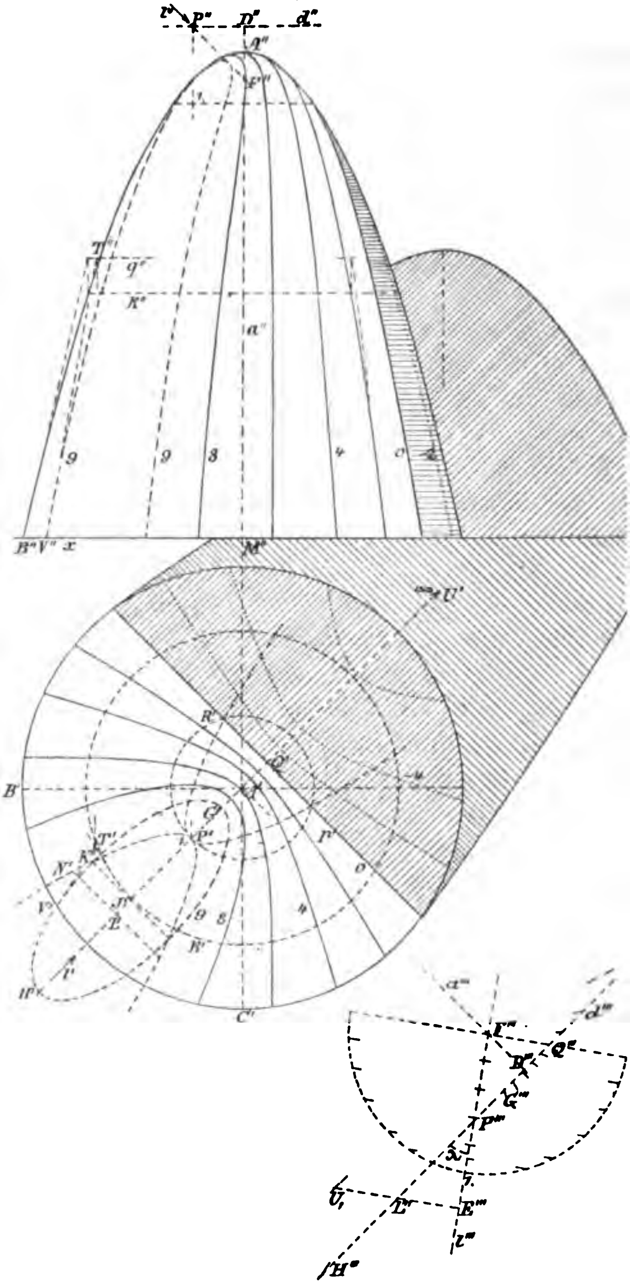
*Aufg. Die Lichtgleichen eines Umdrehungsparaboloides zu bestimmen.*

*Aufl.* Sei $A$ der Scheitel der Fläche, $a$ ihre senkrecht zu $\mathbf{P}_1$ gestellte Umdrehungsaxe, $F$ ihr Brennpunkt, sei auf $a$ die $AD = FA$ aufgetragen, so ist die durch $D \perp a$ gelegte Ebene, deren zweite Projektion $d''$ ist, die Leitebene der Fläche, welche die Leitlinien der Meridianparabeln enthält; endlich sei der Kreis $B'C'$ die erste Spur der Fläche. Projicirt man einen beliebigen Punkt $S$ (nicht gezeichnet) der Fläche auf die Leitebene nach $S'$, so ist $S'F$ parallel mit der Flächennormale in $S$ (I, 220), daher müssen für alle Punkte $S$ einer Lichtgleiche die $S'F$ gleiche Winkel mit dem Lichtstrahle bilden, und daher *ist die Projektion einer Lichtgleiche des Umdrehungsparaboloides auf seine Leitebene der Schnitt dieser Ebene mit dem der Helligkeit der Lichtgleiche zugehörigen Normalkegel, dessen Spitze im Brennpunkte der Fläche liegt. Die Grundrißlichtgleichen sind daher ein Büschel von Kegelschnitten,* nämlich die ersten Projektionen des Schnittes der Leitebene mit dem aus $F$ als Mittelpunkt gelegten Büschel der Normalkegel. Fig. 106.

Zur Konstruktion lege man die Lichtmeridianebene in eine zu

$P_1$ paralle Ebene um; dabei gelangt $a$ nach $a'''$ oder $A'F'''$ ($\perp l'$), $F$ nach $F'''$ ($A'F'''$ beliebig groß), $D$ nach $D'''$ ($F'''D''' = F''D''$),

Fig. 106.



$d$ nach $d'''$ ($\perp a'''$ durch $D'''$), und wenn der durch $F$ gelegte Lichtstrahl $l$ die Leitebene in $P$ trifft, gelangt $P$ nach $P'''$, $l$ nach

$l''' = F'''P'''$, wobei $\sphericalangle d'''l''' = \lambda$. $l'''$ ist dann in der Umlegung die Axe des Normalkegelbüschels, dessen Schnitt mit der Lichtmeridianebene der Normalbüschel ist. Die Schnittpunkte seiner Strahlen mit $d'''$ bestimmen dann die *Scheitel der Hauptaxen* der Grundrißlichtgleichen. Die Normalkegel 1. und 0 sind bezw. die Gerade $l$ und die darauf senkrechte Ebene, ihre Schnitte mit der Leitebene bezw. der Punkt $P$ und eine Gerade ($\perp l$), aus denen der Punkt 1. und die Grenzlichtgleiche 0 sich ergeben; letztere ist im Grundriß eine Gerade $p' \perp l'$, und im Raume eine zur Meridianparabel kongruente Parabel mit dem Scheitel $Q$. $G$ und $H$ sind die Scheitel der hier zugefügten Lichtgleiche 9.

Die Nebenaxe einer Grundrißlichtgleiche, z. B. der $G'H'$, liegt in der durch den Mittelpunkt $J$ von $GH$ senkrecht zur Lichtmeridianebene geführten Geraden und kann durch deren Schnittpunkte mit dem Paraboloide oder in der Projektion auf die Leitebene durch die Schnittpunkte mit dem Normalkegel begrenzt werden; einer der Grenzpunkte ist $K$.

Je nachdem diese Schnittpunkte reell oder imaginär sind, ist auch die Nebenaxe reell oder imaginär und der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel; im letzteren Falle wird die ideelle Nebenaxe verzeichnet. Wir werden sogleich ein förderlicheres Verfahren zu ihrer Bestimmung angeben.

**216.** Da die Grundrißlichtgleichen perspektiv dem Schnitte des Normalkegelbüschels mit einer zu seiner Axe senkrechten Ebene sind, da ferner dieser Schnitt aus einem Büschel koncentrischer Kreise besteht, und da endlich ihrem Mittelpunkte der Punkt $P'$ und ihrer unendlich fernen Geraden die Gerade $p'$ entspricht, so folgt *für das Kegelschnittbüschel der Grundrißlichtgleichen*: 1) $P'$ und $p'$ sind Pol und Polare für jede derselben; 2) je zwei derselben sind perspektiv und haben $P'$ zum Mittelpunkte und $p'$ zur Axe der Kollineation. Durch diese Eigenschaft ist es möglich, aus einer der Kurven, und aus einem Punkte jeder anderen, etwa einem Scheitel auf $A'P'$, diese zu konstruiren, was aber nicht ausgeführt wurde; 3) die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels sind die imaginären Doppelpunkte der gemeinsamen Involution auf $p'$ mit den imaginären Tangenten in diesen Punkten, welche durch $P'$ gehen; 4) *die Scheitel $K'$ der Nebenaxen der Kegelschnitte liegen auf einer Parabel*, deren Scheitel $P'$, deren Axe $l' = A'P'$ ist, und von welcher man einen Punkt $N'$ erhält, wenn man auf $l'$ die $P'L' = Q'P'$ aufträgt und $L'N' \perp l'$ und $= F'''Q'''$ zeichnet. Denn jene Scheitel der Grundrißlichtgleichen sind ihre Berührungspunkte mit Tangenten, die aus dem unendlich fernen Punkte $U'$ der $l'$ gezogen

Fig. 106. werden; sie entsprechen daher in dem Kreisbüschel den Berührungspunkten der koncentrischen Kreise mit Tangenten aus dem Punkte $U_1$, welcher dem Punkte $U'$ entspricht. Denkt man sich die koncentrischen Kreise in einer Ebene, welche die $l$ in dem Punkte $E$ (dem Mittelpunkte der Kreise) schneidet, derart, daß $P'''E''' = F'''P'''$, so ist die Gerade $E'''L'''$ ($\perp l'''$) die dritte Projektion der Kreise, und $U_1$ ist derjenige Punkt der $E'''L'''$, für welchen $F'''U_1 \parallel d'''$. Alle jene Berührungspunkte der koncentrischen Kreise liegen aber auf dem Kreise, welcher $EU_1$ zum Durchmesser hat und dessen Ebene $\perp l$ steht, dessen Mittelpunkt ($L'$, $L'''$) ist, weil $P'''L''' = Q'''P'''$, und dessen Halbmesser $= L'''E''' = L'''U_1 = F'''Q'''$ ist. Die Projektion dieses Kreises aus $F$ auf die Leitebene enthält dann die Scheitel der Nebenaxen der Grundrißlichtgleichen; sie ist aber die vorhin angegebene Parabel, weil $E$ und $U_1$ sich in $P'$ und $U'$ projiciren, weil $P'L' = Q'P' = P'''L'''$ gemacht wurde, und daher $N'$ (für $L'N' = F'''Q'''$) einen Schnittpunkt jenes Kreises mit der Leitebene bildet. Da ferner die ideellen Punkte dieser Parabel die mit der reellen Kurve in Bezug auf die Axe $l'$ konjugirte, also mit ihr in Bezug auf den Scheitel $P'$ symmetrische Parabel bilden (s. I, 402), so ist diese ideelle Parabel durch $Q'R' \perp l'$ und $= F'''Q'''$ bestimmt. Bei unserer Annahme von $l$ ($\sphericalangle xl' = \sphericalangle xl'' = 45^0$) ist $R'$ auch ein Schnittpunkt des aus $A'$ durch $P'$ gezogenen Kreises mit $p'$, weil $A'Q'^2 + Q'R'^2 = A'P'^2$ oder $D'''Q'''^2 + F'''Q'''^2 = D'''P'''^2$. Denn es ist $\operatorname{tg}^2 \lambda = \operatorname{tg}^2 D'''P'''F''' = \frac{1}{2}$; daher $D'''P'''^2 = 2D'''F'''^2 = 4D'''Q'''^2$, $F'''Q'''^2 = 3D'''Q'''^2$, woraus die Behauptung folgt. — Ist der Mittelpunkt einer Grundrißlichtgleiche nicht erreichbar, so konstruirt man sie als Schnittkurve des Normalkegels mit der Leitebene.

Die *Aufrisse* der Lichtgleichen erhält man durch Übertragen der Punkte von Parallelkreisen ($k$). Die Tangente einer Lichtgleiche (z. B. der 9) in ihrem Punkte $V$ liegt in der Berührungsebene der Fläche **F** in $V$ und hat zum Grundrisse die Tangente der Grundrißlichtgleiche, eines Kegelschnittes. **F** wird entlang des durch $V$ gehenden Parallelkreises von einem Kegel berührt; projicirt man auf diesen Kegel durch Parallele zu $a$ einen anderen Parallelkreis $k$ in den Kreis $q$, so wird dessen Ebene von der Berührungsebene der **F** in $V$ in einer Geraden getroffen, deren Grundriß eine $\perp A'V'$ gezogene Tangente an $k'$ ist. Wird diese von der Tangente der Grundrißlichtgleiche (9) in $T'$ getroffen, so ist $V''T''$ die gesuchte Tangente, wenn man $T'$ nach $T''$ auf $q''$ projicirt hat.

Die *Schlagschatten* auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ sind Parabeln. Der Scheitel der letzteren ist der Schatten des Schnittpunktes der Grenzlicht-

gleiche 0 mit der auf $P_2$ senkrechten Meridianebene, weil die Berührungsebene der $F$ in diesem Punkte ‖ $x$ ist.

**217.** *Aufg. Von einer Umdrehungsfläche, deren Axe a auf der Grundrißebene senkrecht steht, sind gegeben der Grundriß M' der Axe, derjenige k der Grenzlichtgleiche (Eigenschattengrenze), ferner der Lichtstrahl l (l', gehend durch M', und l''), man soll die Grundrisse der anderen Lichtgleichen und den Aufriß der Fläche und der Lichtgleichen bestimmen*).*

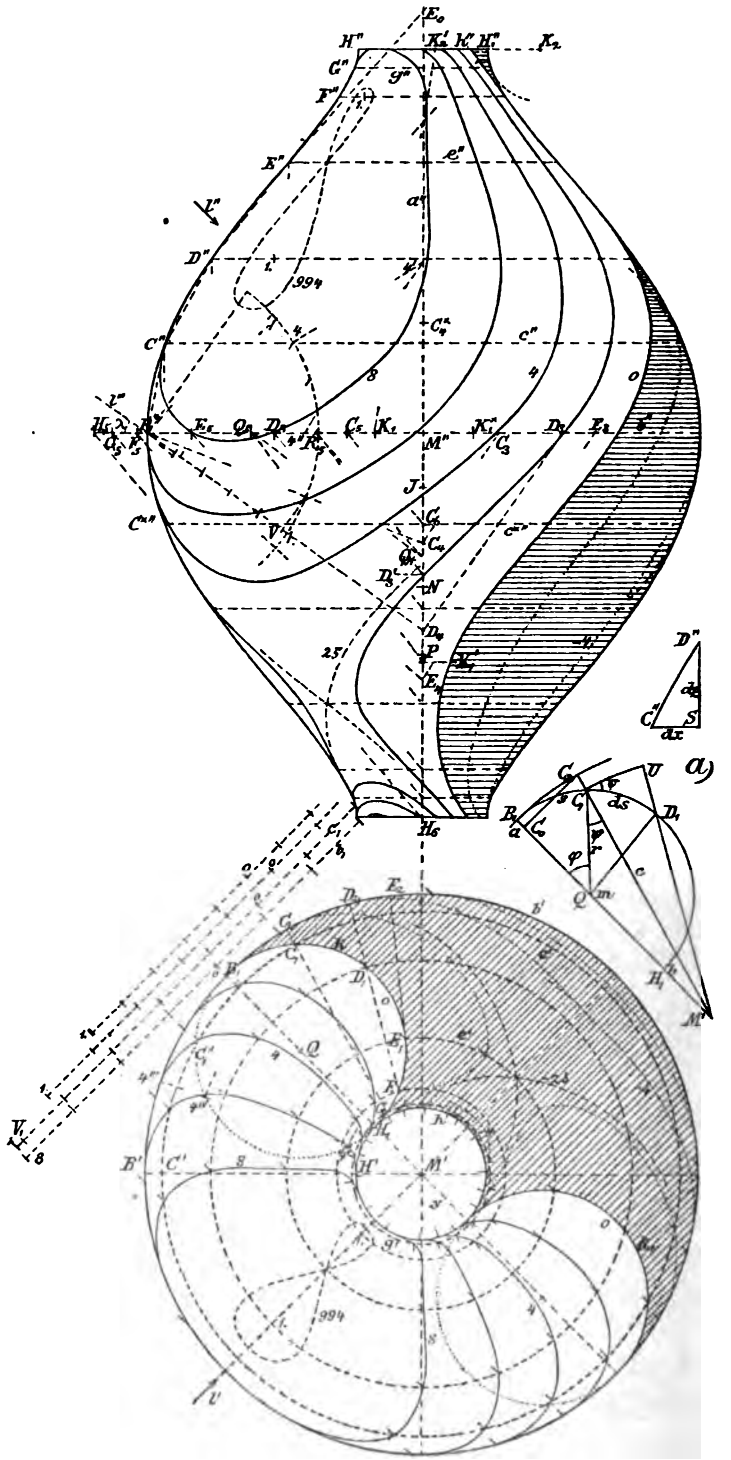
*Aufl.* Da der Grundriß der Grenzlichtgleiche die $l'$ zur Symmetrieaxe haben muß, so ist es notwendig, wenn dies für die gegebene Grenzlinie $k$ nicht stattfindet, dieselbe durch eine in Bezug auf $l'$ symmetrische Linie $k_1$ zur vollständigen Schattengrenze zu ergänzen. In dem Beispiele seien $k$ und $k_1$ zwei in Bezug auf $l'$ symmetrische Kreise, deren Mittelpunkte, wie $Q$ von $k$, auf der durch $M'$ senkrecht zu $l'$ geführten Geraden $y$ liegen. — Die Fläche reicht im allgemeinen nur so weit, wie die von der Grenzlichtgleiche geschnittenen Parallelkreise. Ist die Grenzlichtgleiche nicht durch eine regellos gezeichnete Linie, sondern durch eine Kurve von bekanntem Entstehungsgesetze gegeben, so kann man, wenn sie nicht alle Parallelkreise schneidet, die Meridianlinie durch Umformung ihres Entstehungsgesetzes, z. B. durch Bestimmung ihrer Gleichung, vervollständigen. Fig. 107.

Die Auflösung unserer Aufgabe stützt sich nun auf den Gedanken, daß in jedem Punkte $C_1$ der $k$ die Stellung der Berührungsebene der Fläche gegeben ist, indem diese Ebene die Tangente des durch $C_1$ gehenden Parallelkreises in $C_1$ und einen Lichtstrahl enthalten muß. Dadurch ist aber der entlang des Parallelkreises berührende Kegel, und durch diesen sind die Lichtgleichenpunkte auf diesem Parallelkreise und die Gestalt der Fläche bestimmt.

**218.** Suchen wir demgemäß für einen beliebigen Parallelkreis $c$ die Richtung der Tangente des Hauptmeridians in dessen Schnittpunkte $C$ mit $c$, und die Lichtgleichenpunkte auf $c$. Der Kreis $c'$ schneidet den $k$ in zwei Punkten, $C_1$ und $C_1^*$, und der Umdrehungskegel, welcher die Fläche entlang $c$ berührt, hat daher die Erzeugende $M'C_1$ oder $M'C_1^*$ zu einer Eigenschattengrenze. Verschieben wir zunächst den ersteren dieser Kegel in der Richtung der Axe $a$, bis er einen für alle derartige Kegel übereinstimmenden Parallelkreis in sich aufnimmt, etwa den größten $b$ der Fläche, welcher $M$ (auf $a$) zum Mittelpunkte und $MB$ (= $MB_1$) zu einem mit $P_2$ paral-

*) Diese Aufgabe wurde analytisch gelöst von Herrn *Burmester* in seiner Theorie u. Darst. der Beleuchtung, S. 191—195.

Fig. 107.



lelen Halbmesser hat, so bleibt der Grundriß des Kegels ungeändert. Schneidet man $M'C_1$ mit $b'$ in $C_2$ und dreht die Fläche samt $l$ um $a$, bis der Lichtmeridian in den Hauptmeridian gelangt, so kommt $C_2$ im Aufriß nach $C_3$ auf $b''$, wenn $M''C_3 =$ Abstand $(C_2, y)$ ist (wobei $y$ durch $M' \perp l'$ gezogen wurde), und der Lichtstrahl nach $l'''$ (durch $B''$ geführt), welche Linie die erste Grundneigung $\lambda$ zeigt. Zieht man dann $C_3C_4 \perp l'''$ bis $C_4$ auf $a''$, so ist $B''C_4$ eine Normale jenes die Fläche nach $c$ berührenden Kegels (Nr. 202, Fig. 95). Den Stärkemaßstab für den Kreis $c$ des Kegels zeichnet man auf einer Parallelen $c_1$ zu $l'$, indem man auf $c_1$ den Punkt $C_1$ nach 0, einen Punkt $c'l'$ nach $V_1$ projicirt, und die Helligkeit dieses Punktes $c'l'$ nach Nr. 204 mit Hilfe des Normalbüschels ermittelt, das man mit $l'''$ als Axe und $B''$ als Mittelpunkt zeichnet. Schneidet man nämlich die Normale $B''C_4$ des Kegels mit dem Kreise des Büschels in dem jenem Punkte $c'l'$ entsprechenden Punkte und projicirt den Schnittpunkt auf $l'''$ nach $V$, so gibt dieser Punkt auf dem Stärkemaßstabe $B''1.$ die Helligkeit von $c'l'$ an. Trägt man dann auf $c_1$ die Strecke 0 1. so auf, daß $0\,1. : 0\,V_1 = B''1. : B''V$, und teilt 0 1. in fünf (oder zehn) gleiche Teile, so ist der Stärkemaßstab für $c$ gebildet.

Für $C_1^*$ erhalten $C_3$ und $C_4$ die entgegengesetzten Lagen gegen $M''$, wodurch $C_4^*$ bestimmt ist. Indem $M'C_1$ den Kreis $k$ noch in einem zweiten Punkte $G_1$ schneidet, durch welchen der Parallelkreis $g$ der Fläche geht, gelten für $c$ und $g$ dieselben Punkte $C_2$, $C_3$, $C_4$, so daß $B''C_4$ auch eine Normale des die $\mathbf{F}$ nach $g$ berührenden Kegels ist. Die Lichtgleichenpunkte von $g$ liegen daher mit den entsprechenden von $c$ im Grundriß auf denselben Strahlen aus $M'$. Auf gleiche Weise sind auf verschiedenen Parallelkreisen, insbesondere dem größten $b$ und dem kleinsten $h$ die Lichtgleichenpunkte bestimmt.

Läßt man die Sehne $M'C_1$ des $k$ zu einer Tangente mit dem Berührungspunkte $E_1$ werden, so erhalten $E_2$ von $y$ und $E_3, E_4$ von $M''$ größte Abstände, die Normale $B''E_4$ daher eine größte und die zugehörige Tangente des Meridianes eine kleinste Neigung gegen $\mathbf{P}_1$. Die Meridiane besitzen daher in den Punkten $E$ des durch $E_1$ gehenden Parallelkreises $e$ *Wendepunkte.*

Um im Grundriß auf dem *Lichtmeridiane* $l'$ die Punkte der verzeichneten Lichtgleichen zu erhalten, geht man den umgekehrten Weg. Man zieht im Normalbüschel z. B. für die Lichtgleiche 4 den Strahl $B''4$ bis $4'$ auf $a''$, zeichnet $4'4'' \perp l'''$ bis $4''$ auf $b''$, bestimmt auf $b'$ den Punkt $4'''$, dessen Abstand von $y = M''4''$, zieht $M'4'''$, schneidet sie mit $k$ in $4^{IV}$ und $4^{V}$, so treffen die durch

Fig. 107. diese Punkte gezogenen Parallelkreise die $l'$ in den vier Punkten der Lichtgleichen 4 und — 4.

Auf diese Weise sind auch die hellsten Punkte 1. bestimmt; dieselben liegen auf den Parallelkreisen von $D_1$ und $F_1$, wenn $D_4 = l'''a''$ ist. Auf umgekehrtem Wege sind die Helligkeiten in den Wendepunkten des Lichtmeridianes = 0,994 und 0,25 ermittelt.

Die Wendepunkte des Lichtmeridianes sind Punkte kleinster Helligkeit auf ihrem Meridiane und Punkte größter Helligkeit auf ihren Parallelkreisen; sie bilden *Doppelpunkte auf den Lichtgleichen* ihrer Helligkeit (994 und 25), weil die durch sie gehenden Lichtgleichen in jeden der vier von Meridian und Parallelkreis gebildeten Quadranten hineingehen müssen; dieselben sind verzeichnet mittelst ihrer Punkte auf dem Lichtmeridiane und auf den Parallelkreisen der Punkte 1.

**219.** *Verzeichnung des Hauptmeridianes.* Der zu jedem Punkte $C'$ seines Grundrisses gehörige Punkt $C''$ (und $C^{*''}$) liegt auf der durch $C' \parallel a''$ gezogenen Geraden, wird aber auf derselben nicht durch eine zweite durch $C''$ gehende Linie, sondern durch die Richtung der Meridiantangente in $C''$ ($\perp B''C_4$) bestimmt. Da man die unendlich kleinen Elemente, welche die Kurve unmittelbar zusammensetzen, nicht zeichnen kann, so muß man, um an einen gegebenen Punkt $B''$ einen anderen $C''$ in endlichem, aber nicht großem Abstande anzureihen, im allgemeinen die Richtung der Sehne $B''C''$ annäherungsweise bestimmen. Denkt man sich durch $B''$ die Tangente in $B''$, die Sehne $B''C''$ und eine Parallele zur Tangente in $C''$ gezogen, so wird, wenn man sich die unbekannte Kurve durch einen Kreisbogen ersetzt vorstellt, die Sehne den Winkel der beiden Tangentenlinien halbiren; wenn aber durch eine Parabel von angenommener Axenrichtung, so wird die Sehne die Strecke halbiren, welche die beiden Tangentenlinien auf irgend einer mit der Axe parallelen Geraden abschneiden (I, 361), oder, wenn man Senkrechte zu der Sehne und den Tangentenlinien durch $B''$ gezogen denkt, wird die erstere die Strecke halbiren, welche die letzteren auf irgend einer Senkrechten zur Axenrichtung abschneiden. Die Parabelannahme ist als zweckmäßiger für die Genauigkeit vorzuziehen, wenn der Sinn der Abnahme der Krümmung auf dem Bogen bekannt ist und dementsprechend die Richtung der Axe schätzungsweise gewählt werden kann. Da nun $B''M''$ eine Symmetrielinie der Meridiankurve sein und die Krümmung von $B''$ gegen den Wendepunkt $E''$ hin abnehmen muß, so ist es angemessen, $B''M''$ als Parabelaxe anzunehmen; $a''$ ist eine Senkrechte zu ihr, auf welcher die aus $B''$ senkrecht zu den Tangentenlinien gezogenen Ge-

raden (die Normalenlinien) die Strecke $M''C_4$ abschneiden; daher ist $B''J$ die Senkrechte zur Sehne $B''C''$, wenn $J$ die Mitte von $M''C_4$, und hierdurch ist $C''$ auf $C'C''$ bestimmt.

Wenige passend auf $k$ gewählte Punkte, die paarweise auf Strahlen aus $M'$ liegen, genügen zur Verzeichnung des Hauptmeridians. Es sind dies die Punkte $B_1$, $H_1$ des größten und kleinsten Parallelkreises, der Berührungspunkt $E_1$ der Tangente aus $M'$, die Punkte $D_1$, $F_1$ der Parallelkreise mit den Punkten 1., und ein Paar allgemeiner Punkte $C_1$, $G_1$. Aus ihnen erhält man auf $a''$ die Punkte $M''$, $C_4$, $D_4$, $E_4$; und sind $J$, $N$, $P$ bezw. die Mitten von $M''C_4$, $C_4D_4$, $D_4E_4$, so sind die Sehnen $B''C''$ und $H''G'' \perp B'J$; $C''D''$ und $G''F'' \perp B''N$; $D''E''$ und $F''E'' \perp B''P'$; und dadurch ist der Meridian bestimmt.

**220.** Man kann aber in unserem Falle *den Hauptmeridian auch leicht durch die Koordinaten seiner Punkte verzeichnen*, wobei wir $M''$ als Ursprung, $M''B''$ als $x$Axe, $a''$ als $z$Axe annehmen wollen. Setzt man (Fig. 107, a)) $M'B_1 = a$, $M'H_1 = b$, $M'Q = m = \frac{1}{2}(a + b)$, $QB_1 = r$, $M'C_1 = c$, $\sphericalangle B_1QC_1 = \varphi$, $\sphericalangle QC_1M' = \psi$, die Koordinaten von $C''$ gleich $x$ und $z$, den zugehörigen Bogen $B_1C_1 = s$, so sind, wenn $C''D''$ und $C_1D_1$ zusammengehörige Elemente des Meridians und des $k$ bilden, die Zunahmen von $x$, $z$, $s$ bezw. $dx = -SC''$, $dz = SD''$, $ds = C_1D_1$. Da (das Element) $C''D'' \perp B''C_4$, so sind $SC''D''$ und $M''C_4B''$ ähnliche Dreiecke, woraus folgt $SD'' : SC'' = M''B'' : M''C_4$. Es ist aber $SD'' = dz$; $SC'' = -dx = -UD_1 = -C_1D_1 \sin\psi = -ds \sin\varphi \,.\, m : c$, letzteres aus dem Dreiecke $C_1QM'$; $M''B'' = a$; $M''C_4 = M''C_3 : \operatorname{tg}\lambda = -C_0C_2 : \operatorname{tg}\lambda = -r \sin\varphi\,(a : c) : \operatorname{tg}\lambda$; daher durch Einsetzen dieser Werte in obige Proportion

$$dz = ds\,\frac{m \operatorname{tg}\lambda}{r},$$

und durch Addition der $dz$ und der $ds$, da $m$, $r$, $\lambda$ unveränderlich,

$$z = s \cdot \frac{m \operatorname{tg}\lambda}{r}.$$

Man bestimmt daher auf $a''$ die Punkte der $c''$, $d''$ ... oder der $c^{*\prime\prime}$ ..., indem man auf $M''B''$ die Punkte $C_5$, $D_5$, ... $H_5$, $Q_5$, $R_5$ derart aufträgt, daß $M''C_5 =$ Bogen $B_1C_1$, $M''D_5 =$ Bog. $B_1D_1$, ... $M''H_5 =$ Bog. $B_1H_1$, $M''Q_5 = M'Q = m$, $M''R_5 = QB_1 = r$ sind, und $Q_5Q_4 \parallel l'''$ bis $Q_4$ auf $a''$ zieht; dann schneiden die durch $C_5$, $D_5$ ... $H_5$ gezogenen Parallelen zu $R_5Q_4$ die $a''$ in den gesuchten Punkten $C_6$ ... $H_6$. Denn es ist $M''Q_4 = m \operatorname{tg}\lambda$, $M''C_6 = M''C_5 \cdot M''Q_4 : M''R_5 = s \cdot m \operatorname{tg}\lambda : r = z$. Die $z$ sind auch gleich den Projektionen der zugehörigen Bogen von $k$ auf einen koncen-

trisch zu $k$ mit dem Halbmesser $m \operatorname{tg} \lambda = M''Q_4$ gezogenen Kreis, aus $Q$ als Projektionsmittelpunkt; und die ganze Höhe des Aufrisses $= 2\, M''H_6$ ist gleich dem Umfange dieses Kreises $= 2\pi \cdot M''Q_4$. Der Meridian wiederholt in der Richtung von $a$ unendlich oft die Form der gezeichneten doppelten Welle.

Der *Krümmungshalbmesser* $r_1$ *des Meridianes* im Punkte $B''$ ist bestimmt durch (208)

$$r_1 = \frac{ds^2}{2dx}.$$

Nun ist $\varphi = 0$, $ds = B_1 C_1$, und da hierfür $dx$ durch die obige Formel wegen $\sin \varphi = 0$ nicht angegeben wird, ermittelt man $dx = C_2 C_1$ (Fig. $a$) als Unterschied der Abstände der Punkte $C_2$ und $C_1$ von der Tangente des $k$ in $B_1$, und erhält

$$dx = C_2 C_1 = \frac{ds^2}{2r} - \frac{ds^2}{2a} = \frac{ds^2}{2}\,\frac{a-r}{ar} = \frac{ds^2.m}{2ar}.$$

Dies verbunden mit den Ausdrücken von $dz$ und $r_1$ liefert

$$r_1 = \frac{am}{r} \operatorname{tg}^2 \lambda.$$

Den *Krümmungshalbmesser* $r_2$ in $H''$ erhält man, wenn man $a$ durch $b$ und, wegen entgegengesetzter Lage von $k$ gegen den Kreis von $H$, $r$ durch $-r$ ersetzt,

$$r_2 = -\frac{bm}{r} \operatorname{tg}^2 \lambda = -\frac{b}{a} r_1.$$

Da nun $M''Q_5 = m$, $M''R_5 = r$, so ist, wenn man auf $a''$ die $M''D_3' = M''D_3 = M''D_4 \cdot \operatorname{tg} \lambda = a \operatorname{tg}^2 \lambda$ aufträgt, auf $a''$ die $M''K_1' = r_1$, wenn $Q_5 K_1' \parallel R_5 D_3'$ gezogen wird. Daher ist $K_1$ der Krümmungsmittelpunkt für $B''$ ($B''K_1 = M''K_1'$). Der Krümmungshalbmesser $H_1''K_2 = r_2 = -H_1''K_2'$ wird gefunden, wenn man $K_1 K_2'$ durch den Schnittpunkt von $B''H_1''$ mit $a''$ zieht.

Die *Aufrisse der Lichtgleichen* werden durch Übertragen der Punkte der Parallelkreise aus dem Grundrisse erhalten. Ihre Tangenten in den Punkten des Parallelkreises $e''$ laufen nach der Spitze $E_0$ des der F nach $e$ umschriebenen Kegels ($E''E_0 \perp B''E_4$), weil die entsprechenden Tangenten im Grundriß nach $M'$ laufen.

# VI. Abschnitt.

## Der Durchschnitt krummer Flächen mit krummen Flächen und krummen Linien.

### I. Allgemeines.

**221.** *Das allgemeine Verfahren zur Bestimmung der Schnittlinie zweier krummen Flächen* stützt sich auf die früher ausgeführte Konstruktion der Schnittlinie einer krummen Fläche mit einer Ebene und besteht darin, daß man zweckmäßig gewählte Hilfsebenen legt, jede derselben mit jeder der beiden Flächen schneidet, die Schnittpunkte zweier solchen in derselben Hilfsebene liegenden Schnittlinien als Punkte der gesuchten Schnittkurve bezeichnet und diese Punkte in der Reihenfolge der Hilfsebenen verbindet. Befinden sich, wie gewöhnlich, in jeder Hilfsebene mehrere solcher Punkte, so verbindet man einen Punkt der einen Ebene mit demjenigen der folgenden, in welchen er bei Verschiebung der Hilfsebene übergeht; worüber die Entscheidung durch die von der Erzeugenden jeder Fläche auf ihrer Leitlinie beschriebene Bahn getroffen wird.

Die *Hilfsebenen sind zweckmäßig*, wenn ihre Schnittlinien mit den gegebenen Flächen oder deren Projektionen leicht und genau verzeichnet werden können. Es sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Diese *Schnittlinie ist stets leicht zu konstruiren*, wenn die Hilfsebene senkrecht auf einer Projektionsebene steht.

2) Die Schnittlinie ist *leicht und sicher zu verzeichnen*, wenn sie eine Gerade, oder wenn sie oder ihre Projektion ein Kreis ist. Ist sie selbst ein Kreis, aber nicht parallel zu einer Projektionsebene **P**, so kann man den Kreis vor der Projektion in eine zu **P** parallele Lage drehen, oder man kann ihn schief als Kreis projiciren; ist die Schnittlinie ein nicht mit einer Projektionsebene paralleler Kegelschnitt, so kann man ihn aus einem im Endlichen oder im Unendlichen liegenden Punkte als Kreis projiciren.

3) *Man vermeidet die Verzeichnung der Schaar von Schnittlinien* der Hilfsebenen mit der einen Fläche, wenn man sie aus ein und

demselben oder aus wechselnden Punkten in eine feste, nur einmal zu verzeichnende, oder, noch besser, in eine schon aus anderen Gründen verzeichnete Kurve projiciren kann. — Für alle diese Fälle werden Beispiele gegeben werden.

*Hilfsebenen* führen immer zum Ziel; ebenso könnten Hilfscylinder, welche senkrecht zu einer Projektionsebene gestellt, und etwa durch die Erzeugenden der einen Fläche gelegt würden, stets angewendet werden, ohne daß aber ein vorteilhafter Fall bekannt wäre. Von anderen *krummen Hilfsflächen* erweist sich in einem Falle die Kugel als höchst vorteilhaft.

**222.** *Die Tangente der Schnittkurve zweier Flächen in einem Punkte derselben ist die Schnittlinie der Berührungsebenen der Flächen in diesem Punkte,* weil sie in jeder von beiden liegt. Hierdurch ist ihre Konstruktion gegeben. *Die Normalebene der Schnittkurve* in einem ihrer Punkte ist die Ebene der Normalen beider Flächen in diesem Punkte. Tangente und Normalebene bestimmen sich als auf einander senkrecht auch gegenseitig, und manchmal ist die Bestimmung der Tangente vermittelst der Normalebene einfacher als die unmittelbare.

**223.** *Die Schnittpunkte einer krummen Fläche mit einer krummen Linie* erhält man, wenn man durch die Linie eine Hilfsfläche legt und dieselbe mit der gegebenen Fläche schneidet; die Schnittpunkte der Schnittkurve mit der gegebenen Kurve sind die gesuchten Punkte. Als Hilfsfläche legt man zweckmäßig einen projicirenden Cylinder oder Kegel durch die Kurve, oder man benutzt ihre Ebene, wenn sie eben ist.

## II. Der Durchschnitt von Cylindern und Kegeln untereinander.

### a) Die allgemeineren Aufgaben.

**224.** Legt man bei Kegeln die Hilfsebenen durch beide Spitzen, so schneiden sie beide Flächen in Erzeugenden. Beim Cylinder fällt die Spitze ins Unendliche, und die Hilfsebene wird mit der Richtlinie und den Erzeugenden parallel.

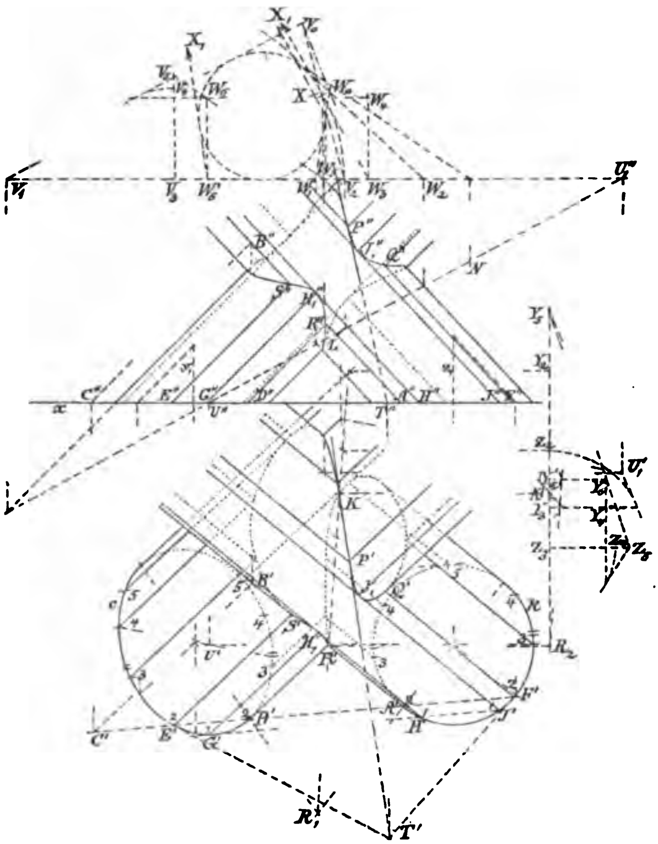
*Aufg. Die Schnittlinie zweier Cylinder vermittelst der gleichnamigen Spuren derselben zu bestimmen.*

Es seien ihre ersten Spuren $c$ und $k$ (eine Ellipse und ein Kreis) gegeben. Liegen die Leitlinien nicht in derselben Projektionsebene, so kann man zuerst gleichnamige Spuren oder die Schnitte beider Flächen mit irgend einer passenden Ebene konstruiren, z. B. mit einer solchen, in welcher eine der Leitlinien

schon liegt, welche Ebene dann an die Stelle von $\mathbf{P}_1$ in unserem Falle tritt, und kann dann ebenfalls das folgende Verfahren anwenden.

*Aufl.* Man lege durch einen Punkt $B$ einer Erzeugenden $AB$ Fig. 108.
des einen Cylinders eine Parallele $BC$ zu den Erzeugenden des anderen, bestimme die ersten Spuren $A$ und $C$ beider Geraden, so ist $AC$ die erste Spur einer mit den Erzeugenden beider Cylinder parallelen Hilfsebene, mit der alle anderen parallel gelegt werden.

Fig. 108.



$A'C'$ schneidet $c$ und $k$ in je zwei Punkten $E'$, $D'$ und $A'$, $F'$, also schneidet die Hilfsebene die Cylinder in ihren bezw. durch diese Punkte gehenden Erzeugenden, von denen die des einen die des anderen in vier der Schnittkurve angehörigen Punkten $P$, $Q$, $R$, $S$ treffen. Man bestimmt dieselben am besten in jeder Projektion selbständig und hat dann die Probe $P'P'' \perp x$ u. s. w.

*Ausgezeichnete Punkte* liegen in den zwei äußersten Hilfsebenen und in den Umrissen der Cylinder. Die *äußersten Hilfsebenen* be-

rühren den einen Cylinder, während sie den anderen im allgemeinen schneiden oder in besonderem Falle ihn ebenfalls berühren. Von der einen dieser Ebenen ist $G'H'J'$ die erste Spur, welche $c$ in $G'$ berührt, $k$ in $H'$ und $J'$ schneidet. Sie liefert statt vier nur zwei Punkte $H_1$ und $J_1$ der Schnittkurve, in denen diese von den Erzeugenden $HH_1$ und $JJ_1$ des geschnittenen Cylinders berührt wird, weil diese Geraden sowohl in der zugehörigen Berührungsebene des einen, als des anderen Cylinders liegen. Berühren beide äußersten Hilfsebenen denselben Cylinder, so *durchdringt* dieser den anderen in zwei getrennten Ästen der Schnittkurve, berühren sie die verschiedenen Cylinder, wie in unserem Falle, so *schneiden* sich beide Cylinder in einer zusammenhängenden Schnittkurve gegenseitig *aus*. Die *Punkte der Umrißlinien* werden durch Hilfsebenen erhalten, welche durch die Umrißerzeugenden gehen; in ihnen wird die Kurve im allgemeinen vom zugehörigen Umrisse berührt.

Hat man diese ausgezeichneten Punkte bestimmt, so sind in der Regel nur noch wenige Hilfsebenen in etwa gebliebenen weiten Lücken zu legen. — Um die konstruirten Punkte in der richtigen *Reihenfolge* zu verbinden, umfahre man die Spuren $c$ und $k$ so, daß die auf beiden gleichzeitig erreichten Punkte stets in derselben Hilfsebene liegen, und verbinde in derselben Reihenfolge die dadurch erhaltenen Punkte der Schnittkurve.

**225.** Die *Tangente* der Schnittkurve in ihrem Punkte $P$ wird gefunden, indem man in den ersten Spuren $E'$ und $F'$ der durch $P$ gehenden Erzeugenden beider Cylinder bezw. die Tangenten an $c$ und $k$ legt; sie sind die ersten Spuren der Berührungsebenen in $P$, und ihr Schnittpunkt $T$ ist die erste Spur der gesuchten Tangente $PT$. Fällt $T$ außerhalb der Zeichenfläche, so bestimmt man einen weiteren Punkt der Schnittlinie beider Berührungsebenen durch eine parallel zu $\mathbf{P}_1$ oder parallel zu den Hilfsebenen gelegte Hilfsebene.

Schneiden sich zwei Umrißlinien derselben Projektion, wie in der Figur in der ersten die von $A$ und $D$ ausgehenden in $R$, so stehen in $R$ die Berührungsebenen beider Flächen, daher auch die Tangente der Schnittkurve senkrecht auf $\mathbf{P}_1$, und die erste Projektion der Schnittkurve hat in $R'$ eine *Spitze* (I, 260).

**226.** Man bemerkt in jeder Projektion der Schnittkurve einen Doppelpunkt, so im Grundriß den $K$. Derselbe ist aber nicht die Projektion eines Doppelpunktes der Raumkurve, sondern die Projektion einer auf $\mathbf{P}_1$ senkrechten, oder allgemeiner, einer durch den Projektionsmittelpunkt gehenden Sehne der Kurve, und wird daher *scheinbarer Doppelpunkt der Raumkurve* genannt. Um diese Punkte bei *Cylindern zweiten Grades* zu konstruiren, beachte man, daß die

Mittelpunkte aller auf $\mathbf{P}_1$ senkrechten Sehnen eines Cylinders, oder allgemeiner, daß diejenigen Punkte aller nach dem Projektionsmittelpunkte $O$ gehenden Sehnen einer Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}$, welche von $O$ durch die Schnittpunkte mit $\mathbf{F}$ harmonisch getrennt werden, in der Polarebene des $O$ zu $\mathbf{F}$, d. i. auch in der Ebene der Umrißlinie von $\mathbf{F}$, liegen. Diese vierten harmonischen Punkte auf den nach den scheinbaren Doppelpunkten der Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades gehenden Sehnen aus $O$ müssen daher in der Schnittlinie der Polarebenen von $O$ zu jeder der beiden Flächen liegen.

Nun sind aber in unserem Falle für den *Grundriß* jene Polarebenen die Ebenen der Umrißerzeugenden, und ihre Spuren bezw. die durch $D$ und $A$ gehenden Durchmesser der $c$ und $k$. Ihr Schnittpunkt $R_1$ bildet einen und $R$ einen zweiten Punkt der Schnittlinie beider Polarebenen, da sich in unserem Falle in $R$ zwei Umrißerzeugende treffen. Daher liegt auf $R_1 R'$ jeder scheinbare Doppelpunkt des Grundrisses.

Für den *Aufriß* erhält man als erste Spuren der Ebenen der Umrißerzeugenden je einen Durchmesser von $c$ und $k$, welche sich in $U$ schneiden; für eine zweite mit $\mathbf{P}_1$ parallele Spurebene erhält man, wie die Figur zeigt, durch Parallele zu jenen Durchmessern den Punkt $U_1$, so daß $U'' U_1''$ die Gerade der scheinbaren Doppelpunkte ist.

**227.** Um nun auf jeder dieser Geraden die scheinbaren Doppelpunkte zu bestimmen, beachte man, und zwar zunächst im *Aufriß*, daß die projicirende Ebene von $U U_1$ jede $\mathbf{F}$ in einem Kegelschnitte, in unserem Falle in einer Ellipse, trifft, welche beide den (unendlich fernen) Projektionsmittelpunkt $O$ und $U U_1$ zu Pol und Polare haben, und deren vier Schnittpunkte sich aus $O$ in die beiden gesuchten scheinbaren Doppelpunkte projiciren. Bildet man von jenen Kegelschnitten die Parallelprojektion vermittelst Senkrechter zu $x$ auf eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Hilfsebene, derart daß aus $U U_1$ eine Parallele zu $x$ wird, so enthält diese Parallele die Axen $V_1 V_2$ und $W_1 W_2$ der Projektionen $v$ und $w$ der Kegelschnitte; die zweiten Halbaxen derselben $V_3 V_4$ und $W_3 W_4$ sind offenbar bezw. gleich den auf $\mathbf{P}_2$ senkrechten Halbdurchmessern von $c$ und $k$. Die vier Schnittpunkte von $v$ und $w$ und die gesuchten scheinbaren Doppelpunkte liegen nun nach I, 411 auf zwei Strahlen aus $O$, welche durch jede zwei in Bezug auf $v$ und $w$ konjugirte Punkte harmonisch getrennt und daher durch zwei solche Punktepaare bestimmt sind. Als erstes Punktepaar wählt man die auf $V_1 W_1$ liegenden Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polardreiecks von $v$ und $w$, welche

also durch $V_1$ und $V_2$, und durch $W_1$ und $W_2$ harmonisch getrennt sind. Da in der Figur $V_1$ und $V_2$ durch $W_1$ und $W_2$ getrennt werden, so sind jene Eckpunkte imaginär, was aber die Konstruktion nicht stört, da alle durch diese imaginären Punkte harmonisch getrennten Punkte oder Strahlen aus $O$ der Involution $V_1$, $V_2$; $W_1$, $W_2$ angehören. An einen berührend an $V_1 W_1$ gezeichneten Hilfskreis legt man Tangenten aus $V_1$, $V_2$, welche sich in $V_0$, solche aus $W_1$, $W_2$, welche sich in $W_0$ schneiden. Der Pol $X$ von $V_0 W_0$ zum Hilfskreise ist der Mittelpunkt der fraglichen auf den Kreis übertragenen Involution. — Als einen Punkt des zweiten Paares konjugirter Punkte zu $v$ und $w$ wähle man den Scheitel $W_4$ der $w$ und $W_6$. Es ist nämlich die Polare von $W_4$ zu $w$ die (mit $x$ parallele) Tangente der $w$ in $W_4$; die von $W_4$ zu $v$ ist $V_5 W_5$, wenn $V_5$ und $W_5$ bezw. die Pole der durch $W_4$ parallel und senkrecht zu $x$ gelegten Geraden sind; die beiden Polaren schneiden sich aber im Punkte $W_6$, der also zu $W_4$ konjugirt ist. Aus den Projektionen $W_3$ und $W_6'$ bezw. von $W_4$ und $W_6$ auf $V_1 W_1$ zieht man nun je eine zweite Tangente an den Hilfskreis; ihr Schnittpunkt $X_1$ ist dann der Mittelpunkt der durch die Doppelpunkte $W_3$, $W_6'$ bestimmten Involution (der Paare von Punkten, welche durch $W_3$, $W_6'$ harmonisch getrennt sind). Zieht man nun die Gerade $XX_1$, und aus ihren in unserem Falle reellen Schnittpunkten mit dem Hilfskreise dessen zwei Tangenten, so bestimmen diese auf $V_1 W_1$ die Punkte, welche aus $O$ auf $U'' U_1''$ in die gesuchten Doppelpunkte $L$ und $N$ projicirt werden. $L$ ist ein *eigentlicher Doppelpunkt*, $N$ ein *isolirter Punkt*, weil $OL$ eine reelle eigentliche, $ON$ eine reelle uneigentliche gemeinschaftliche Sehne von $v$ und $w$ ist.

228. Um im *Grundriß* (auf der Geraden $R_1 R'$) die scheinbaren Doppelpunkte zu bestimmen, bildet man wieder von den Schnittkurven der ersten projicirenden Ebene von $R_1 R$ mit den Cylindern eine Parallelprojektion auf eine auf $x$ senkrechte Ebene durch Projicirende $\parallel \mathrm{P}_2$, derart daß sich die $R_1 R$ in die zu $\mathrm{P}_1$ parallele $R_2 Y_2$ projicirt. Die in dieser Linie liegenden Axen der Projektionen $y$, $z$ der Kegelschnitte sind bezw. $R_2 Y_2$ und $R_2 Z_2$, deren Scheitel $R_2$ zusammenfallen, während die zweiten Halbaxen $Y_3 Y_4 = y_1$, $Z_3 Z_4 = z_1$ gleich den aus den Mittelpunkten von $c$ und $k$ senkrecht zu $\mathrm{P}_1$ bis zu den zugehörigen Cylinderflächen gezogenen Geraden sind. Von den in Bezug auf $y$ und $z$ konjugirten Punkten sind die in $R_2 Y_2$ gelegenen durch $R_2$, $Y_2$ und durch $R_2$, $Z_2$ harmonisch getrennt; sie fallen also beide in $R_2$ zusammen, oder sind $R_2$, $R_2$. Als zweites Paar wähle man den Scheitel $Y_4$ und seinen konjugirten Punkt $Y_6$, wobei von $Y_4$ die Polare zu $y$ die Tangente $Y_4 Y_6$

($\parallel R_2 Y_2$), und zu $z$ die $Y_5 Z_5$, der Schnittpunkt beider Polaren aber $Y_6$ ist. Die Projektionen von $Y_4$ und $Y_6$ auf $R_2 Y_2$ sind bezw. $Y_3$ und $Y_6'$. Die gesuchten Punkte müssen nun durch die Punkte eines jeden der beiden Paare harmonisch getrennt sein, also durch $R_2$ und $R_2$ (dies sind $R_2$ und jeder beliebige Punkt der $R_2 Y_2$) und durch $Y_3$ und $Y_6'$, sind also $R_2$ und der von $R_2$ durch $Y_3$ und $Y_6'$ harmonisch getrennte Punkt $K'$; und diese projiciren sich auf $R_1 R'$ in $R'$ und $K$. Die Spitze $R'$ ergibt sich also als ein scheinbarer Doppelpunkt; die Sehnenlänge ist bei ihm Null.

Man bemerkt, daß die Projektion der Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades *zwei scheinbare Doppelpunkte* besitzt, welche *reell* oder *imaginär* sind, je nachdem die gemeinschaftlichen Sehnen jener Kurven $v$, $w$ (oder $y$, $z$) durch den Projektionsmittelpunkt $O$ gehen oder nicht. Sind sie reell, so kann jeder der scheinbaren Doppelpunkte ein *eigentlicher Doppelpunkt*, ein *isolirter Punkt*, oder, als Übergang dieser beiden in einander, eine *Spitze* sein.

**229.** *Übungsaufg.* Die Projektionen eines Punktes zu bestimmen, der von drei beliebigen gegebenen Geraden gegebene Abstände besitzt. (Vermittelst des Schnittes dreier Umdrehungscylinder; acht Auflösungen.)

**230.** *Aufg. Die Schnittlinie eines Cylinders und eines Kegels zu ermitteln, deren Leitlinien in verschiedenen Ebenen liegen.* Es soll der Fall gewählt werden, daß *beide Flächen eine gemeinschaftliche Berührungsebene* besitzen.

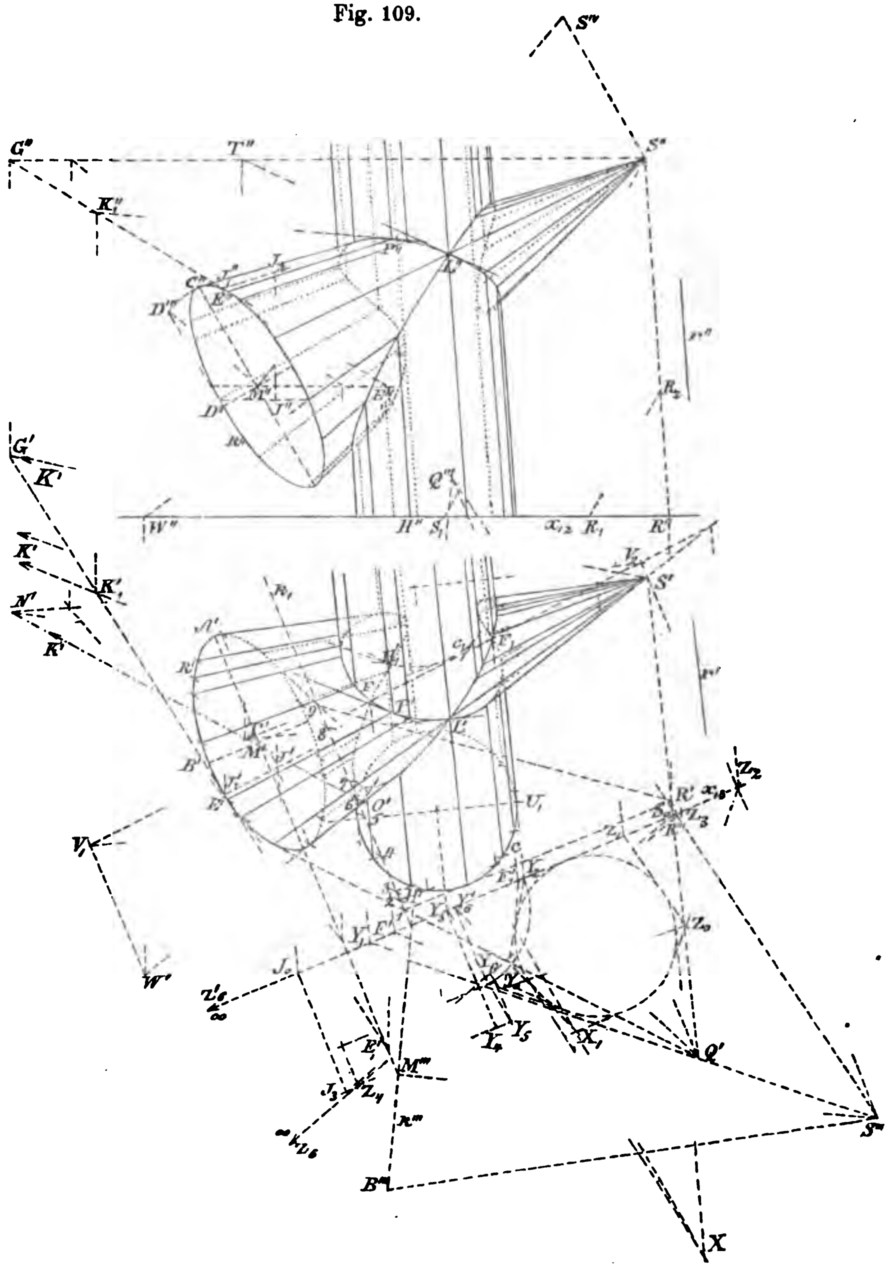
Der Kegel sei ein Umdrehungskegel, dessen Spitze $S$ sei, und dessen Grundkreis $k$ den Mittelpunkt $M$ und den Halbmesser $M'A'$ habe. Vom Cylinder sei die Richtlinie $r$ gegeben. Die Leitlinie, ein Kreis $c$ in $P_1$, werde unter der Beachtung der gegebenen Bedingung gewählt. Fig. 109.

*Aufl.* Auf einer zur Axe $SM$ des Kegels parallelen auf $P_1$ senkrechten Ebene $P_3$ mit der Projektionsaxe $x_{13}$ ($\parallel S'M'$) zeichne man die dritte Projektion $S'''M'''$ seiner Axe und diejenige $M'''B'''$ oder $k'''$ seines Grundkreises ($S'''M'''B''' = 90^0$, $M'''B''' = M'A'$). Von der ersten Projektion des Grundkreises ist $M'A'$ ($\perp S'M'$ und von der wahren Größe) die große und $M'B'$ in $S'M'$ ($B'''B' \perp x_{13}$) die kleine Halbaxe der Ellipse, woraus man sie verzeichnet. Die zweite Projektion hat $M''C''$ ($\perp S''M''$ und $= M'A'$) zur großen und $M''D''$ (aus der Umlegung $S^{IV}M''D^{IV}$) zur kleinen Halbaxe. Die erste Spur der Ebene des Grundkreises ergibt sich aus der dritten Projektion als $k_1$ ($\perp S'M'$).

Man lege nun durch die Spitze $S$ des Kegels die Parallele $SR$ zu der Richtlinie $r$ des Cylinders, bestimme ihre erste Spur $R$, ihre

dritte Projektion $S'''R'''$, und daraus ihren Schnittpunkt $Q$ ($Q'''$ und $Q'$) mit der Grundfläche des Kegels. Durch $SRQ$ legt man die

Fig. 109.



Hilfsebenen, welche ein Ebenenbüschel bilden, das die Grundfläche $\mathbf{P}_1$ des Cylinders in einem Strahlenbüschel $R$, und die Grundfläche

des Kegels in einem Strahlenbüschel $Q$ schneidet, von welchen Büscheln die entsprechenden, d. h. derselben Hilfsebene angehörigen Strahlen sich auf der Schnittlinie $k_1$ der beiden Grundflächen treffen. Die den Kegel berührenden Hilfsebenen enthalten die Tangenten $Q'1$ und $Q'9$ des Kegelgrundkreises, wobei 1 und 9 auf $k_1$ liegen, und haben zu ersten Spuren $R'1$ und $R'9$. Soll nun der Cylinder eine gemeinschaftliche Berührungsebene mit dem Kegel haben, so muß dies eine dieser Ebenen sein. Daher muß die erste Spur $c$ des Cylinders eine der Linien $R'1$, $R'9$ berühren; es wurde der Kreis $c$ berührend an $R'1$ gelegt, während er die $R'9$ schneidet, so daß ein Einschneiden des Kegels in den Cylinder stattfindet.

Legt man nun zunächst Hilfsebenen, welche ausgezeichnete Punkte liefern, zieht also Strahlen aus $R'$ nach den Fußpunkten der vier Umrißerzeugenden beider Projektionen des Cylinders, und Strahlen aus $Q'$ nach den auf $k'$ liegenden Grundpunkten der vier Umrißerzeugenden des Kegels, von denen wegen der Nähe der Punkte beidesmal nicht alle ausgeführt sind, so erhält man, ohne weitere einzuschalten, schon eine genügende Anzahl von Hilfsebenen. Verfolgen wir die Hilfsebene $R'3Q'$, so zeigt sich, daß $R'3$ den $c$ und $Q'3$ den $k'$ in je zwei Punkten schneidet, aus denen je zwei Erzeugende des Cylinders und des Kegels gezogen sind. Die ersteren schneiden die letzteren in vier Punkten, darunter in $P$. Alle so gewonnenen Punkte, in der Reihenfolge der Hilfsebenen verbunden, liefern die Schnittkurve. Projicirt man die Grundpunkte der benutzten Erzeugenden von $c$ auf $x_{12}$, von $k'$ auf $k''$, wobei man zur Sicherstellung $k'''$ benutzt, so erhält man mittelst der zweiten Projektionen der Erzeugenden diejenigen der Punkte der Schnittkurve. — Man hätte die Schnitte der Strahlen aus $Q'$ mit der Ellipse $k'$ durch die Umlegung des Grundkreises $k$ in $\mathbf{P}_1$ auf Schnittpunkte mit einem Kreise zurückführen können; doch erhält man die Schnittpunkte rascher und genauer, wenn man die Ellipse zweckmäßig (mittelst der Scheitelkrümmungskreise) und scharf (mit Hilfe des Kurvenlineals) verzeichnet hat.

**231.** Die *Tangente der Schnittkurve* in ihrem Punkte $P$ erhält man als Schnittlinie der Berührungsebenen der Flächen in $P$, und diese Schnittlinie, da die Projektionsebenen ungünstig sind, vermittelst der Spuren der Berührungsebenen in einer durch $S$ parallel zu $\mathbf{P}_1$ gelegten Spurebene $\mathbf{S}$. Die Kegelerzeugende von $P$ trifft den $k$ in $E$, die Tangente in $E'$ schneidet den Durchmesser $M'A'$ in $E_1'$, die Tangente $E_1'E'$, $E_1''E''$ durchdringt die Spurebene $\mathbf{S}$ in G; daher ist $S'G'$ die Spur in $\mathbf{S}$ von der Berührungsebene des Kegels in $P$. Die Erzeugende des Cylinders von $P$ trifft den Kreis $c$ in $H'$ und

Fig. 109. den in **S** liegenden Kreis $c_1$ des Cylinders in $H_1'$ $(H'H_1' = R'S')$. Daher ist die Tangente des $c_1$ in $H_1'$ die Spur der Berührungsebene des Cylinders in **S**. Der Schnittpunkt $K'$ von $S'G'$ und $H_1'K'$ ist ein Punkt der Tangente $P'K'$; diese schneidet die $E'G'$ in $K_1'$, woraus sich $K_1''$ und die Tangente $P''K_1''$ ergibt.

**232.** Die äußerste Hilfsebene 9, welche den Kegel berührt, liefert nur zwei Punkte der Schnittkurve; und in diesen ist jedesmal die Erzeugende des Cylinders, als Schnittlinie beider Berührungsebenen, Tangente der Kurve. Die äußerste Hilfsebene 1, welche *beide* Flächen berührt, liefert nur einen Punkt $L$, einen *Doppelpunkt der Kurve*, da er mit den vier Punkten der benachbarten Hilfsebene verbunden werden muß. Die Tangenten $L$ sind als Durchschnitte je zweier Berührungsebenen nicht zu erhalten, da diese ineinander fallen. Wir werden solche später aus der Krümmung der Flächen in $L$ ableiten; doch läßt sich jede derselben auch durch eine Fehlerkurve bestimmen, deren eine durch die Spuren $K'$, $N'$, $O'$ in **S** von den Tangenten eines Zweiges der Schnittkurve gebildet ist, deren Berührungspunkte in der Nähe und auf den beiderlei Seiten von $L$ liegen. Diese Kurve $K'N'O'$ wird durch die in **S** hervorgebrachte Spur $S'T'$ ($\parallel R'1$) der gemeinschaftlichen Berührungsebene beider Flächen in $T'$ getroffen; daher ist $TL$ die Tangente des einen Zweiges der Schnittkurve in $L$.

**233.** Außer dem *wirklichen Doppelpunkte* $L$ der Schnittkurve zeigt noch in unserem Beispiele jede ihrer beiden Projektionen *zwei scheinbare Doppelpunkte*, die reell und eigentlich sind, und die wir im Grundriß bestimmen wollen. Die Gerade $V_1V_2$, welche sie enthält, ist die Projektion der Schnittlinie der Ebenen der beiden Umrißerzeugenden einer jeden Fläche. Die Spuren dieser Ebene in $\mathbf{P}_1$ und **S** für den Cylinder sind $U_1V_1$ und der damit parallele (durch $V_2$ gehende) Durchmesser des Kreises $c_1$; und diejenigen für den Kegel sind $W'V_1$ und die damit parallele $S'V_2$, wenn $W$ die erste Spur einer Umrißerzeugenden und wenn $W'V_1 \perp S'M'$. Daraus ergibt sich $V_1V_2$ als Projektion der Schnittlinie beider Ebenen. Die erste projicirende Ebene dieser Linien schneidet beide Flächen in Kegelschnitten, deren zu dem unendlich fernen Projektionsmittelpunkte $O$ polare Durchmesser in der räumlichen Linie $V_1V_2$ liegen, und welche auf die schon gewählte dritte Projektionsebene $\mathbf{P}_3$ projicirt werden mögen durch Projicirende parallel zur ersten projicirenden Ebene der Cylindererzeugenden, derart daß jene räumliche Linie $V_1V_2$ sich in eine Parallele zu $x_{13}$ projicirt; um diese nehmen wir auch die Umlegung der $\mathbf{P}_3$ in eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene vor. Die Schnittkurven der projicirenden Ebene von $V_1V_2$

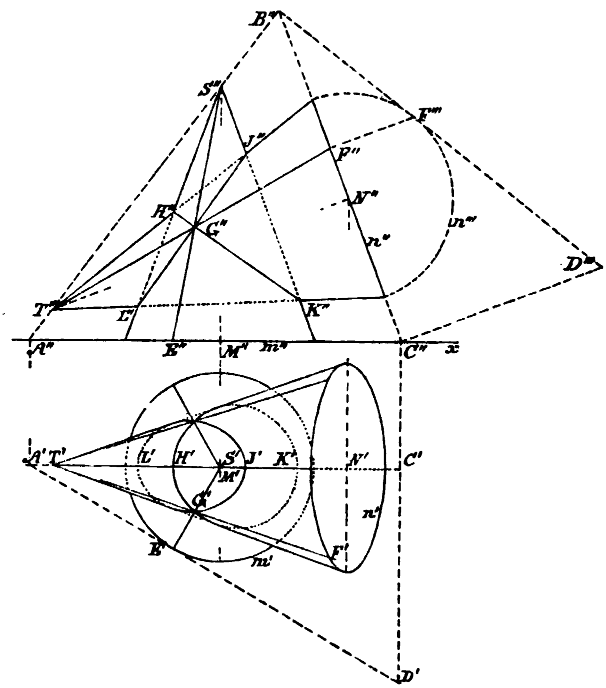
mit dem Cylinder und dem Kegel projiciren sich dabei in eine Ellipse $y$ und eine Hyperbel $z$, deren in $x_{13}$ liegende Axen $Y_1 Y_2$, $Z_1 Z_2$ sind. Die zweite Halbaxe $Y_3 Y_4$ der $y$ ist gleich der vom Mittelpunkte des $c$ bis zur Cylinderfläche gezogenen Senkrechten zu $\mathbf{P}_1$ und gleich dem Abstande des $R_2$ von $x_{12}$, wenn man (s. Fig.) $R''S_1 = R'S'$, $R''R_1 =$ Halbmesser des $c$, $R_1R_2 \parallel S_1S''$ macht. Von der Hyperbel $z$ wollen wir eine durch ihren Mittelpunkt $Z_3$ gehende Asymptote $Z_3Z_4$ ermitteln. Eine parallel zur ersten projicirenden Ebene von $V_1V_2$ durch $S$ gelegte Ebene trifft den Kegel in der zu einer Asymptote der Schnitthyperbel parallelen Erzeugenden $SJ_1$ und die Ebene der Umrißerzeugenden in $SJ$, so daß ein zu $\mathbf{P}_1$ senkrechter Abstand beider Linien $= J''J_2$ ist. Durch Parallele zu $r'$ projicirt sich $S'J'$ auf $x_{13}$ in $S_0J_0$; und macht man $J_0J_3 \perp x_{13}$ und $= J''J_2$, so ist die zu $S_0J_3$ parallele $Z_3Z_4$ eine Asymptote der $z$. Man bestimmt nun zu dem unendlich fernen Punkte $Z_6$ der $Z_3Z_4$ den in Bezug auf $y$ und $z$ konjugirten Punkt $Y_6$ als Schnittpunkt der Polaren von $Z_6$ zu $z$, d. i. $Z_3Z_4$, und zu $y$, d. i. $Y_3Y_5$ (ein vermittelst der Affinität von $y$ zu dem aus $Y_3$ durch $Y_2$ gezogenen Kreise bestimmter Durchmesser), und gibt die Projektionen $Z_6'$ und $Y_6'$ dieser Punkte auf $x_{13}$ an. Ermittelt man nun zu einem die $x_{13}$ berührenden Kreise den Mittelpunkt $X$ der Involution $Y_1Y_2(Y_0)$, $Z_1Z_2(Z_0)$ als Pol zu $Y_0Z_0$, und den Mittelpunkt $X_1$ zu der Involution von den Doppelpunkten $Y_6'$, $Z_6'$, so schneidet $XX_1$ diesen Kreis in zwei reellen Punkten, in denen die Tangenten die $x_{13}$ in $F'$ und $F_1'$ treffen; und aus diesen erhält man durch Zurückprojiciren die scheinbaren Doppelpunkte $F$ und $F_1$.

**234.** *Aufg. Die Schnittlinie zweier Kegel zu ermitteln. Dabei soll der Fall gewählt werden, daß die Kegel vom zweiten Grade, etwa Umdrehungskegel, sind und zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen besitzen.*

*Aufl.* Seien bezw. $S$ und $T$ die Spitzen, $SM$, $TN$ die Axen Fig. 110. beider Kegel, so gehen die gemeinschaftlichen Berührungsebenen durch $ST$, und die Axen müssen in einer der Halbirungsebenen der von den Berührungsebenen gebildeten Winkel liegen und sich daher schneiden. Stellen wir $\mathbf{P}_2$ parallel zur Ebene der Axen, $\mathbf{P}_1$ senkrecht zu $SM$, begrenzen die Kegel durch Parallelkreise $m$ bezw. $n$ mit den Mittelpunkten $M$ bezw. $N$, so ist von $m$ der Grundriß ein aus $M'$ als Mittelpunkt gezogener Kreis $m'$, sein Aufriß $m''$ eine auf $S''M''$ senkrechte Gerade, und von $n$ der Aufriß $n''$ die auf $T''N''$ senkrechte Gerade $N''B''$, der Grundriß eine Ellipse $n'$ mit dem Mittelpunkte $N'$, während die Größe des Kreishalbmessers erst noch durch die Bedingung des Bestehens zweier gemeinschaftlichen

Berührungsebenen beider Kegel bestimmt werden muß. Schneidet $ST$ die Grundflächen **M** und **N** der Kegel $S$ und $T$ bezw. in $A$ und $B$, und schneiden sich **M** und **N** in $C''C'$ ($\perp S'T'$), so ist der Schnitt der einen der gemeinschaftlichen Berührungsebenen mit **M** eine aus $A'$ an den Kreis $m'$ gezogene Tangente $A'E'$, welche die $C''C'$ in $D'$ trifft. Legt man die Ebene **N** des Kreises $n$ um dessen zu $\mathbf{P}_2$ parallele Durchmesserlinie $NB$, welche die **M** in $C$ trifft, in eine zu $\mathbf{P}_2$ parallele Ebene um, so gelangt ihr Schnitt mit jener gemeinschaftlichen Berührungsebene nach $B''D'''$, wenn $C''D''' \perp B''C''$ und $= C'D'$; der umgelegte Grundkreis $n'''$ wird dann aus $N''$ berührend an $B''D''$ gezogen. Die Berührungspunkte auf $m$ und $n$ sind bezw. $E$ und $F$, die Berührungserzeugenden $SE$, $TF$, welche sich in dem einen Doppelpunkte $G$ der Schnittkurve beider Kegel treffen. Der zweite hat ebenfalls $G''$ zur zweiten Projektion. Weitere Punkte könnte man durch neue durch $ST$ gelegte Hilfsebenen finden; die durch beide Kegelaxen gehende trifft die Kegel in den Umrissen ihrer zweiten Projektionen, und diese liefern vier gemeinschaftliche Punkte $H$, $J$, $K$, $L$. Einfacher verzeichnet man aber die Schnittlinie durch die Erkenntnis, daß sie in unserem Falle aus zwei Kegelschnitten besteht, wie in Nr. 67, und wie es auch aus den folgenden Sätzen folgt. Ihr Aufriß besteht dann aus den zwei Geraden $H''G''K''$, $J''G''L''$, ihr Grundriß aus zwei Kegelschnitten, welche $S'$ zu einem gemeinschaftlichen Brennpunkte haben (57).

Fig. 110.



**235.** *Einige Sätze über die Schnittkurven von Flächen zweiten Grades untereinander.*

1) *Zwei Flächen zweiten Grades schneiden sich in einer Linie vierter Ordnung*, d. i. in einer solchen Kurve, welche von einer Ebene in vier (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird; den Fall ausgenommen, daß diese Ebene eine der Schnittkurve angehörige Linie enthält, welche dann von der zweiten Ordnung ist. Denn eine Ebene schneidet jede der beiden Flächen in einer Linie zweiter Ordnung, und diese haben im allgemeinen vier Punkte gemein, welche zugleich die der Ebene und der Schnittlinie beider Flächen gemeinsamen Punkte sind. In dem Ausnahmefalle, daß beide Linien zweiter Ordnung fünf Punkte gemein haben, fallen sie ganz ineinander und bilden dann einen ebenen Bestandteil der Schnittkurve.

2) *Besitzt die Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades als Bestandteil eine ebene Kurve $k$, die dann vom zweiten Grade ist, so ist der Rest ebenfalls eine Kurve vom zweiten Grade.* Denn legt man durch drei Punkte des Reststückes eine Ebene $\mathrm{E}$, welche die Ebene der $k$ in der Geraden $g$ trifft, so schneidet $g$ die $k$ in zwei (reellen oder imaginären) Punkten, die auch jedem der Kegelschnitte angehören, in welchen $\mathrm{E}$ die Flächen schneidet (76). Diese beiden Kegelschnitte haben daher $3 + 2 = 5$ Punkte der Schnittlinie gemein, fallen also ganz ineinander und bilden einen zweiten Bestandteil der Schnittlinie. Besäßen die Flächen noch einen weiteren gemeinsamen Punkt $P$, so müßten sie ganz ineinanderfallen, da jede durch $P$ gelegte Ebene beide Flächen in ineinanderfallenden Kegelschnitten träfe, weil diese Kegelschnitte den Punkt $P$ und vier Punkte der gemeinsamen Kegelschnitte gemein hätten.

Fallen beide gemeinsamen Kegelschnitte in einen zusammen, so berühren sich die Flächen entlang desselben.

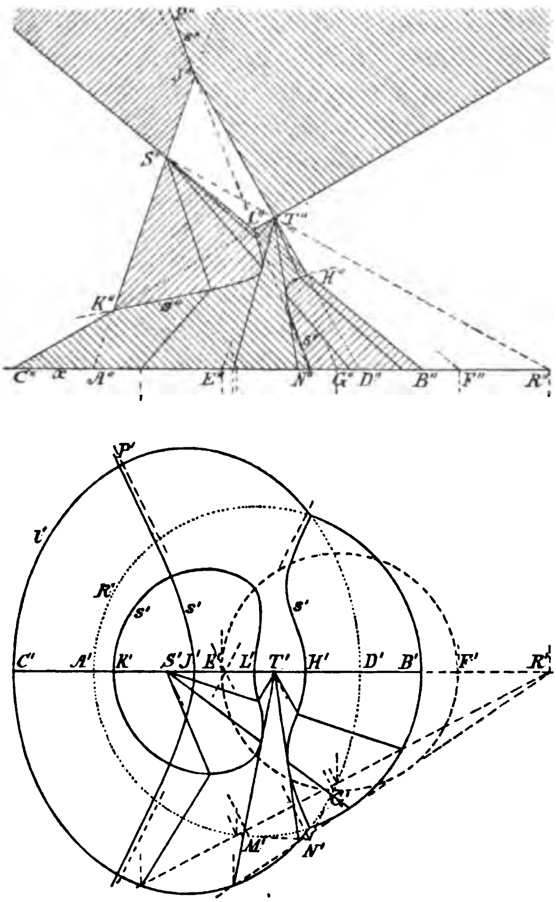
3) *Besitzen zwei Flächen zweiten Grades in jedem von zwei gemeinsamen Punkten eine gemeinschaftliche Berührungsebene, so zerfällt ihre Schnittlinie vierter Ordnung in zwei Linien zweiter Ordnung, welche sich in jenen Punkten schneiden.* Denn eine durch jene zwei Punkte und einen beliebigen dritten Punkt der Schnittlinie gelegte Ebene schneidet beide Flächen in Kegelschnitten, welche drei Punkte und die Tangenten in den beiden ersten gemein haben, also ganz ineinanderfallen, daher Teile der Schnittlinie sind.

**236.** *Aufg. Die Schnittlinie zweier Kegel zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Hauptebene besitzen, zu konstruiren und ihre Projektion auf diese Ebene zu verzeichnen.*

*Aufl.* Man stelle $\mathrm{P}_2$ parallel zur gemeinschaftlichen Haupt- Fig. 111. oder Symmetrieebene, und es sei $B'C'$ ($\parallel x$) ihre erste Projektion. $S$ und $T$ seien die Spitzen, der Kreis $k$ bezw. die Ellipse $l$, beide in $\mathrm{P}_1$ gelegen, die Leitlinien der Kegel, so liegen in jener Haupt-

ebene die Spitzen $S$ und $T$, sowie die Axen $A'B'$ von $k'$ und $C'D'$ von $l'$. Die Verbindungsgerade $ST$ der Spitzen trifft die $\mathbf{P}_1$ im Punkte $R$, und durch ihn gehen die ersten Spuren der Hilfsebenen. Die gemeinschaftliche Hauptebene enthält die zweiten Umrisse, und diese liefern die vier Punkte $H$, $J$, $K$, $L$ der Schnittlinie; ebenso viele bestimmt im allgemeinen jede andere Hilfsebene, von denen noch eine angegeben ist, und welche Ebenen man zweckmäßig paarweise symmetrisch zur gemeinsamen Hauptebene legt. Die letzte nutzbare Hilfsebene berührt die $k$ und schneidet die $l$ in zwei Punkten; sie liefert zwei Schnittpunkte, in denen die Tangenten der Schnittkurve nach $T$ laufen.

Fig. 111.



**237.** Man bemerkt, daß die zweite Projektion der Schnittlinie Stücke eines Kegelschnittes und zwar einer Hyperbel bilden. Es beruht dies auf folgendem Satze: *Die Projektion der Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Hauptebene besitzen, auf diese, ist ein Kegelschnitt.* Denn eine Gerade kann die Projektion der Kurve in nicht mehr als in zwei Punkten schneiden, weil sonst die projicirende Ebene der Geraden die Kurve vierter Ordnung in mehr als den vier Punkten träfe, welche jenen zweien entsprechen. — Wir werden später allgemeinere Sätze dieser Art aufstellen.

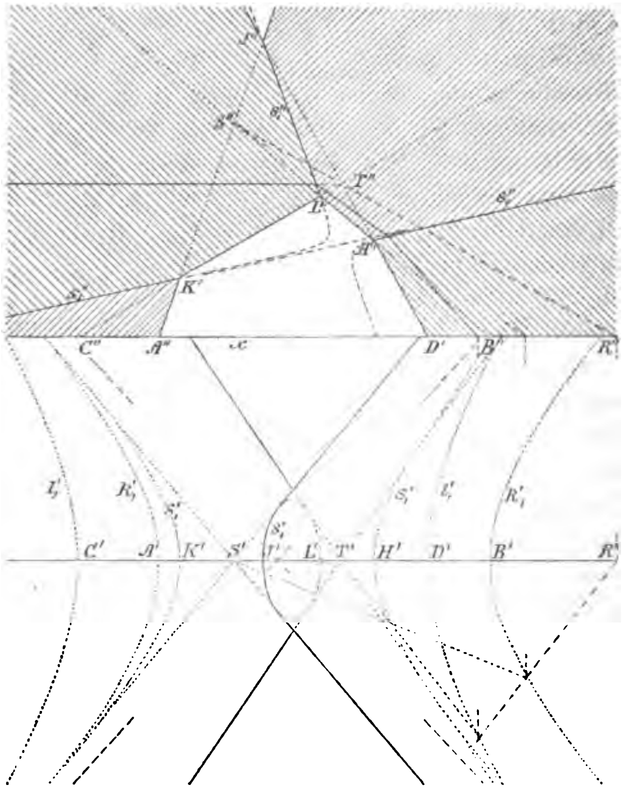
**238.** *Die unendlich fernen Punkte der Schnittlinie* werden durch Paare paralleler Erzeugenden beider Kegel geliefert. Um diese zu

erhalten, verschiebt man den einen Kegel, etwa den mit der Spitze $S$, welcher den Kreis $k$ zur Leitlinie hat, parallel mit seiner Anfangslage, bis $S$ in die Spitze $T$ des anderen Kegels gelangt; dann ist die erste Spur des verschobenen Kegels eine ähnliche und parallele Kurve zu der ersten Spur des ursprünglichen, in unserem Falle der Kreis $E'F'$ ($TE \parallel SA$, $TF \parallel SB$). Die ersten Spuren $E'F'$ und $l'$, des verschobenen Kegels und des Kegels $T$, haben in unserem Falle zwei reelle Punkte gemein, wovon der eine $G'$ ist; daher haben diese koncentrischen Kegel zwei reelle Erzeugende gemein, von denen die eine $TG$ ist. Schiebt man den einen Kegel wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, so gelangt jene Erzeugende in die zu $TG$ parallele Lage $SM$, und diese beiden bestimmen einen unendlich fernen Punkt der Schnittkurve. Die Tangente in demselben ist eine Asymptote und wird erhalten als die Schnittlinie $NP$ der Berührungsebene der Kegel entlang $TG$, bezw. $SM$ ($G'N'$ Tangente an $l'$ in $G'$, $M'N'$ Tangente an $k'$ in $M'$, $N'$ Schnittpunkte dieser Tangenten, $NP \parallel GT \parallel MS$). Ebenso findet man eine zweite Asymptote; die zweiten Projektionen beider fallen aber in eine einzige Gerade zusammen, welche die Asymptote an das ins Unendliche verlaufende Stück der hyperbolischen zweiten Projektion der Schnittkurve ist, während man die Asymptote des Ergänzungsstückes der Hyperbel auf diese Weise nicht erhält.

**239.** Man bemerkt, daß in unserem Falle die Schnittlinie $s$ aus einem geschlossenen Aste $KL$ und zwei ins Unendliche laufenden Ästen besteht, welche letztere $H$ und $J$ zu Scheiteln haben und durch zwei gemeinsame unendlich ferne Punkte gleichsam zusammenhängen. Die zweite Projektion dagegen besteht aus drei getrennten Stücken einer Hyperbel, $K''L''$, $J''\infty$, $\infty H''$, wovon beide letzteren wieder durch einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt gleichsam zusammenhängen. Die übrigen Stücke der Hyperbel erscheinen nicht zur Schnittlinie gehörig, sie erscheinen *fremd* oder *parasitisch*, im Gegensatz zu den *brauchbaren* oder *nützlichen* Stücken. Es müssen aber auch die ersteren Linienstücke als zur zweiten Projektion der Schnittkurve gehörig angesehen werden, weil die projicirenden Geraden ihrer Punkte übereinstimmende, und zwar gleichlaufende, Involutionen konjugirter Punkte in Bezug auf beide Kegel, oder je zwei imaginäre gemeinsame Punkte beider Kegel enthalten. Diese je zwei imaginären Punkte projiciren sich in je zwei reelle vermittelst der Imaginärprojektion aus dem unendlich fernen Punkte $Y$ der (auf $\mathbf{P}_2$ senkrechten) $y$ Axe. Die Imaginärprojektionen der Leitkegelschnitte (Kreis und Ellipse) $k$ und $l$ aus $Y$ sind zwei Hyperbeln Fig. 112. $k_1$, $l_1$, die der Kegel $Sk$, $Tl$ zwei Kegel $Sk_1$, $Tl_1$, die der Schnittkurve $s$

der ersteren Kegel, die Schnittkurve $s_1$ der letzteren Kegel, und wir wollen dabei *die Kurve vierter Ordnung* $s_1$ *die Imaginärprojektion der Kurve vierter Ordnung* $s$ *aus* $Y$ nennen. Die Konstruktion von $s_1$

Fig. 112.



ist in der Figur ausgeführt; es sind dabei auch, und zwar wieder durch eine, jedoch nicht angegebene Parallelverschiebung, die beiden Asymptoten der $s_1$ bestimmt, welche in der zweiten Projektion eine einzige, und zwar die vorhin nicht erhaltene Asymptote der Hyperbel $s_1''$ (und $s''$) bilden*).

Weil im vorliegenden Falle die drei benutzten Teile der hyperbolischen $s_1''$ schon den Asymptoten sehr nahe liegen, so schließen sich die entsprechenden drei Äste der $s_1$ und der $s_1''$ sehr nahe, und in der Figur nicht unterscheidbar, den beiden Ästen der Hyperbel

*) Diese Konstruktion wurde von dem Verf. gegeben in der schon angeführten Abhandlung in Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., B. 12, 1867, S. 375 f. f. „Über scheinbare Unstetigkeit geometrischer Constructionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird“.

und der Ellipse an, in welchen die durch jene Asymptoten auf $\mathbf{P}_2$ projicirten Ebenen die beiden Kegel $Sk_1$, $Tl_1$ treffen. Die Kurven $s$ und $s_1$ haben in ihren Scheiteln $H$, $J$, $K$, $L$ gleiche und entgegengesetzte Krümmungshalbmesser, weil sie gegenseitige Imaginärprojektionen oder konjugirte Kurven sind (171); daher sind auch die Krümmungshalbmesser der $s$ in $H$ und $K$, sowie die in $J$ und $L$ nahezu gleich. Der endliche (geschlossene) Ast von $s$ ist in seinem bei $K$ liegenden Teile von einer halben Ellipse, die in den bezeichneten Ebenen zweier Asymptoten liegt, in unserer Figur nicht zu unterscheiden und daher als solche gezeichnet worden.

**240.** Die 4 *unendlich fernen Punkte* der Schnittlinie zweier Kegel zweiten Grades, d. h. ihre 4 Schnittpunkte mit der unendlich fernen Ebene, erhält man allgemein dadurch, daß man den einen Kegel durch Parallelverschiebung zu sich selbst koncentrisch mit dem anderen macht und die 4 gemeinsamen Erzeugenden beider Kegel dadurch sucht, daß man beide Kegel mit einer Ebene schneidet und die 4 gemeinsamen Punkte der entstehenden Kegelschnitte ermittelt. Nach ihnen laufen die gemeinsamen Erzeugenden und diese bestimmen die Paare paralleler Erzeugenden der ursprünglichen Kegel und die unendlich fernen Punkte der Kurve. Die Asymptoten sind die Schnittlinien der Berührungsebenen beider Kegel entlang zweier solchen parallelen Erzeugenden. Man kann dabei folgende Fälle unterscheiden: Von den 4 Schnittpunkten jener Kegelschnitte sind: a) alle 4 reell und 1) getrennt, 2) 2 getrennt, 2 andere zusammenfallend, 3) je 2 in verschiedenen Punkten zusammenfallend, 4) 3 zusammenfallend, 1 getrennt, 5) alle 4 zusammenfallend, wobei sich die Kegelschnitte in einem Punkte vierpunktig berühren; b) 2 reell und 2 imaginär, dabei die 2 reellen 6) getrennt, 7) zusammenfallend; c) 8) alle 4 imaginär. In diesen Fällen besitzt die Schnittkurve vierter Ordnung: 1) 4 Asymptoten und 4mal einen hyperbolischen Verlauf, 2) 2 Asymptoten und eine unendlich ferne Tangente, oder 2 hyperbolische Verläufe und 1 parabolischen Verlauf, wobei 2 Zweige der Kurve dem unendlich fernen Punkte in gleichem Sinne mit wachsender Entfernung zustreben, 3) 2 parabolische Verläufe, 4) die unendlich ferne Ebene als Schmiegungsebene, wobei 2 Zweige dem unendlich fernen Punkte in entgegengesetztem Sinne ohne Annäherung an eine Asymptote zustreben (da die dreipunktig berührende Schmiegungsebene die Kurve schneidet (I, 260)), und außerdem eine Asymptote, 5) die unendlich ferne Ebene als vierpunktig berührende Schmiegungsebene (Rückkehrebene), wobei dem unendlich fernen Punkte zwei Zweige in gleichem Sinne zustreben, 6) 2 Asymptoten, 7) einen parabolischen Verlauf, 8) keinen unendlich fernen Punkt.

**241.** *Übungsaufgaben.*

1) Man nehme Kegel (einschließlich Cylinder) nach diesen Bedingungen an und konstruire ihre Schnittkurve samt deren Asymptoten. Im Falle zweier zusammenfallenden unendlich fernen Punkte oder des parabolischen Verlaufes suche man die asymptotische Parabel, welche sich der Kurve mit dem Fortschreiten gegen das Unendliche beliebig nahe annähert. Dieselbe liegt in derjenigen Ebene, welche parallel zu den beiden unter einander parallelen und die Kegel nach parallelen Erzeugenden berührenden Ebenen verläuft, und die beiden Kegel in kongruenten (und parallelen) Parabeln schneidet. Mit beiden wird die asymptotische Parabel kongruent und parallel sein, ihre Lage gegen sie aber von den Krümmungskreisen der Kegelschnitte der vorigen Nr. in ihrem Berührungspunkte abhängen.

2) Man fertige *Fadenmodelle* der vorgenannten Kegel und ihrer Schnittkurven an. Der Verfasser hat folgende Art der Ausführung zweckmäßig gefunden*). Die Grundlage bildet ein würfelförmiger Holzkasten von 30 cm Seite in Lichten, dessen Wände aus Brettern von gleichförmigem Holze (vom Birnbaum) in der Stärke von 1 cm gebildet werden, welche an vier parallelen Kanten (schwalbenschwanzartig) verzinkt, während Boden und Deckel aufgeschraubt sind. In drei Projektionen werden die Kegelflächen und die zwei Schnittpunkte jeder Erzeugenden mit der inneren Würfeloberfläche konstruirt. Diese Punkte (in einem mittleren Abstande von etwa 1 cm) werden auf die Innenfläche der Bretter übertragen, in ihnen die Bretter fein durchbohrt, um die Schnittkurven der Flächen Stäbe von 1,5 cm Breite eingezeichnet, diese unter Stehenlassen der zur Verbindung notwendigen anderen Stäbe (häufig entlang der Würfelkanten) ausgesägt, zusammengefügt, schwarz gebeizt, und dann die Erzeugenden der Flächen mit stärkeren Seidefäden von verschiedenen Farben eingespannt. Die Schnittkurve wird durch Glasperlen bezeichnet, durch welche je zwei sich schneidende Erzeugende gehen. Im Falle des spitzwinkligen Schnittes kann man die Perlen durch einen nach der Kurve durchgezogenen feinen Faden vereinigen. Im Falle sich die gespannten Fäden nicht treffen, macht man die Kurve durch einen mehrfachen, in die Kante gespannten Faden bemerklich.

*) Die technische Hochschule in Karlsruhe besitzt eine größere Anzahl von Modellen, darunter von Kegelflächen und deren Kurven, welche unter Anleitung des Verfassers von Studirenden in der oben angegebenen Weise konstruirt und ausgeführt wurden.

### b) Die Raumkurve dritter Ordnung.

**242.** *Haben zwei Kegel zweiten Grades eine Erzeugende gemein (wobei die Spitze eines jeden Kegels auf dem anderen liegt), so zerfällt die Schnittlinie in eine Gerade, jene Erzeugende, und in eine unebene Kurve dritter Ordnung (kubische Raumkurve).* Denn eine Ebene schneidet die Gesamtschnittkurve in vier Punkten; und da von denselben einer auf jene Gerade fällt, so kommen auf die Restkurve nur noch drei. Von diesen muß stets einer reell sein, weil von den vieren der auf der Geraden liegende reell ist, während die zwei anderen reell oder konjugirt imaginär sein können.

*Diese Kurve dritter Ordnung geht durch die Spitze eines jeden der drei Kegel.* Der eine Kegel wird in seiner Spitze von der Berührungsebene des andern Kegels in demselben Punkte in zwei Erzeugenden getroffen, von denen die eine die gemeinschaftliche Erzeugende beider Kegel, die andere die *Tangente* unserer Kurve in jener Spitze ist.

Die bezeichnete Kurve dürfen wir kurzweg *die unebene oder Raumkurve dritter Ordnung* nennen, weil die Analysis zeigt, daß jede Kurve dritter Ordnung auf die angegebene Weise erzeugt werden kann.

**243.** *Satz. Die Raumkurve $k$ dritter Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel zweiten Grades projicirt.*

*Geometrischer Beweis.* Seien $A$, $B$ die Spitzen der beiden sich in $k$ schneidenden Kegel, $C$ ein beliebiger Punkt der $k$, aus welchem $k$ projicirt werden soll, und $P$ der bewegliche Punkt der $k$; dann sind $AC$, $AP$ und $BC$, $BP$ Erzeugende bezw. des ersten und zweiten Kegels. Die beweglichen Ebenen $ABP$, $ACP$ schneiden sich in der $AP$, welche den ersten Kegel ($A$) erzeugt; sie selbst bilden daher zwei projektive Ebenenbüschel mit den Axen $AB$ und $AC$. Ebenso sind die Ebenenbüschel $BA$ und $BC$, welche den Kegel $B$ erzeugen, unter einander projektiv. Daher sind auch die Ebenenbüschel $CA$, $CB$, deren entsprechende Ebenen durch $P$ gehen, die sich also in den projicirenden Strahlen $CP$ schneiden, unter einander projektiv, und die $CP$ erzeugen einen Kegel zweiten Grades (21), w. z. b. w.

Auf Grund des analytischen Satzes, daß eine algebraische Kurve von jeder Ebene in derselben Anzahl (reeller oder imaginärer) Punkte geschnitten wird, kann man den vorigen Satz erweitert aussprechen und beweisen.

*Satz. Eine Raumkurve $k$ von der $n^{ten}$ Ordnung wird aus einem Punkte $C$ durch einen Kegel von der Ordnung $n$, $n-1$, $n-2$, ...*

*$n - m$ projicirt, je nachdem $C$ außerhalb $k$, oder in einem* 1-, 2-, … *$m$fachen Punkte von $k$ liegt.*

*Analytischer Beweis.* Eine durch $C$ gelegte Ebene schneidet $k$ in $n$ Punkten, außerhalb $C$ daher in $n$, $n - 1$, $n - 2$ … Punkten, enthält also von dem Kegel in den bezeichneten Fällen bezw. $n$, $n - 1$, $n - 2$, … $n - m$ Erzeugende, woraus der Satz folgt (21).

**244.** *Satz. Eine Raumkurve dritter Ordnung $k$ ist durch sechs willkürlich angenommene Punkte bestimmt, von denen nicht vier in derselben Ebene liegen.*

Denn legt man einen projicirenden Kegel aus einem dieser Punkte ($A$), so ist derselbe vom zweiten Grade, kann also nur fünf willkürliche Erzeugende besitzen, daher $k$ außer $A$ nur noch fünf willkürliche Punkte enthalten kann, welche den Kegel $A$ bestimmen. Ebenso ist der aus jedem anderen der Punkte die $k$ projicirenden Kegel bestimmt. Es ist daher $k$ die gemeinschaftliche Kurve dieser sechs Kegel und durch zwei derselben bestimmt.

*Aufg. Eine Projektion der Raumkurve dritter Ordnung $k$ zu konstruiren, welche durch sechs gegebene Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ geht, von denen keine vier in einer Ebene liegen.*

*Aufl.* Man nehme zwei der Punkte, $A$ und $B$, als Spitzen der bestimmenden Kegel, lege die Projektionsebene **P** durch drei andere der Punkte, $C$, $D$, $E$, so sind die letzteren Punkte unmittelbar in **P**, die drei anderen $A$, $B$, $F$ durch ihre Projektionen und etwa ihre Abstände von **P** gegeben. Dadurch kann man (in einer in der Figur nicht angegebenen Weise) die Spuren $O$ und $F_1$ bezw. von

Fig. 113.

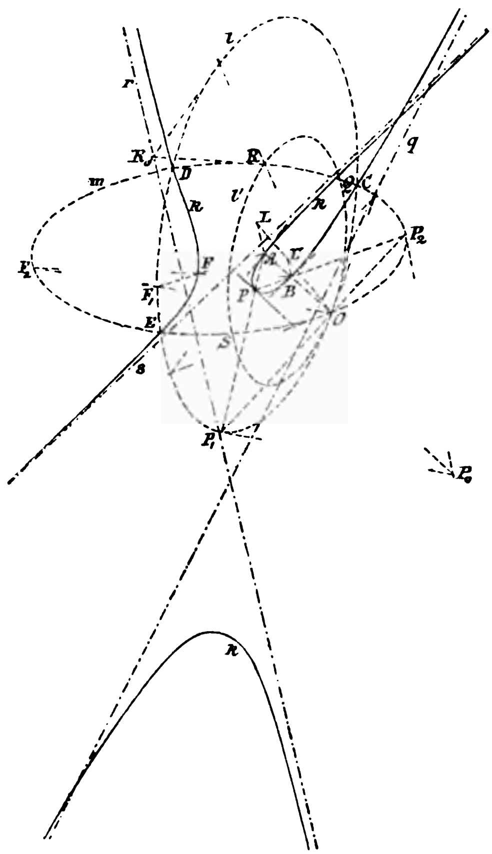


Fig. 113.

$AB$ und $AF$ in $\mathsf{P}$ bestimmen, und aus $F_1$ die Spur $F_2$ von $BF$, da $OF_1F_2$ als Spur der Ebene $ABF$ eine Gerade sein muß. Mittelst dieser Projektion löst man die Aufgabe, wobei es ganz gleichgiltig ist, ob Central- oder Parallelprojektion angewendet wurde.

Die Kegel $A$ und $B$ haben nun bezw. die durch die fünf Punkte $OCDEF_1$ und $OCDEF_2$ gelegten Kegelschnitte $l$ und $m$ zu Spuren. Man bestimmt einen *allgemeinen Punkt* $P$ der $k$, indem man durch $ABO$ eine beliebige Hilfsebene legt, deren Spur $OP_1P_2$ die $l$ und $m$ außer in $O$ bezw. in $P_1$ und $P_2$ treffe; die Ebene schneidet die Kegel in den Erzeugenden $AP_1$, $BP_2$, deren Schnittpunkt $P$ ist. Die Punkte $P_1$, $P_2$, $P$ kann man ohne Verzeichnung der Kegelschnitte $l$, $m$ linear, d. i. nur mit geraden Hilfslinien bestimmen (I, 321, 322). — Die *Tangente* der $k$ in $P$ erhält man als Schnittlinie $PP_0$ der Berührungsebenen in $P$ an jeden der Kegel, wobei $P_0$ der Schnittpunkt der Tangenten an $l$ in $P_1$ und an $m$ in $P_2$ ist.

Um die *Asymptoten* der $k$ zu ermitteln, verschiebt man einen der Kegel, etwa den $Al$, parallel zu seiner Anfangslage, bis seine Spitze $A$ nach $B$ gelangt; seine Spur $l'$ ist dann eine zu $l$ perspektiv-ähnliche Kurve mit $O$ als Ähnlichkeitspunkt, wobei dem Mittelpunkte $L$ der $l$ derjenige $L'$ der $l'$ entspricht ($OLL'$ eine Gerade, $BL' \parallel AL$). Man bestimmt nun die Schnittpunkte von $l'$ und $m$, welche außer $O$ in der Figur die drei reellen Punkte $Q$, $R$, $S$ sind; die Kegel $Bl'$, $Bm$ haben daher außer $BO$ drei gemeinschaftliche Erzeugende $BQ$, $BR$, $BS$, mit welchen bezw. die Asymptoten $q$, $r$, $s$ der $k$ parallel laufen. Es ist dann z. B. die $r$ durch einen Punkt $R_0$ derselben bestimmt, den Schnittpunkt der Tangente der $m$ in $R$, und der Tangente an $l$, welche derjenigen der $l'$ in $R$ entspricht, also mit ihr parallel ist. Da die Kegelschnitte $l'$, $m$ einen reellen Punkt $O$ gemein haben, so besitzen sie wenigstens noch einen reellen Schnittpunkt, während die beiden anderen reell oder konjugirt imaginär sind. Daher hat $k$ auch wenigstens eine reelle und außerdem noch zwei reelle oder zwei imaginäre Asymptoten.

**245.** Auf einer solchen Grundlage gelangt man zu einer *Einteilung* dieser Kurven. Jede Raumkurve dritter Ordnung schneidet die unendlich ferne Ebene in *drei* Punkten, von denen wenigstens einer reell ist. Aus jedem ihrer unendlich fernen Punkte wird die Kurve durch einen Cylinder (zweiten Grades) projicirt. Nach der Eigentümlichkeit ihrer unendlich fernen Punkte unterscheidet man folgende drei Arten der Kurven:

1) *Die kubische Hyperbel; sie hat drei reelle getrennte unendlich ferne Punkte und drei Asymptoten.* Sie liegt daher auf drei Cylindern, welche hyperbolisch sind und wovon je zwei eine unendlich ferne

Verbindungsgerade von zweien jener Punkte gemein, oder zwei Asymptotenebenen parallel haben.

2) *Die kubische hyperbolische Parabel; sie hat einen allein liegenden und zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte, eine Asymptote und eine asymptotische Parabel.* Aus dem ersteren Punkte wird sie durch einen parabolischen, und aus dem letzteren durch einen hyperbolischen Cylinder projicirt; beide Cylinder haben die unendlich ferne Verbindungslinie der getrennten Punkte gemein.

3) *Die kubische Parabel; sie hat drei zusammenfallende unendlich ferne Punkte,* so daß die unendlich ferne Ebene ihre Schmiegungsebene bildet; eine Asymptote besitzt sie nicht. Aus dem unendlich fernen Punkte wird sie durch einen parabolischen Cylinder projicirt.

4) *Die kubische Ellipse; sie hat einen reellen und zwei imaginäre unendlich ferne Punkte und eine Asymptote;* sie liegt auf einem elliptischen Cylinder. — Diese und die vorhergehende Kurve bedürfen zu ihrer Erzeugung noch eines eigentlichen Kegels.

**246.** *Übungsaufgaben.*

1) Die vier Fälle der *kubischen Raumkurve* nach der vorigen Nr. zu konstruiren und in der in Nr. 241 angegebenen Weise durch Fadenmodelle darzustellen. Dabei empfiehlt es sich bei 1) die drei Cylinder, bei 2) die zwei Cylinder und die Asymptotenebenen des hyperbolischen durch Fäden darzustellen. Der Schnitt der einen Asymptotenebene mit dem parabolischen Cylinder, den man durch andersfarbige Perlen wie die Raumkurve bezeichnen kann, bildet die asymptotische Parabel.

2) Die *Schnittlinie zweier Kegel* zu bestimmen, wenn die Spitze des ersten Kegels auf dem zweiten, nicht aber die des zweiten auf dem ersten liegt. — Die Spitze des ersten Kegels bildet einen Doppelpunkt, eine Spitze oder einen isolirten Punkt der Schnittkurve, je nachdem die Berührungsebene des zweiten Kegels in diesem Punkte zwei, eine oder keine Erzeugende des zweiten Kegels enthält.

## III. Der Durchschnitt einer Umdrehungsfläche mit einem Kegel oder einem Cylinder.

### a) Der Kegel und die koncentrische Kugel.

**247.** Man stelle die $P_1$ senkrecht auf die Axe *a* der Umdrehungsfläche; vom Kegel sei die erste Spur *c* gegeben oder sie werde, wenn eine andere Leitlinie gegeben ist, konstruirt.

*Aufg. Die Schnittlinie einer Umdrehungsfläche mit einem Kegel zu konstruiren, dessen Spitze auf der Axe a der ersteren Fläche liegt.*

Als Beispiel sei eine *Kugel und ein damit koncentrischer Kegel* gewählt.

*Aufl.* Sei $S$ der Mittelpunkt der Kugel und des Kegels, $c$ die erste Spur des Kegels, $k$ der zweite Umriß der Kugel. Der Deutlichkeit halber sei nur ein Ast des Kegels und der Schnittlinie gezeichnet; der andere ist mit ihm symmetrisch in Bezug auf $S$. Die Kugel werde durch eine zu $P_1$ parallele Ebene begrenzt. Man könnte nun die Hilfsebenen durch $a$, in unserem Falle durch den auf $P_1$ senkrechten Durchmesser der Kugel legen; sie schneiden die Umdrehungsfläche in Meridianen, in unserem Falle in größten Kreisen, den Kegel in Erzeugenden. Um die Schnittpunkte beider Linien zu erhalten, aber doch mit der Verzeichnung des Hauptmeridianes auszureichen, würde man jene Meridianebenen um $a$ in die Hauptmeridianebene drehen, hier die Schnittpunkte bestimmen und dann zurückdrehen. — Zu denselben Konstruktionslinien führt auch eine andere Anschauung, die wegen ihrer allgemeineren Brauchbarkeit hier sogleich durchgeführt werden soll. Man legt die Hilfsebenen $\perp a$ ($\parallel P_1$); sie schneiden die Umdrehungsfläche in Parallelkreisen, den Kegel in Kurven, welche mit $c$ ähnlich und parallel sind; um ihre Verzeichnung zu ersparen, projicirt man beide Kurven aus $S$ auf $P_1$, wobei sich die Parallelkreise wieder in Kreise, die Kurven des Kegels alle in $c$ projiciren. Man bestimmt deren Schnittpunkte und projicirt sie aus $S$ auf die zugehörige Hilfsebene zurück. So schneidet eine Hilfsebene ($\parallel P_1$) die Fläche in einem Parallelkreise, dessen Punkt auf dem Hauptmeridiane $Q$ ist; $Q$ wird aus $S$ auf $P_1$ nach $Q_1$, der Parallelkreis in den aus $S'$ durch $Q_1'$ gezogenen Kreis projicirt, dieser schneidet die $c$ in $P_1$ und $R_1$, welche aus $S$ auf jenen Parallelkreis nach $P$ und $R$ zurückprojicirt werden. Fig. 114.

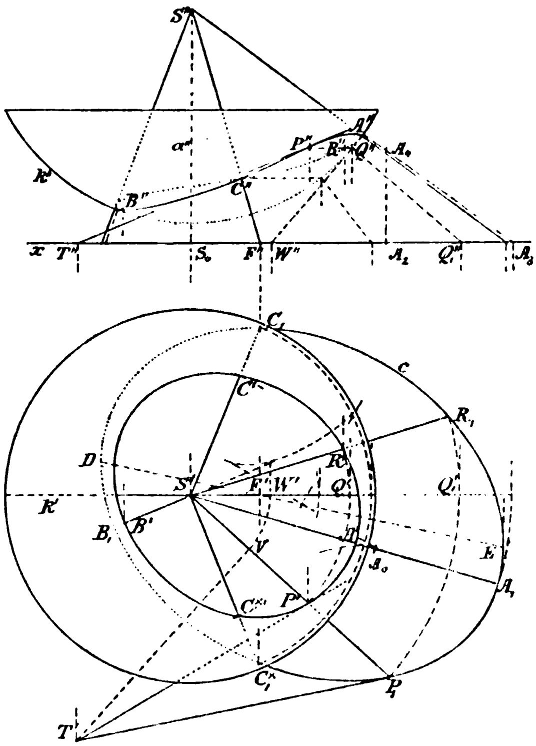
Als *ausgezeichnete Punkte* findet man diejenigen auf dem zweiten Umrisse der Kugel vermittelst ihrer Ebene als Hilfsebene, und diejenigen auf den zweiten Umrissen des Kegels vermittelst der durch jeden Umriß gelegten Umdrehungskegel mit $a$ als Axe.

**248.** Die *Tangente* $PT$ in einem allgemeinen Punkte $P$ der Schnittlinie erhält man, wenn man die erste Spur der Berührungsebene des Kegels in $P$, d. i. die Tangente $P_1 T'$ der $c$ in $P_1$, mit derjenigen $VT'$ der Kugel in $T'$ schneidet; $VT'$ wird aus der Tangente $Q'' W''$ an $k''$ in $Q''$ durch Drehung von $W'$ um $a$ nach $V$, als $VT' \perp S'V$ bestimmt. $PT$ ist dann die Schnittlinie beider Berührungsebenen.

*Höchste und tiefste Punkte* der Schnittkurve, in welchen also die Tangenten $\parallel P_1$ laufen, erhält man dann, wenn die zusammen-

gehörigen ersten Spuren der Berührungsebenen beider Flächen unter einander parallel sind, wenn also die Tangente der $c$ senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit $S'$ steht. Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, aus einem beliebigen Punkte $S'$ der Ebene der $c$ eine Normale zu ihr zu legen. Diese Aufgabe könnte man entweder mittelst einer Fehlerkurve lösen (I, 202), oder dadurch, daß man die Evolute der $c$ konstruirt (I, 251), von der in der Figur die notwendigen Stücke ausgeführt sind und an sie durch Anlegen des Lineals Tangenten aus $S'$ zieht; sie sind die gesuchten Normalen der $c$. Ist $c$ eine Ellipse, so zeigt der Anblick ihrer Evolute, daß wenn $S'$ im Inneren derselben liegt, vier Tangenten an dieselbe gezogen werden können, wenn im Äußeren, wie in unserem Falle, zwei. Auf diese Weise sind im vorliegenden Falle die zwei Normalen $S'A_1$ und $S'B_1$ gezogen, auf denen sich der höchste Punkt $A$, bezw. der tiefste $B$ der Schnittlinie ergibt.

Fig. 114.




**249.** Die zweite Projektion der Schnittlinie besitzt zwei *Doppelpunkte*, wovon der verzeichnete Ast den einen $C''$ enthält. Man bestimmt dieselben (233), indem man von dem unendlich fernen Projektionsmittelpunkte die Polarebenen beider Flächen ermittelt, d. i. die Durchmesserebenen, welche die zu $\mathbf{P}_2$ senkrechten Sehnen halbiren und die zweiten Umrisse enthalten. Für die Kugel ist es die zu $\mathbf{P}_2$ parallele Durchmesserebene $Sk$, für den Kegel die Durchmesserebene $SDE$, wenn $DE$ der zur Senkrechten zu $\mathbf{P}_2$ konjugirte Durchmesser der Ellipse $c$ ist. Diese beiden Polarebenen schneiden

sich in $SF$, deren zweite Projektion $S''F''$ die Doppelpunkte enthält, die dann in der gewöhnlichen Weise konstruirt werden.

Fig. 114a.

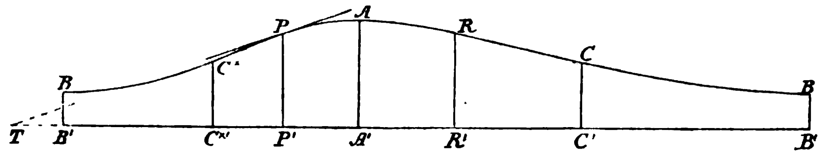
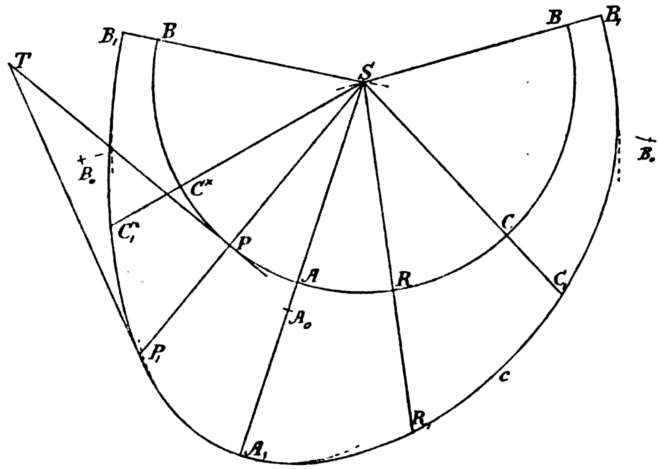


Fig. 114b.



**250.** Die Lösung dieser Aufgabe gestattet es, die andere *Aufgabe, „einen beliebigen Kegel abzuwickeln“*, mittelst einer geringeren Anzahl von Erzeugenden, welche aber bei Verwertung der Stetigkeit hinreicht, jedoch nicht auf so einfache Weise, wie in Nr. 65, zu lösen. Die Schnittlinie des Kegels mit einer koncentrischen Kugel wird nämlich bei der Abwickelung zu einem Kreisbogen vom Halbmesser der Kugel und von gleicher Länge mit der Scheitelkurve. Die Länge einer unebenen durch ihre Projektionen gegebenen Kurve kann aber nicht unmittelbar aus diesen entnommen werden; vielmehr muß man diese Kurve erst durch Abwickelung eines ihrer projicirenden Cylinder in eine ebene Kurve von gleicher Länge verwandeln. Der erste projicirende Cylinder hat die erste Projektion zum senkrechten Schnitte, und dieser wird bei der Abwickelung des Cylinders zu einer Geraden $B'A'B'$, auf welche man vermittelst Fig. 114a.
kleiner Stückchen die Länge der Kurve $B'A'B'$ der Hauptfigur unter Bezeichnung der konstruirten Punkte überträgt. Zieht man in diesen Punkten Senkrechte zu $B'A'B'$, überträgt auf sie aus

dem Aufriß die Längen der jedesmal zugehörigen Projicirenden, so bestimmen deren Endpunkte die Verwandelte $BAB$.

Die *Tangente* $PT$ in $P$ an dieselbe erhält man, wenn man auf $P'A'$ die Länge $P'T$ aus dem Grundriß ($= P'T'$) überträgt und $PT$ zieht.

Fig. 114 b. Zeichnet man nun mit dem Halbmesser der Kugel einen *Kreis* aus $S$, überträgt auf denselben durch kleine Stückchen die Kurve $BAB$ der Fig. a unter Bezeichnung der konstruirten Punkte, zieht durch sie aus $S$ die Kegelerzeugenden, gibt ihnen die wahre Länge ihrer bis zur Leitlinie $c$ reichenden Stücke, indem man z. B. $S''Q_1''$ als $SP_1$ und $SR_1$ überträgt, so erhält man durch die Endpunkte die Verwandelte $B_1A_1B_1$ der Leitlinie $c$ und somit die Abwickelung des Kegels.

Die *Tangente* $PT$ in $P$ wird durch Auftragen des rechtwinkligen Dreiecks bestimmt, indem man $P_1PT = 90^0$ und $PT$ gleich dem $PT$ der Fig. a, oder $P_1T$ gleich dem $P_1T'$ der Hauptfigur macht.

Für die Punkte $A_1$, $B_1$, in welchen die Tangente der $c$ bezw. senkrecht auf der zugehörigen Kegelerzeugenden $SA_1$, $SB_1$ steht, kann man leicht nach Nr. 61 den *Krümmungshalbmesser* der Verwandelten $c$ in Fig. b bestimmen, indem man den Krümmungshalbmesser der ebenen Kurve $c$ in der Hauptfigur durch den Cosinus des Winkels der Ebene der $c$ mit der Berührungsebene des Kegels im fraglichen Punkte teilt. Ist in der Hauptfigur $A_1A_0$ der Krümmungshalbmesser der $c$ in $A_1$, ist $S_0A_2A_3 = S'A_0A_1$, und $A_4$ auf $S''A_3$ so bestimmt, daß $A_2A_4 \perp x$, so ist $A_3A_4$ gleich $A_1A_0$ der Fig. b. Die Krümmungskreise in $A_1$ und $B_1$ schneiden in der Figur die $c$ bezw. in $A_1$ und $B_1$; doch ist dies in $A_1$ wegen des nahen Maximums der Krümmung nicht bemerkbar, äußert sich vielmehr als weit reichendes Zusammenfallen.

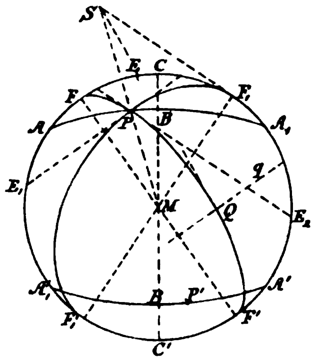
### b) Die sphärischen Kegelschnitte.

**251.** Die Schnittlinie eines Kegels zweiten Grades mit einer koncentrischen Kugel nennt man einen *sphärischen* oder *Kugelkegelschnitt*, weil er ähnliche Eigenschaften wie der ebene Kegelschnitt besitzt. Gehen wir von einer solchen Eigenschaft aus. *Ein sphärischer Kegelschnitt sei erklärt als der geometrische Ort eines Punktes $P$ auf einer Kugel, dessen Abstände von zwei festen Punkten $F$, $F_1$ der Kugel, gemessen durch Bogen größter Kreise, eine Summe oder Differenz von gegebener Größe besitzen.* Die Punkte $F$, $F_1$ heißen die *Brennpunkte*, die Bogen $PF$, $PF_1$ die Leitstrahlen, die gegebene Größe der Summe muß größer, und die der Differenz kleiner als

Fig. 115. der Bogen $FF_1$ sein. Die Figur 115 gibt die Projektion auf die durch $F$, $F_1$ und den Kugelmittelpunkt $M$ gelegte Ebene; es soll der

sphärische Kegelschnitt konstruirt werden, für welchen die Summe der Leitstrahlen $FP + PF_1 = AA_1$ ($> FF_1$) ist, so daß man die Kurve eine *sphärische Ellipse* nennen kann. Um einen Punkt $P$ zu erhalten, teile man Bogen $AA_1$ durch $E$ in zwei Teile, ziehe aus $F$ mit $AE = FE_1$ als sphärischen Halbmesser einen Kugelkreis $E_1P$ (in der Projektion ist derselbe eine auf $FM$ senkrechte Gerade), und aus $F_1$ mit $EA_1 = F_1E_2$ einen solchen $E_2P$; beide schneiden sich in zwei Punkten der Kurve, welche sich beide in $P$ projiciren. Man kann natürlich auch die Mittelpunkte $F$, $F_1$ der Kugelkreise vertauschen. Ist auf dem größten Kreise $FF_1$ die $FA = -F_1A_1$, so sind $A$ und $A_1$ Punkte der Kurve, die Scheitel der *Hauptaxe* der sphärischen Ellipse; rückt man den Teilungspunkt $E$ in die Mitte $C$ von $AA_1$, so erhält man die beiden Punkte $B$ der Kurve, welche die Scheitel der durch den Mittelpunkt $C$ des Bogens $FF_1$ gehenden, auf $AA_1$ senkrechten, *Nebenaxe* bilden.

Fig. 115.




252. Bezeichnet man die den Punkten $F, F_1, A \ldots$ diametral gegenüberliegenden Punkte mit $F'$, $F_1'$, $A' \ldots$, so erhält man eine der $APA_1$ symmetrische Kurve $A'P'A_1'$, deren Brennpunkte $F'$, $F_1'$ sind. Aber $APA_1$ kann auch als sphärische Ellipse angesehen werden, welche $A$, $A_1$ zu Scheiteln der Hauptaxe und $F'$, $F_1'$ zu Brennpunkten hat. Denn aus $FP + PF_1 = AA_1$ folgt, wenn der Kugelhalbmesser $= 1$ gesetzt wird, so daß der Halbkreis $CAC' = \pi$ ist,

$$(\pi - FP) + (\pi - PF_1) = 2\pi - AA_1,$$

oder

$$PF' + F_1'P = A_1C'A.$$

Man nennt die beiden Kurven $APA_1$ und $A'P'A_1'$ zusammen eine sphärische Ellipse, deren Brennpunkte zugleich $F$, $F_1$ und $F'$, $F_1'$ sind. — Außerdem kann man dieselben beiden Kurven zusammen als eine *sphärische Hyperbel* betrachten, deren Brennpunkte zugleich $F$, $F_1'$ und $F_1$, $F'$ sind. Denn aus $FP + PF_1 = AA_1$ folgt z. B. für $F_1$, $F'$:

$$(\pi - FP) - PF_1 = \pi - AA_1,$$

oder

$$F'P - PF_1 = A'A_1.$$

Daher können beide Kurven sowohl als sphärische Ellipse, wie auch als sphärische Hyperbel angesehen werden. Man nennt beide Kurvenäste zusammen einen *sphärischen Kegelschnitt* mit den *vier Brennpunkten* $F$, $F_1$, $F'$, $F_1'$, und den *vier Scheiteln der Hauptaxe* $A$, $A_1$, $A'$, $A_1'$.

**253.** *Ein sphärischer Kegelschnitt wird aus dem Mittelpunkte $M$ der Kugel durch einen Kegel zweiten Grades projicirt.* Man denke sich auf der Verlängerung eines Leitstrahles $FP$ von $P$ aus den anderen Leitstrahl $PF_1$ als $PQ$ aufgetragen, so bilden alle $Q$ einen aus $F$ mit $FQ = AA_1$ beschriebenen Kugelkreis $q$. Die Tangenten an $PF_1$ in $F_1$ und an $PQ$ in $Q$ schneiden sich wegen $PF_1 = PQ$ in einem Punkte $S$ der $MP$. Bei der Bewegung von $P$ auf $APA_1$ beschreibt jene Tangente in $F_1$ eine Berührungsebene der Kugel, jene Tangente in $Q$ einen Umdrehungskegel, welcher der Kugel entlang $q$ umschrieben ist, folglich beschreibt der Punkt $S$ die Schnittkurve jener Berührungsebene mit diesem Umdrehungskegel. Der Kegel, welcher aus $M$ den von $P$ beschriebenen sphärischen Kegelschnitt projicirt, projicirt auch den von $S$ beschriebenen ebenen Kegelschnitt, ist also vom zweiten Grade.

*Umgekehrt* schneidet jeder Kegel zweiten Grades eine koncentrische Kugel in einem sphärischen Kegelschnitte. Denn legt man die (drei auf einander senkrechten) Hauptebenen des Kegels, wovon zwei den Kegel in je zwei Erzeugenden treffen, so schneiden diese die Kugel in den Punkten $AA_1$ und in den zwei Punkten $B$; sei $AA_1 > BB$, und bestimmt man auf $AA_1$ die Punkte $F$, $F_1$ durch $BF = BF_1 = \frac{1}{2} AA_1$, so geht ein sphärischer Kegelschnitt durch $A$, $A_1$, $B$, $B$, dessen Brennpunkte $F$, $F_1$ sind, welcher daher auch die Ebenen $MAA_1$ und $MBB$ zu Symmetrieebenen hat. Dieser sphärische Kegelschnitt wird aus $M$ durch einen Kegel zweiten Grades projicirt, dessen Hauptebenen samt den vier Strahlen in denselben mit denen des gegebenen Kegels zusammenfallen. Daher fallen auch beide Kegel zusammen und der gegebene schneidet die Kugel in dem bezeichneten sphärischen Kegelschnitte.

**254.** *Die Tangente an einen sphärischen Kegelschnitt bildet gleiche Winkel mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes*, sie halbirt also in unserem Falle die Winkel $FPF_1'$ und $F_1PF'$.

Denn man erhält den zu $P$ benachbarten Punkt $Q$ der Kurve, wenn man zu $PE_1$, $PE_2$ zwei benachbarte gleich weit abstehende Parallelkreise zeichnet. Beide Paare von Parallelkreisen bilden einen unendlich kleinen Rhombus, dessen eine Diagonale $PQ$ ist. Daher bildet $PQ$ oder die Tangente der Kurve gleiche Winkel mit den Parallelkreisen und mit den auf ihnen senkrechten Leitstrahlen $PF$, $PF_1$.

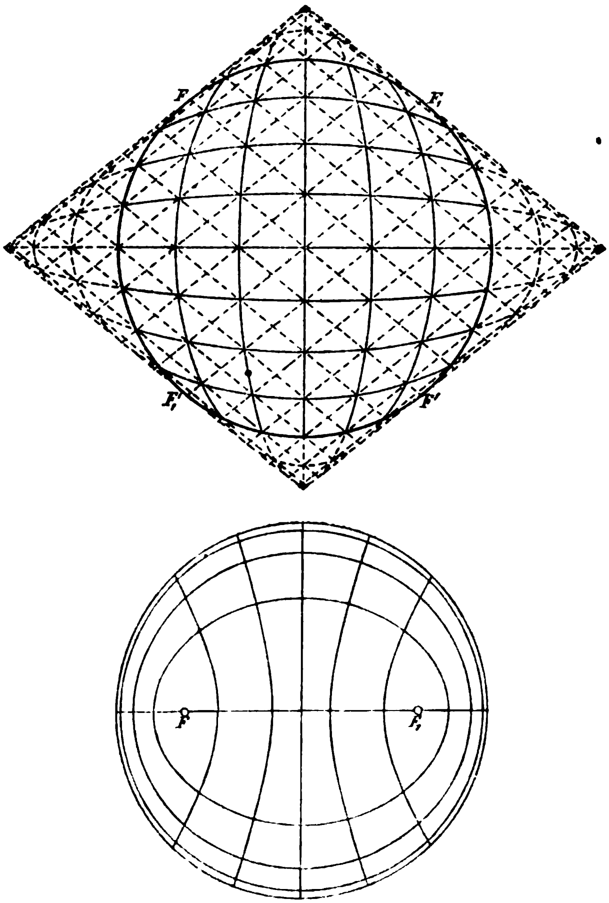
**255.** Auf einer Kugel können durch jeden Punkt $P$ zwei sphärische Kegelschnitte gelegt werden, welche zwei Paare diametral gegenüberstehende Punkte $F$, $F'$; $F_1$, $F_1'$ zu Brennpunkten haben. Ihre Tangenten in $P$ stehen auf einander senkrecht. Für

$F$, $F_1$ als Brennpunkte ist der eine Kegelschnitt eine Ellipse, der andere eine Hyperbel. Die Tangenten halbiren die Nebenwinkel der Leitstrahlen, stehen also auf einander senkrecht (oder auch, weil die Elemente beider Kurven die eine Diagonale und eine Parallele zur andern Diagonale des Rhombus der vor. Nr. sind).

**256.** Die Schaar aller sphärischen Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten heißen *konfokale sphärische Kegelschnitte.*

*Aufg. Eine Anzahl konfokaler sphärischer Kegelschnitte zu verzeichnen.* Es sollen Projektionen auf die beiden Durchmesserebenen gebildet werden, von denen die eine die Brennpunkte $F, F_1, F', F_1'$ enthält, die andere die Bogen $FF_1'$ und $F_1F'$ halbirt. Fig. 116.

Fig. 116.



*Aufl.* Man ziehe auf der Kugel aus zwei diametral gegenüber stehenden Brennpunkten $F$ und $F'$ als Mittelpunkten Parallelkreise, welche den Umfang des größten Kreises $FF'$ in eine durch vier teilbare Anzahl $n$ (hier 28) gleicher Teile teilen; ebenso Parallelkreise aus $F_1$ und $F_1'$ in denselben Abständen. Man denke sich die Kreise von $F$ und $F_1$ aus mit $0, 1, 2 \dots m \dots \frac{n}{2}$ beziffert. Schneidet man nun die Kreise $0, 1, 2 \dots$ aus $F$ bezw. mit denen $m, m-1, m-2 \dots$ aus $F_1$, so ist die Summe der Abstände aller Schnittpunkte von $F$ und $F_1$ übereinstimmend $= \frac{m}{n} 2\pi$, wenn wieder der

Halbmesser der Kugel = 1 gesetzt wird. Die Punkte gehören daher einer sphärischen Ellipse mit den Brennpunkten $F$ und $F_1$ an. Schneidet man die Kreise 0, 1, 2 ... aus $F$ bezw. mit denen $m$, $m+1$, $m+2$ ... aus $F_1$, so erhält man die sphärische Hyperbel zu $F$ und $F_1$.

In der Figur sind $F$ und $F_1$ so gewählt, daß ihr Abstand eine ganze Anzahl, nämlich sechs der 28 Teile des größten Kreises enthält. Dadurch fallen die Teilungspunkte aus $F$ und $F_1$ in einander. Jene Parallelkreise zeigen sich in der Projektion auf die Ebene der Brennpunkte als Gerade. Die Projektionen der sphärischen Kegelschnitte auf jede der Projektionsebenen, weil diese Symmetrieebenen derselben sind, bilden Kegelschnitte (237), und zwar auf der Brennpunktsebene Ellipsen, deren der Kugel nicht mehr angehörige Teile durch dieselben Konstruktionslinien erhalten werden, und welche eine Schaar von Kegelschnitten bilden, die einem Parallelogramme eingeschrieben sind*). Die Projektionen der Kurven auf die andere Projektionsebene sind teilweise Ellipsen, teilweise Hyperbeln; die ersteren bestimmt man leicht durch ihre aus der anderen Projektion erhaltenen Axen; die letzteren durch ihre Hauptaxe und die Punkte des Umrisses der Kugel. Drei der sphärischen Kegelschnitte fallen in einen größten Kreis.

**257.** Projicirt man einen sphärischen Kegelschnitt und seine Brennpunkte aus dem Kugelmittelpunkte bezw. durch einen Kegel zweiten Grades und durch zwei Strahlen $MF$, $MF_1$, so heißen diese Strahlen die *Fokallinien des Kegels.* Es gilt der *Satz, daß jede auf einer Fokallinie senkrechte Ebene den Kegel in einem Kegelschnitte trifft, dessen einer Brennpunkt auf dieser Fokallinie liegt.* Es ergibt sich dies daraus, daß nach Nr. 253 Fig. 115 eine solche auf $MF_1$ senkrechte durch $F_1$ gelegte Ebene die Kugel berührt, während der Kegelschnitt zugleich auf einem der Kugel (nach $q$) umschriebenen Umdrehungskegel liegt, so daß der Berührungspunkt $F_1$ ein Brennpunkt der Schnittkurve der Ebene mit dem Kegel ist (I, 333). Die Eigenschaften von Pol, Polare und Leitlinien kann man durch Projektion von diesem ebenen auf den sphärischen Kegelschnitt übertragen, für welchen dann auch die konjugirten, durch einen Brennpunkt gehenden Strahlen auf einander senkrecht stehen,

*) Nachdem ich diese Konstruktion für konfokale sphärische Kegelschnitte im Anschluß an die bekannte für ebene Kegelschnitte (I, Fig. 248) gezeichnet hatte, brachte mich diese Figur und ihre Ähnlichkeit mit derjenigen der Krümmungslinien des Ellipsoides auf die früher (I, 442) angegebene Art der Verzeichnung einer gewissen Schaar von Kegelschnitten, worauf ich ähnliche Konstruktionen für alle Arten von Kegelschnittschaaren und Büscheln aufsuchte (I, 425—447).

woraus folgt, *daß bei einem Kegel zweiten Grades die konjugirten durch eine Fokallinie gehenden Ebenen auf einander senkrecht stehen**).

### c) Die stereographische Projektion.

**258.** Hier lassen sich leicht die Sätze der *stereographischen Projektion* ableiten. Es ist dies die Projektion der Linien einer Kugelfläche aus einem Punkte $S$ derselben auf eine Ebene, welche mit der Berührungsebene der Kugel in $S$ parallel ist.

1) *Zwei Linien auf der Kugel bilden denselben Winkel, wie ihre Projektionen*; oder was dasselbe sagt: Zwei Tangenten der Kugel in einem Punkte $P$ derselben bilden denselben Winkel, wie ihre Projektionen in $P'$. — Denn der Strahl $SPP'$ bildet gleiche Winkel mit den Berührungsebenen der Kugel in $P$ und $S$, also auch mit der Ebene jener zwei Tangenten und der Projektionsebene. Ferner steht $SPP'$ senkrecht auf der Schnittlinie jener Berührungsebenen, also auch auf der Schnittlinie $s$ der Ebene jener Tangenten und der Projektionsebene. Legt man daher die erstere Ebene in die zweite um, so kommt $P$ in $P'$, die Tangenten aus $P$ kommen mit ihren Projektionen aus $P'$, welche sie in $s$ schneiden, zur Deckung, und ihre Winkel sind daher gleich.

2) *Die Projektion $k'$ eines Kreises $k$ der Kugel, der nicht durch $S$ geht, ist wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt $C'$ die Projektion der Spitze $C$ des der Kugel nach $k$ umschriebenen Kegels ist.* Denn jede Erzeugende des umschriebenen Kegels berührt die Kugel und steht in ihrem Schnittpunkte mit $k$ senkrecht auf $k$. Die Projektionen der Erzeugenden sind daher Strahlen aus $C'$, welche $k'$ senkrecht schneiden; daher muß der $k'$ ein Kreis mit dem Mittelpunkte $C'$ sein. — Es folgt diese Eigenschaft auch aus Nr. 67, indem die Ebene des gegebenen Kreises und die Projektionsebene im projicirenden Kegel antiparallel sind.

*Übungsaufgaben.* Die stereographische Projektion der Erdkugel mit ihren Meridianen und Parallelkreisen aus a) dem Pole, b) einem Punkte des Äquators, c) aus einem beliebigen Punkte der Kugel zu verzeichnen**).

### d) Die allgemeine Aufgabe.

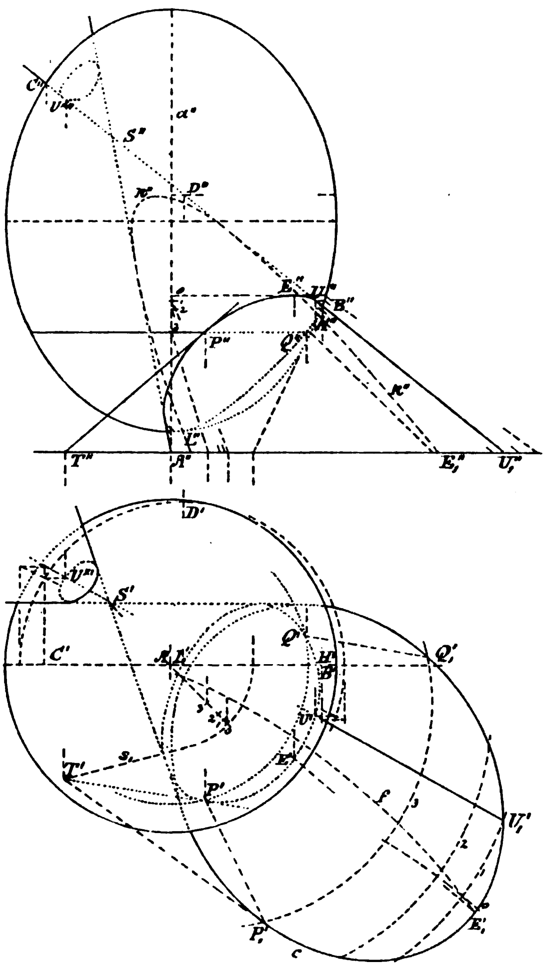
**259.** *Aufg. Die Schnittlinie einer Umdrehungsfläche mit einem beliebigen Kegel zu konstruiren.*

*) *Chasles*, mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré. Bruxelles, 1830.

**) Eine eingehende, auf Theorie und auf mannigfaltige Anwendungen gerichtete Behandlung hat diese Darstellungsweise gefunden in: „Die stereographische Projection von *E. Reusch*, 1881."

Fig. 117. *Aufl.* Sei $\mathbf{P}_1$ senkrecht zur Axe $a$ der Umdrehungsfläche, eines Umdrehungsellipsoides, gestellt, und sei $A$ die erste Spur der $a$. Der Kegel habe $S$ zur Spitze und $c$ zur ersten Spur (hier eine Ellipse).

Fig. 117.




Eine mit $\mathbf{P}_1$ parallele Hilfsebene schneidet die Umdrehungsfläche in einem Kreise $PQ$, den Kegel in irgend einer Kurve, deren Verzeichnung man vermeidet, wenn man den Kreis und diese Kurve aus $S$ auf die $\mathbf{P}_1$ projicirt; die Projektion der ersteren Linie ist wieder ein Kreis $P_1Q_1$, die der letzteren die erste Spur $c$ des Kegels; die Schnittpunkte $P_1$ und $Q_1$ beider, aus $S$ auf die Hilfsebene zurückprojicirt, liefern die Punkte $P$ und $Q$ der gesuchten Kurve.

Um die *Tangente* an die Schnittlinie in $P$ zu konstruiren, bestimme man für $P$ die erste Spur $s_1$ ($\perp A'P'$) der Berührungsebene der Umdrehungsfläche und die des Kegels als Tangente $P_1'T'$ an $c$. Der Schnittpunkt $T$ von beiden bestimmt mit $P$ die Tangente.

**260.** Die *ausgezeichneten Punkte* auf den *Umrissen des Kegels* erhält man mittelst Hilfsebenen, die man durch sie senkrecht zu einer Projektionsebene legt. So führt man durch den Umriß $SU_1$ der zweiten Projektion eine zu $\mathbf{P}_2$ senkrechte Hilfsebene; sie schneidet das Umdrehungsellipsoid in einer Ellipse, von dem sich zwei Scheitel $B$ und $C$ auf dem Hauptmeridiane ergeben, während ein

dritter Scheitel $D$ bestimmt ist durch die Mitte $D''$ von $B''C''$ und durch $D'$ als Punkt des Parallelkreises von $D''$. Um diese Ellipse $B'C'D'$ mit $S'U_1'$ zu schneiden, kann man die Verzeichnung der Ellipse vermeiden, indem man ihre Affinität mit dem über der einen (großen) Axe (wovon $D'$ der eine Endpunkt) als Durchmesser verzeichneten Kreise benutzt, wodurch man die Schnittpunkte $U'$, $U^{*\prime}$ und daraus $U''$, $U^{*\prime\prime}$ erhält. Entsprechend verfährt man mit den anderen Umrissen des Kegels. — Die Punkte auf dem zweiten *Umrisse der Umdrehungsfläche*, also auf seinem Hauptmeridiane, erhält man, indem man dessen Ebene mit dem Kegel in der Kurve (Ellipse) $k'$ schneidet, welche (ohne vollständige Verzeichnung) auf jenem Umrisse die Punkte $H''$, $L''$ bestimmt, woraus sich $H'$, $L'$ ergibt.

Die *höchsten und tiefsten Punkte* der Schnittkurve, in denen ihre Tangenten parallel mit $\mathbf{P}_1$ sind, erhält man auf einem solchen Parallelkreise, auf welchem zwei Punkte der Kurve, wie $P$ und $Q$, zusammenfallen, oder dessen Projektion aus $S$ auf $\mathbf{P}_1$ die $c$ in zwei zusammenfallenden Punkten, wie $P_1$ und $Q_1$, berührt. Halbirt man die Bogen $P_1'Q_1'$ solcher Kreise 1, 2, 3 . . ., und verbindet die Mittelpunkte durch eine Fehlerkurve $f$, so schneidet diese die $c$ in Punkten, wie $E_1'$, auf deren Erzeugenden, wie auf $SE_1$, höchste oder tiefste Punkte, wie $E$, liegen. $E$ erhält man wieder vermittelst einer durch $SE_1$ gelegten Hilfsebene; oder indem man durch eine andere Fehlerkurve auf $S'A'$ den Mittelpunkt 0 des die $c$ in $E_1'$ berührenden Kreises, und daraus den Parallelkreis 0 des Punktes $E$ bestimmt.

**261.** *Übungsaufgabe.* Den Durchschnitt einer Umdrehungsfläche mit einem Cylinder zu konstruiren, etwa eines Ringes mit einem elliptischen Cylinder.

Sind die Erzeugenden des Cylinders parallel oder senkrecht zur Umdrehungsaxe, so gestaltet sich die Auflösung besonders einfach.

### IV. Der Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen unter einander.

**262.** Man erkennt leicht:

1) Haben zwei Umdrehungsflächen eine gemeinschaftliche Umdrehungsaxe, so besteht ihre Schnittlinie aus gemeinschaftlichen Parallelkreisen.

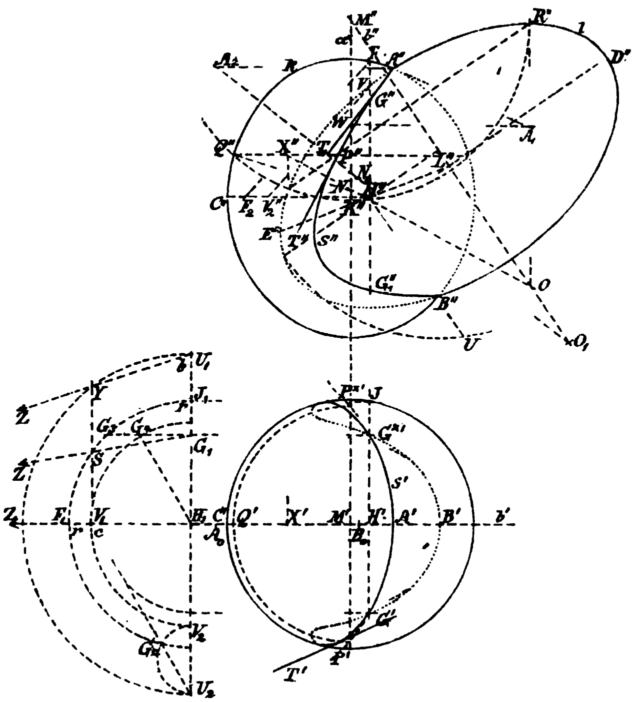
2) Eine Kugel schneidet eine Umdrehungsfläche, auf deren Axe ihr Mittelpunkt liegt, nach Parallelkreisen.

*Aufg. Die Schnittlinie s zweier Umdrehungsflächen zu konstruiren, deren Axen sich treffen.*

*Aufl.* Es seien $a$ und $b$ die Umdrehungsaxen beider Flächen Fig. 118.
und $M$ ihr Schnittpunkt. Man stelle $\mathbf{P}_1$ senkrecht zur einen Axe,

etwa der $a$, $\mathbf{P}_2$ parallel zu beiden. Die erste Fläche sei ein verlängertes, die zweite ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, bezw. mit den Hauptmeridianen $k$ und $l$, den Mittelpunkten $K$ und $L$, und den nicht in den Umdrehungsaxen liegenden Halbaxen $K''C''$ und $L''D''$. Der erste Umriß der ersten Fläche ist der Äquatorkreis, derjenige der zweiten Fläche eine Ellipse, welche aber, weil nicht notwendig,

Fig. 118.



nicht verzeichnet wurde. Legt man eine Hilfskugel aus $M$ als Mittelpunkt, so schneidet dieselbe jede der Flächen in einem Parallelkreise, deren zweite Projektionen Gerade sind senkrecht zu den bezüglichen Axen, und welche Kreise sich in reellen oder imaginären Punkten treffen, weil sie auf derselben Hilfskugel liegen. So schneidet der Hauptmeridian $Q''R''$ einer Hilfskugel, der ein Kreis aus $M''$ ist, jeden der beiden gegebenen Hauptmeridiane in zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden $Q''P''$ ($\perp a''$) und $R''P''$ ($\perp b''$) die Schnittkreise der Kugel mit den gegebenen Flächen darstellen. Der Schnittpunkt $P''$ beider Geraden ist die zweite Projektion der beiden Schnittpunkte jener Kreise, deren erste Projektionen $P'$, $P^{*\prime}$ man auf der ersten Projektion des zu $\mathbf{P}_1$ parallelen Kreises $QP$ erhält. Auf dieselbe Weise findet man beliebig viele Punkte der

Schnittkurve $s$, insbesondere auch diejenigen auf dem ersten Umrisse der aufrechtstehenden Umdrehungsfläche. — Die beiden Hauptmeridiane liefern die Schnittpunkte $A$ und $B$.

**263.** Da beide *Flächen zweiten Grades sind* und da die Ebene beider Axen eine gemeinschaftliche Hauptebene und parallel zu $\mathbf{P}_2$ ist, so ergibt sich *die zweite Projektion $s''$ der Schnittkurve als eine Linie zweiten Grades* (237). Von derselben ist der begrenzte Bogen $A''P''B''$ nützlich, der übrige Teil parasitisch. Doch muß man, wie bei den Kegeln in Nr. 239, die ganze Kurve zweiten Grades im erweiterten Sinne als zur Schnittkurve gehörig ansehen. Ein Teil des äußeren Teiles wird durch dieselbe Konstruktion erhalten, nur daß man die Sehnen, wie $Q''P''$ und $R''P''$, verlängern muß. Die Ergänzung der Kurve ist die Schnittlinie der beiden zu den Umdrehungsflächen in Bezug auf den unendlich fernen Projektionsmittelpunkt für $\mathbf{P}_2$ konjugirten Flächen, d. i. zweier einschaligen Hyperboloide.

Indem man die gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkte dieser Hyperboloide aufsucht, entscheidet man zugleich, ob $s''$ eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist. Die Asymptotenkegel der Flächen schneiden die parallel zu der gemeinschaftlichen Hauptebene (und zu $\mathbf{P}_2$) in dem Abstande der auf $\mathbf{P}_2$ senkrechten jedesmaligen halben Flächenaxe ($= K''C''$ und $L''D''$) gelegten Ebenen bezw. in Kurven, deren zweite Projektionen $k$ und $l$ sind. Verschiebt man den zweiten Kegel parallel zu seiner Anfangslage so, daß er koncentrisch mit dem ersteren liegt (daß also $L$ in $K$ rückt), so schneidet er die erstere im Abstande $K''C''$ gelegte Parallelebene in einer zu $l'$ ähnlichen und parallelen (nicht verzeichneten) Ellipse $l_1$, deren dem $L''D''$ entsprechender Halbdurchmesser $K''D_1 = K''C''$ ist. Die Verbindungslinien der vier Schnittpunkte der koncentrischen Ellipsen $k$ und $l_1$ mit $K$ sind parallel zu den Asymptoten der Ergänzungskurven von $s$; und die zwei Vertikalprojektionen dieser vier Geraden sind parallel zu den Asymptoten von $s''$.

Je nachdem jene vier Schnittpunkte reell und getrennt, imaginär oder in zwei Punkte zusammenfallend sind, ist $s''$ eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel; und dies tritt, wie man sich leicht vorstellen kann, der Reihe nach ein, wenn die zwei gleichen Axen ($K''C''$ und $K''D_1$) nicht parallel und gleichartig (beide große oder beide kleine), nicht parallel und ungleichartig oder parallel sind. Daraus folgt der

*Satz. Die Schnittlinie zweier Umdrehungsellipsoide, deren Umdrehungsaxen in einer Ebene liegen, projicirt sich auf diese Ebene in eine Parabel, wenn die Axen parallel laufen, andernfalls in eine*

*Hyperbel oder Ellipse, je nachdem die Flächen gleichartig* (*d. i. beide verlängert oder beide abgeplattet*) *oder ungleichartig sind.*

Auch für andere Umdrehungsflächen oder für dreiaxige Flächen zweiten Grades, von denen zwei Axen sich treffen, läßt sich in ähnlicher Weise die gleiche Frage beantworten.

**264.** Die *Doppelpunkte* $G'$, $G^{*\prime}$ *der ersten Projektion* $s'$ *der Schnittkurve* liegen in der ersten Projektion der Schnittgeraden der Polarebenen des unendlich fernen Punktes der $z$ Axe zu beiden Flächen (226). Die zweiten Projektionen dieser Ebenen enthalten die Halbdurchmesser $K''C''$, $L''E''$ der Ellipsen $k$ und $l$, und die erste Projektion ihrer Schnittgeraden ist die auf $P_2$ senkrechte (und mit der $y$ Axe parallele) $H''H'$. Auf ihr findet man die Doppelpunkte aus den vier Schnittpunkten der beiden Ellipsen, in welchen die erste projicirende Ebene von $H''H'$ beide Flächen trifft. Diese Ellipsen haben $H$ zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte und ihre mit $y$ und $z$ parallelen Axen sind bei dem aufrechten Ellipsoid $H'J$, $H''F$, bei dem geneigten $H''U$, $H''V$, wie leicht aus der Figur zu erkennen.

**265.** Die *Aufgabe, die Schnittpunkte zweier Ellipsen zu bestimmen, deren beiderlei Axenlinien in einander liegen*, kann man auf verschiedene Weisen lösen. Zunächst durch eine solche affine Veränderung, durch welche die eine Ellipse in einen Kreis übergeht. Projicirt man durch Parallele zu $P_2$ und Geneigte gegen $P_1$ beide Ellipsen so auf die Äquatorebene $K''C''$ des aufrechten Ellipsoides, daß die erstere Ellipse ein Kreis wird, wobei die zweite aber eine Ellipse bleibt, so hat man nur die vier Schnittpunkte einer Ellipse mit einem koncentrischen Kreise zu bestimmen. Diese schiefe Projektion wurde in $P_1$ in der Richtung der $x$ Axe verschoben, so daß die mit $y$ parallelen Axen $H_1J_1 = H'J$ und $H_1U_1 = H''U$ sind. Macht man in $H''C''$ die $H''F_2 = H'J$, so hat $FF_2$ die Richtung der Projicirenden, und $VV_2'' \parallel FF_2$ bestimmt die Axe $H''V_2'' = H_1V_1$ der schiefen Projektion der zweiten Ellipse. Es sind nun die Schnittpunkte der Ellipse von den Axen $H_1U_1 = b$, $H_1V_1 = c$ mit dem koncentrischen Kreise von dem Halbmesser $H_1J_1 = H_1F_1 = r$ zu bestimmen.

*Aufl.* 1. *Analytisch* gibt man die Gleichungen beider Kurven an:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

woraus man für die Schnittpunkte erhält

$$y = \pm b \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Aus der Figur ist ersichtlich, daß

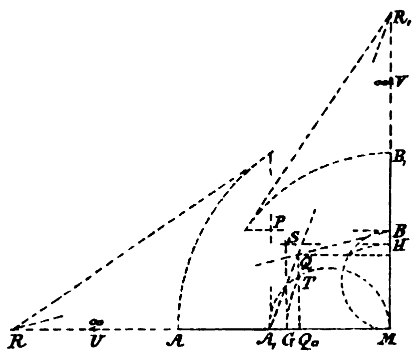
$$V_1S = \sqrt{r^2 - c^2}, \quad V_1Y = \sqrt{b^2 - c^2};$$

schneidet man daher $U_1 Y$ mit $H_1 F_1$ in $Z$, und zieht die $ZS$, so schneidet diese auf $H_1 J_1$ die $H_1 G_1 = y$ ab. Dadurch ist $G^{*\prime}$ und $G'$ (sowie ein Schnittpunkt $G_3$ jener Ellipse mit dem Kreise) bestimmt. Vermittelst des durch $G'$ gehenden Parallelkreises lassen sich dann auch die beiden zweiten Projektionen $G''$, $G_1''$ der vier Punkte ermitteln.

*Aufl.* 2. *Geometrisch* bestimmt man die Schnittpunkte einer Ellipse mit einem koncentrischen Kreise*), indem man beachtet, daß (I, 372) Punkte der Ellipse aus den beiden über den Axen als Durchmessern gezogenen Kreisen als Scheitel der rechten Winkel in rechtwinkligen Dreiecken gewonnen werden, deren Hypotenusen durch den Mittelpunkt gehen und von beiden Kreisen begrenzt sind, und deren vom Punkte des großen Kreises ausgehende Kathete senkrecht auf der großen Axe steht. Schneidet man jene Kreise mit $H_1 U_1$ bezw. in $U_2$ und $V_2$, beschreibt über $U_2 V_2$ als Durchmesser einen Kreis und schneidet ihn mit jenem koncentrischen Kreise in $G_2$, so ist $U_2 V_2 G_2$ die Gestalt desjenigen rechtwinkligen Dreiecks, welches die vier Punkte $G$ liefert. Man dreht dieses Dreieck um $H_1$ an seine richtige Stelle, indem man vom Punkte $U_2$ des großen Kreises die Kathete $U_2 G_2$ zieht, an sie einen berührenden Kreis aus $H_1$, und an diesen die beiden zur großen Axe senkrechten Tangenten legt; dieselben enthalten die gesuchten vier Schnittpunkte, sowie auch $G'$, $G^{*\prime}$. Oder man bestimmt $G_4$ auf dem kleinen Kreise so, daß $H_1 G_4 \parallel U_2 G_2$; dann liegt $G_4$ auf $G_3 G_1 G^{*\prime}$. Fig. 118.

*Aufl.* 3. Unsere Aufgabe, auch in der allgemeineren Fassung, *die vier Schnittpunkte*, wie $S$, *zweier koncentrischen Kegelschnitte* $k$, $k_1$ *zu bestimmen*, kann man nach I, 409 ff. lösen. Man ermittele als Doppelstrahlen der beiden Involutionen konjugirter Durchmesser (I, 348) die konjugirten Halbdurchmesser $MA$, $MB$ des $k$, welche in konjugirte Halbdurchmesser $MA_1$, $MB_1$ des $k_1$ fallen, mögen diese reell oder ideell sein. Fig. 119.

Fig. 119.




Sind $U$ und $V$ die unendlich fernen Punkte von $MA$ und $MB$, so ist $MUV$ das gemeinschaftliche Polardreieck zu $k$ und $k_1$. Sind nun

*) Diese Konstruktion ist aus *Peschka*, darstellende und projektive Geometrie, B. 3, S. 261 entnommen.

die $P$ und $Q$ zwei in Bezug auf $k$ und $k_1$ konjugirte Punkte, so liegen vier Schnittpunkte, wie $S$, auf zwei Strahlen aus jedem der Punkte $M$, $U$, $V$, welche durch die zwei anderen Punkte und durch $P$ und $Q$ harmonisch getrennt sind. Wählt man $P$ als vierten Eckpunkt des Parallelogrammes $A_1MBP$, so sind die Polaren $BR$ und $A_1R_1$ von $P$ bezw. zu $k$ und $k_1$ auf die in der Figur ersichtliche Weise ermittelt ($MR.MA_1 = MA^2$, $MR_1 . MB = MB_1^2$); ihr Schnittpunkt ist $Q$. Schneidet man nun $VQ$ mit $MA$ in $Q_0$ und bestimmt $G$ auf $MA$, so daß $MG^2 = MA_1 . MQ_0$, so geht $VG$ durch $S$. Man erhält aber $MG = MT$, wenn $T$ ein Schnittpunkt der $QQ_0$ mit dem über $MA_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreise ist. Entsprechend erhält man $USH$, sowie $MS$. Sollten $M$, $P$, $Q$ auf einer Geraden liegen, so liegt auch $S$ auf derselben. — Doch dürfte die unmittelbare Verzeichnung der beiden Kegelschnitte rascher und ebenso genau die Schnittpunkte liefern.

Fig. 118. **266.** Die *Tangente* der Schnittkurve in einem Punkte $P$ derselben wird hier am kürzesten als Senkrechte zu ihrer Normalebene bestimmt, und diese als die Ebene der Normalen der beiden Flächen in $P$. Die Normale der aufrechten Fläche ist $PN$, wenn die Normale $QN$ des Hauptmeridians die Umdrehungsaxe $a$ in $N$ schneidet; die Normale der geneigten Fläche entsprechend $PO$. Daher ist $NO$ die Spur der Normalebene in der Ebene der beiden Umdrehungsaxen, und auf ihr steht die zweite Projektion $P''T''$ der Kurventangente senkrecht; die Spur der Normalebene in der $\parallel \mathbf{P}_1$ durch $P$ gelegten Ebene ist $P'X'$, wenn $X$ der Schnittpunkt dieser Ebene mit $NO$; daher ist $P'T' \perp P'X'$.

Man bemerkt, daß die Tangente im Aufriß unabhängig vom Grundriß gefunden wird, so daß dadurch auch die Tangenten in den Endpunkten $A''$, $B''$ des nützlichen Kurvenstückes bestimmt werden können, während eine solche als die Projektion der Schnittlinie der Berührungsebenen beider Flächen, da diese $\perp \mathbf{P}_2$ stehen, nur ein Punkt sein würde. So ist für $A''$ die Tangente $A''T_1 \perp N_1O_1$, wenn $N_1$, $O_1$ die Schnittpunkte der Normalen der Flächen in $A$ bezw. mit $a$ und $b$ bilden. Aus der Tangente $A''T_1$ läßt sich auch leicht der *Krümmungshalbmesser* $A'A_0 = WA_1$ (und entsprechend der $B'B_0$ in $B'$) nach Nr. 171 bestimmen, wenn $W$ den Schnittpunkt von $A''T_1$ mit $a''$ bezeichnet, als Halbmesser des Parallelkreises mit dem Mittelpunkte $W$ des die erste Fläche nach dem Parallelkreise von $A$ berührenden Kegels.

Man kann auch auf eine andere Art diesen *Krümmungshalbmesser* bestimmen, indem man $A''T_1$ als die zweite Projektion der Schnittlinie der beiden Kugeln auffaßt, welche aus $N_1$ und $O_1$ durch

$A$ gelegt sind, also die Umdrehungsflächen bezw. nach ihren durch $A$ gehenden Parallelkreisen berühren. Die Schnittlinie dieser Kugeln ist ein Kreis, dessen Ebene $\perp N_1 O_1$ steht, dessen Halbmesser und halbe zweite Projektion $= T_1 A''$ ist, und welcher den Krümmungskreis der Schnittkurve $s$ in $A$ bildet, und zwar, weil $A$ ein Scheitel der $s$, einen solchen mit vierpunktiger Berührung. Denn der Kreis $T_1 A''$ und die durch $A$ gehenden Parallelkreise beider Flächen und $s$ berühren sich zweipunktig in $A$; die benachbarten Parallelkreise, welche je einer Fläche und ihrer berührenden Kugel gemein sind, liefern noch zwei Schnittpunkte, welche der $s$ und dem Kreise $T_1 A''$ angehören, so daß diese letzteren Linien vier in $A$ zusammenfallende Punkte gemein haben*). Die erste Projektion dieses Krümmungskreises der $s$ ist eine Ellipse, deren Axen $= T_1 A''$ und gleich der ersten Projektion $(T_1 A'')$ von $T_1 A''$ sind, deren Krümmungshalbmesser in $A'$ daher $= T_1 A''^2 : (T_1 A'') = A'' A_2 = A' A_0$ ist, wenn $A_2$ den Schnittpunkt der $N_1 O_1$ mit der auf $a''$ Senkrechten $A'' A_2$ bezeichnet.

**267.** *Übungsaufgaben.*

1) Die Schnittlinien zweier Umdrehungsflächen zweiten Grades, deren Umdrehungsaxen sich treffen, zu verzeichnen, unter Annahmen, wodurch die Projektion der Schnittlinie auf die Ebene jener Axen eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel wird (s. Nr. 263). Ebenso von zwei dreiaxigen Flächen zweiten Grades mit zusammenfallenden Hauptebenen (263, Schluß); die erste Projektion kann auch bei Ersatz der Kreise durch Kegelschnitte leicht ohne deren Verzeichnung bestimmt werden.

2) Aus drei Punkten von bekannter Lage auf der eben und horizontal gedachten Erdoberfläche mißt man gleichzeitig die Winkel, welche die Sehstrahlen nach einem Luftballon mit der Lotlinie bilden; man soll aus diesen Winkeln die Horizontalprojektion und die Höhe des Ballons konstruiren.

Die Auflösung vermittelst der Durchschnitte dreier Umdrehungskegel bietet eine Mehrdeutigkeit, welche aber durch die Angabe beseitigt wird, in welchen von den durch die Vertikalebenen je zweier Beobachtungspunkte gebildeten Winkeln sich die Sehstrahlen nach dem Ballon befinden.

3) Den Ort des Ballons in der vorhergehenden Aufgabe zu bestimmen, wenn von ihm aus die drei Winkel gemessen sind, welche die Sehstrahlen nach den drei gegebenen Punkten miteinander bilden.

---

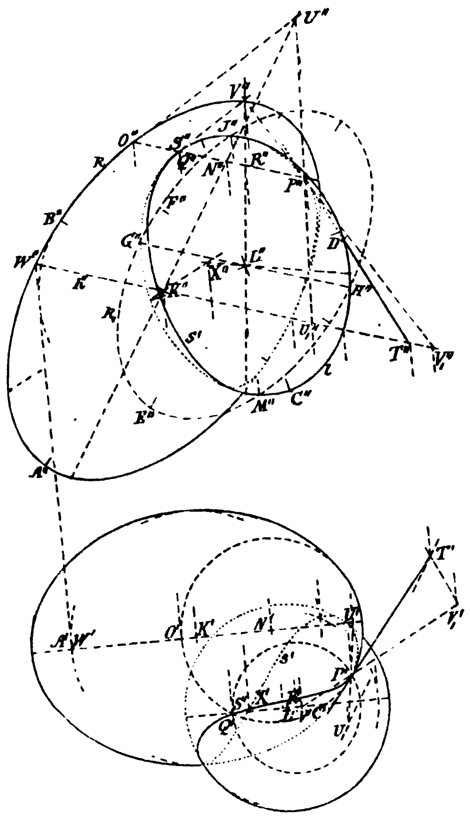
*) Soweit findet sich diese Entwickelung in *Mannheim*, C. d. géom. desc., 1880, S. 212.

Die Auflösung geschieht vermittelst des Durchschnittes dreier Ringflächen, wovon jede die Verbindungslinie zweier der gegebenen Punkte zur Axe und einen Kreisbogen zum Meridiane hat, der den zugehörigen gemessenen Winkel faßt.

**268.** *Aufg. Die Schnittlinie zweier Umdrehungsellipsoide zu konstruiren, deren Umdrehungsaxen sich nicht schneiden*).*

Fig. 120. *Aufl.* Man nehme die eine Projektionsebene, etwa $P_2$, parallel zu beiden Umdrehungsaxen, und es seien dann die zweiten Projektionen der Umrisse und Hauptmeridiane beider Flächen die Ellipsen $k$, $l$ bezw. mit den Halbaxen $K''A''$, $K''B''$ und $L''C''$, $L''D''$; $KA$ und $LC$ seien die Umdrehungsaxen, de n kürzester Abstand außerdem gegeben sei mit der Bemerkung, daß der Mittelpunkt $L$ vor demjenigen $K$ liege. Die Stellung der $P_1$ soll in einer für die Konstruktion zweckmäßigen Weise bestimmt werden. Jede auf $P_2$ senkrechte Hilfsebene schneidet jede der Flächen in einer Ellipse, deren eine Axe senkrecht auf $P_2$ steht, so daß die Axen beider Ellipsen paarweise parallel sind. Bestimmt man nun die Stellung der Hilfsebene derart, daß die beiden Schnittellipsen ähnlich und ähnlich gelegen sind, so kann man $P_1$ so annehmen, daß die ersten Projektionen beider Ellipsen Kreise werden. Um dies zu erreichen, lege man ein drittes Umdrehungsellipsoid, ähnlich und ähnlich gelegen mit dem ersten ($K$), von dem der Mittelpunkt und die Scheitel der auf $P_2$ senkrechten Axe bezw. mit dem Mittel-

Fig. 120.



*) Der Grundgedanke der folgenden Auflösung rührt von *Chapuy* her (Correspondance sur l'école polytechnique, B. 2, 1811, S. 156).

punkte $L$ und mit Scheiteln des zweiten zusammenfallen. Sein Hauptmeridian ist daher die Ellipse $k_1$ mit den Scheiteln $E''$, $F''$, wobei $L''E'' \parallel K''A''$, $L''F'' \parallel K''B''$, $L''F'' = L''D''$, $F''E'' \parallel B''A''$.

Die beiden koncentrischen Ellipsoide berühren sich nun in den gemeinsamen Scheiteln der auf $\mathrm{P}_2$ senkrechten Axe; daher wird ihre Schnittkurve, wenn überhaupt eine solche besteht, durch zwei Ellipsen gebildet, deren jede jene Scheitel zu Scheiteln hat, und deren zweite Projektionen die gemeinschaftlichen Durchmesser $G''H''$, $J''M''$ ihrer Hauptmeridiane sind, wenn sich diese in den vier Punkten $G''$, $H''$, $J''$, $M''$ treffen. Die auf $\mathrm{P}_2$ senkrechte durch einen dieser Durchmesser, etwa durch $G''H''$, gehende Ebene schneidet daher die zweite und dritte Fläche in derselben Ellipse, daher die erste und zweite in ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen; und letzteres gilt auch von jeder mit jener Ellipse $G''H''$ parallelen Ebene. Soll die Projektion auf eine $\mathrm{P}_1$ von der Ellipse $GH$ und dann von jeder der bezeichneten parallelen Ellipsen ein Kreis sein, so ziehe man, am besten an der größten $KW$ dieser Ellipsen, aus einem Endpunkte $W''$ einer der mit $\mathrm{P}_2$ parallelen Axen eine der Tangenten $W''W'$ an den aus $K''$ durch $B''$ gezogenen Kreis, und stelle $\mathrm{P}_1$ senkrecht zu dieser Tangente. Dann sind die auf der Tangente senkrechten Linien $K'A'$ und $L'C'$, deren Abstand gleich dem gegebenen Abstande der Umdrehungsaxen ist, die ersten Projektionen von diesen Axen und von den Hauptmeridianen; und es können dann, wie in der Figur geschehen, die ersten Umrisse der Flächen, zwei Ellipsen, die jedoch zur weiteren Konstruktion nicht notwendig sind, leicht verzeichnet werden. Eine mit $G''H''$ parallele Hilfsebene $O''S''$ schneidet beide Flächen in Ellipsen, deren Mittelpunkte $N$ und $R$ auf den zu den Hilfsebenen bezw. konjugirten Durchmessern $KN$ und $LR$ liegen. Die ersten Projektionen dieser Ellipsen sind die aus $N'$ durch $O'$ und aus $R'$ durch $S'$ gezogenen Kreise; diese schneiden sich in den Punkten $P'$ und $Q'$ der gesuchten Schnittkurve $s$, aus denen sich $P''$ und $Q''$ auf $O''S''$ ergeben.

**269.** Um die *Tangente der Schnittkurve* in ihrem Punkte $P$ zu ermitteln, lege man in $P$ die Berührungsebene an jede der beiden Flächen, die man durch die Tangenten der durch $P$ gehenden Hilfsellipse und durch die Erzeugende des der Fläche entlang dieser Ellipse umschriebenen Kegels bestimmt, und schneide beide Berührungsebenen mit einer der Hilfsebenen, etwa mit der durch $K''W'' = h''$ bestimmten Hilfsebene $\mathrm{H}$. Für die erste Ellipse ist die Spitze jenes Kegels der Schnittpunkt $U$ der Tangente $O''U''$ des Hauptmeridians $k$ in $O''$ mit dem Durchmesser $K''N''$; der Schnittpunkt der Erzeugenden $UP$ dieses Kegels mit $\mathrm{H}$ ist $U_1$, und die

Spur der Berührungsebene in **H** ist die mit der Tangente jener Hilfsellipse in $P$ parallele $U_1 T$, deren erste Projektion $U_1' T'$ parallel mit der Tangente des Hilfskreises in $P'$ oder $\perp N'P'$ läuft. Entsprechend zeichnet man für die zweite Fläche die Tangente $S''V''$ der $l$, $VP$, $V_1$ und $V_1'T' \perp R'P'$. Die Spuren $U_1'T'$ und $V_1'T'$ beider Berührungsebenen treffen sich in $T'$, so daß $PT$ die gesuchte Tangente ist.

Man bemerkt, daß zweierlei Stellungen der Hilfsebenen und viererlei Stellungen der $\mathbf{P}_1$ möglich sind. — Treffen sich die Hauptmeridiane $l$ und $k_1$ des zweiten und dritten Ellipsoides nicht, so ist das angegebene Verfahren nicht anwendbar. Man könnte zwar eine andere mit der ersten Fläche ähnliche und parallele Gestalt der dritten so bestimmen, daß die Hauptmeridiane der zweiten und dritten Fläche sich in zwei diametral gegenüberstehenden Punkten berührten, die Flächen daher doch wieder zwei Ellipsen gemein hätten, und könnte diese als Kreise projiciren. Da die Ebenen dieser gemeinsamen Ellipsen aber gegen $\mathbf{P}_2$ geneigt wären, so würde dieses Verfahren zu umständlich sein; man wendet daher dann besser das der folgenden Aufgabe für zwei allgemeine Flächen zweiten Grades an.

Die *Doppelpunkte*, wie $X'$, der ersten Projektion $s'$ der Schnittkurve liegen wieder in der ersten Projektion $X''X'$ der Schnittgeraden der zur ersten Projicirenden ($\perp \mathbf{P}_1$) konjugirten Durchmesserebenen $K''X''$, $L''X''$ beider Flächen. Der eine Doppelpunkt $X'$ ist ein eigentlicher, der andere ist ein isolirter Punkt. Beide könnten wie in den Nummern 227, 233 bestimmt werden.

**270.** *Übungsaufg. Die Schnittlinie zweier beliebigen Umdrehungsflächen zu ermitteln.* Man wendet hier vorteilhaft eine $\mathbf{P}_1$ und Hilfsebenen an, welche senkrecht auf der Axe der einen Fläche stehen. Dieselben schneiden diese Fläche in Kreisen, die andere aber in Kurven von wechselnder Gestalt, deren Verzeichnung im allgemeinen nicht vermieden werden kann.

Sind aber diese Kurven unter einander ähnlich und ähnlich gelegen, so gestaltet sich das Verfahren einfacher. Nun kommt unter allen Umdrehungsflächen nur denen vom zweiten Grade die Eigenschaft zu, von unter einander parallelen Ebenen von beliebiger Stellung in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven geschnitten zu werden. Ist daher die eine von beiden Flächen vom zweiten Grade, so legt man die Hilfsebenen senkrecht zur Axe der anderen Fläche; dann schneiden sie diese Fläche in Kreisen, diejenige vom zweiten Grade in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. Die Verzeichnung derselben kann man aber vermeiden, wenn man in $\mathbf{P}_1$ einen mit jenen Kegelschnitten ähnlichen und ähnlich gelegenen

festen Kegelschnitt verzeichnet und in ihn jene Schnittkurven aus wechselnden Projektionsmittelpunkten projicirt. Dabei projiciren sich die Schnittkreise wieder in Kreise, deren Schnittpunkte mit dem festen Kegelschnitte man dann nur aus den zugehörigen Projektionsmittelpunkten in die entsprechenden Hilfsebenen zurückzuprojiciren braucht, um in ihnen Punkte der gesuchten Schnittkurve zu erhalten.

Dies Verfahren ist auch bei zwei Umdrehungsflächen zweiten Grades nicht unvorteilhaft.

## V. Der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades unter einander.

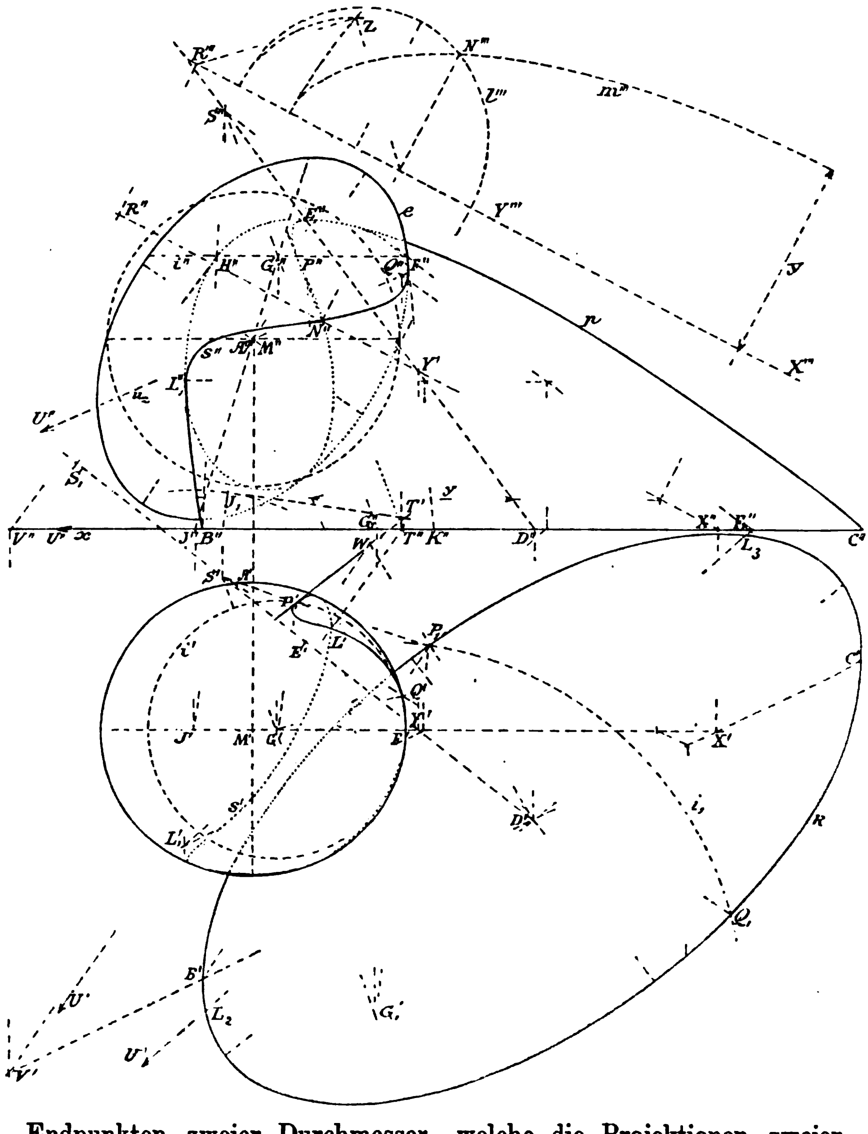
**271.** Jede Fläche zweiten Grades läßt *zwei Schaaren paralleler Ebenen* zu, welche die Fläche, wenn sie ein hyperbolisches Paraboloid ist, in einer unendlich fernen und in je einer durch das Endliche gehenden *Geraden*, in den anderen Fällen in je einem *Kreise* schneiden. Bei der Bestimmung der Schnittlinien zweier Flächen zweiten Grades benutze man die Ebenen einer dieser Schaaren, welche der einen von beiden Flächen zugehören, als Hilfsebenen; sie schneiden die andere Fläche in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. Um die wiederholte Verzeichnung von solchen zu vermeiden, lege man die eine Projektionsebene $\mathrm{P}_1$ parallel zu den Hilfsebenen, zeichne in $\mathrm{P}_1$ einen Kegelschnitt $k'$, ähnlich und ähnlich gelegen mit den genannten und in passender Größe und Lage, so lassen sich diese auf $k'$ aus einem der jedesmaligen beiden Ähnlichkeitspunkte $S$ projiciren; aus $S$ projicire man auch jene Geraden bezw. Kreise der ersten Fläche in $\mathrm{P}_1$ (wieder in Gerade bezw. Kreise), schneide diese Projektionen mit dem festen Kegelschnitte $k'$ und projicire die Schnittpunkte aus $S$ in die zugehörigen Hilfsebenen (also auf die ursprünglichen Geraden und Kreise) zurück, so erhält man in den Projektionen Punkte der Schnittkurve. Liegt eine Schaar von Geraden vor, so kann man deren Durchschnitte mit den Kegelschnitten auch ohne Projektion auf den festen Kegelschnitt und mit Vermeidung der Verzeichnung der einzelnen Kegelschnitte bestimmen (I, 384, besonders einfach bei Ellipsen).

**272.** *Aufg. Die Durchschnittslinie eines Ellipsoides mit einem elliptischen Paraboloide zu bestimmen.*

*Aufl.* Man nehme die eine Schaar der Kreisschnittebenen des Ellipsoides zu Hilfsebenen; da dieselben parallel mit der mittelgroßen der drei Axen des Ellipsoids sind, so stelle man die $\mathrm{P}_2$ senkrecht auf diese Axe und damit auf die Hilfsebenen. $M$ sei der Mittelpunkt, $MA$ die mittelgroße Halbaxe, die Ellipse $e$ die zweite Fig. 121.

Projektion des zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Hauptschnittes der Fläche. Legt man nun aus $M$ als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Halbmesser $MA$, welche die Ebene der Ellipse $e$ in einem koncentrischen größten Kreise trifft, so schneidet dieser die $e$ in vier Punkten, den

Fig. 121.



Endpunkten zweier Durchmesser, welche die Projektionen zweier Kreise des Ellipsoides sind, mit deren einem wir die Projektionsaxe $x$ und $\mathbf{P}_1$ parallel annehmen. Der Umriß der ersten Projektion ergibt sich als Ellipse, deren eine Halbaxe $M'A' = MA$ ist.

Das Paraboloid sei gegeben durch seine erste Spur, die Ellipse $k$, und durch den Berührungspunkt $E$ seiner mit $\mathbf{P}_1$ parallelen Berührungsebene. Sind $B'$ und $C'$ die Berührungspunkte der auf $x$ senkrechten Tangenten der $k$, so ist die Parabel $BEC$ oder $p$, deren Tangente in $E$ parallel zu $BC$, der zweite Umriß des Paraboloides und wird nach I, 380 verzeichnet. Sei $D$ der Mittelpunkt von $BC$, so ist $ED$ der zu $\mathbf{P}_1$ konjugirte Durchmesser der Parabel $p$ und des Paraboloides; er enthält die Mittelpunkte aller mit $\mathbf{P}_1$ parallelen (und mit $k$ ähnlichen und ähnlich gelegenen) Schnittellipsen der Fläche, sowie die Spitzen der Kegel, welche diese Kegelschnitte auf jenen festen Kegelschnitt projiciren, wenn man als solchen die erste Spur $k$ des Paraboloides wählt.

Man lege nun parallel zu $\mathbf{P}_1$ eine Hilfsebene; dieselbe schneidet die Ellipse $e$ in zwei Punkten, deren einer $F''$ sei, und den zu $x$ konjugirten Durchmesser der $e$ in $G''$, daher das Ellipsoid in einem Kreise $i$ vom Mittelpunkte $G$ und dem Halbmesser $G''F''$. Die erste Projektion $i'$ desselben kann nun, mittelst $M'G'F' \parallel x$, verzeichnet werden. — Dieselbe Hilfsebene trifft das Paraboloid in einer zu $k$ ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse, deren auf dem Umrisse $p$ gelegener Punkt $H''$ dem Punkte $B$ oder $C$ der $k$ entspricht, weil die Tangenten beider Kurven in diesen Punkten $\perp \mathbf{P}_1$, also unter einander parallel sind. Die Spitzen der beiden diese zwei Ellipsen auf einander projicirenden Kegel sind daher die Schnittpunkte von $ED$ mit $HB$ bezw. mit $HC$. Wählen wir den ersteren Punkt $S$ (den äußeren Ähnlichkeitspunkt der Ellipsen), so projicirt sich aus ihm die in der Hilfsebene gelegene Ellipse des Paraboloides auf $\mathbf{P}_1$ in $k$, der Kreis $i$ des Ellipsoides in $i_1$, dessen Mittelpunkt $G_1'$ die erste Spur der $SG$, und dessen Halbmesser gleich der Projektion $G_1''F_1''$ des $G''F''$ aus $S''$ auf $x$ ist. Schneiden sich $k$ und $i_1$ in den Punkten $P_1$ und $Q_1$, so projicire man diese aus $S$ auf $i$ zurück in die Punkte $P$ und $Q$, oder, was genauer, man bestimme $P'$ und $Q'$ auf $i'$ durch $G'P' \parallel G_1'P_1'$ und $G'Q' \parallel G_1'Q_1'$. $P$ und $Q$ sind dann Punkte der Schnittkurve $s$.

Das angegebene Verfahren erfordert zur Bestimmung der zwei oder vier Punkte einer Hilfsebene 15 bezw. 19 Operationen, nachdem die für alle Hilfsebenen zu benutzende Konstruktion ausgeführt ist; zu der Verzeichnung der Kegelschnitte in ihren Hilfsebenen würden dagegen mehr als die doppelte Anzahl von Operationen notwendig sein.

**273.** Die *Tangente* der Schnittkurve $s$ in einem Punkte $P$ derselben erhält man mittelst der Berührungsebenen beider Flächen in $P$, und diese mittelst der berührenden Kegel beider Flächen ent-

lang ihrer Kurven in der durch $P$ gelegten Hilfsebene. Die erste Spur dieses Kegels für das Ellipsoid ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die erste Spur $J'$ des zu $\mathbf{P}_1$ konjugirten Durchmesser $MJ$ des Ellipsoides und dessen Halbmesser $= J''K''$, wenn $F''K''$ die Tangente des zweiten Umrisses dieser Fläche in $F''$, und $K''$ deren Schnitt mit $x$. Die erste Spur der durch $P$ gehenden Erzeugenden ist $J_1$, wenn $J'J_1 \parallel G'P' \parallel G_1'P_1$, und wenn $J'J_1 = J''K''$; die erste Spur der Berührungsebene des Kegels und des Ellipsoides in $P$ ist dann $J_1T'$ ($\perp J'J_1$). Andererseits ist die erste Spur jenes dem Paraboloide umschriebenen Kegels ähnlich und ähnlich gelegen mit der ersten Spur $k$ des Paraboloides, und zugleich mit ihr koncentrisch, weil die Spitze des berührenden Kegels auf dem der $\mathbf{P}_1$ konjugirten Durchmesser $DE$ des Paraboloides liegt, welcher die Mittelpunkte der Berührungsellipse und der $k$ enthält. Ein Punkt der ersten Spur des Kegels ist die auf $B'C'$ liegende erste Spur $V'$ der Tangente der $p$ in $H$; die erste Spur der durch $P$ gehenden Erzeugenden des Kegels ist dann der Punkt $W$ der Geraden $D'P_1$, wenn $V'W \parallel B'P_1$, und die erste Spur der Berührungsebene des Kegels und des Paraboloides in $P$ ist $WT'$, welche parallel mit der Tangente der $k$ in $P_1$ gezogen wird. $J_1T'$ und $WT'$ bestimmen durch ihren Schnittpunkt $T'$ die erste Spur der gesuchten Tangente $PT$, woraus auch $P''T''$ folgt.

*Die scheinbaren Doppelpunkte*, wie $N''$, *der zweiten Projektion der Schnittkurve* liegen in der zweiten Projektion der Schnittlinie $XY$ der Ebenen der zweiten Umrisse beider Flächen ($e$ und $p = BEC$), ist also bestimmt durch die Schnittpunkte $X$ und $Y$ der auf $\mathbf{P}_1$ senkrechten Ebene der Ellipse $e$ bezw. mit $BC$ und $DE$. Zur Bestimmung der Doppelpunkte selbst könnte man zwar (227, 233) die Verzeichnung von Kegelschnitten vermeiden; wir wollen sie aber verzeichnen, weil dadurch die Betrachtung einfacher und die Ausführung kaum verwickelter wird. Die zweite projicirende Ebene von $XY$ samt ihren Schnittlinien $l''$, $m''$ mit beiden Flächen ist in $\mathbf{P}_2$ umgelegt, und die Kegelschnitte sind aus ihren Axen teilweise verzeichnet. Sie besitzen zwei reelle Schnittpunkte, wie $N'''$, deren zweite Projektion $N''$ den eigentlichen Doppelpunkt bildet. Außerdem besitzen sie aber noch eine gemeinschaftliche auf $X'''Y'''$ senkrechte Sehne $R'''R''$, welche nach I, 410 als gemeinschaftliche Sehne der zu $l'''$ und $m'''$ konjugirten Kegelschnitte, oder nach I, 411 zugleich mit der reellen gemeinschaftlichen Sehne ohne Verzeichnung der Kegelschnitte gefunden werden könnte. Einfacher aber erhält man diese zweite Sehne $R'''R''$, nachdem die erste $N'''N''$ konstruirt ist, indem man beachtet, daß die beiden Sehnen zu dem durch

$l'''$ und $m'''$ bestimmten Kegelschnittbüschel gehören, deren Kurven also auf $X'''Y'''$ eine involutorische Punktreihe einschneiden. Je ein Paar derselben ist durch $l'''$ und $m''$ gegeben, von dem dritten durch jene Sehnen bestimmten Paare ist ein Punkt (auf $N'''N''$) gegeben, woraus der andere $R'''$ durch eine Rechtwinkelinvolution mit dem Mittelpunkte $Z$ (I, 302) gefunden wird. Derselbe bestimmt den isolirten Punkt $R''$ der $s''$.

Für die scheinbaren Doppelpunkte der ersten Projektion (wie $L'$) ist nur die sie enthaltende Grade $L'U'$ bestimmt, als Schnittlinie der Ebenen der ersten Umrisse beider Flächen. Die für das Ellipsoid ($\perp$ $\mathbf{P}_2$) hat $u_2$ zur zweiten Projektion; die für das Paraboloid ist durch die drei Punkte $L_1$, $L_2$, $L_3$ bestimmt, wobei $L_1$ der Berührungspunkt des Paraboloids mit einer auf $x$ senkrechten Ebene, $L_2$, $L_3$ die Berührungspunkte der aus $S_1$ an $k$ gezogenen Tangenten, wenn $S_1$ auf $DE$ die Spitze des dem Paraboloid entlang $k$ umschriebenen Kegels ($ES_1 = DE$).

**274.** *Übungsaufgaben.*

1) Die Schnittlinie eines hyperbolischen Paraboloides mit einem einschaligen Hyperboloide (oder einer andern Fläche zweiten Grades) zu ermitteln. Das Paraboloid sei durch $\mathbf{P}_1$ als Leitebene und durch zwei Leitgerade, das Hyperboloid durch seine erste Spur, einen Kegelschnitt $k$, durch seinen Mittelpunkt $M$ und durch einen mit $\mathbf{P}_1$ parallelen Halbdurchmesser $MA$, oder, wenn $M$ in $\mathbf{P}_1$ liegt, durch den zu $\mathbf{P}_1$ konjugirten Halbdurchmesser mit seinem reellen oder ideellen Endpunkte gegeben (vergl. Ende 271).

2) Die Schnittlinie zweier hyperbolischen Paraboloide zu konstruiren, welche eine gemeinschaftliche Richtebene besitzen.

3) Die Schnittlinie eines hyperbolischen Paraboloides mit einem Cylinder zu bestimmen, wenn die Erzeugenden des letzteren mit der Richtebene des ersteren parallel laufen.

4) Die Schnittlinie eines Kegels (oder Cylinders) mit einer Regelfläche zweiten Grades $\mathbf{F}$ zu verzeichnen. Die Hilfsebenen lege man durch die Spitze $S$ des Kegels und durch wechselnde Erzeugende der $\mathbf{F}$; eine solche Hilfsebene enthält noch eine zweite Erzeugende der $\mathbf{F}$ und liefert im allgemeinen vier Punkte der Schnittlinie. Alle Hilfsebenen berühren den aus $S$ der $\mathbf{F}$ umschriebenen Kegel, der mit Vorteil benutzt werden kann.

5) Die Schnittlinie $s$ eines beliebigen Kegels $\mathbf{K}$, dessen Spitze $S$ ist, mit einer Nichtregelfläche zweiten Grades $\mathbf{F}$ zu ermitteln. Jede Hilfsebene, welche man durch $S$ legt, schneidet den $\mathbf{K}$ in einer Anzahl von Erzeugenden $g$, die $\mathbf{F}$ in einem Kegelschnitte $k$; die Schnittpunkte der $g$ und $k$ gehören der $s$ an. Um die Verzeichnung der

Kegelschnitte $k$ zu vermeiden, könnte man nach I, 384 ihre Kollineation mit dem Kreise benutzen. Besser aber verwendet man einen festen Kegelschnitt $f$ der $F$, projicirt in ihn jeden $k$ aus einem der beiden zulässigen Punkte der Verbindungslinie der Pole der Ebenen von $k$ und von $f$ zu $F$ (86), projicirt dabei die Geraden $g$ in Gerade $g'$, und dann die Schnittpunkte der $g'$ mit $f$ wieder auf die $g$ zurück. Vorteilhaft dürfte es sein, die Ebene von $f$ durch $S$ zu legen.

**275.** *Die als Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades gebildete Raumkurve vierter Ordnung kann zerfallen*):*

1) *In zwei Kegelschnitte.* Es geschieht dies dann, wenn beide Flächen in jedem von zwei Punkten ihrer Schnittlinie eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen (235, 3)). In diesen Punkten, welche reell oder imaginär sein können, treffen sich dann die beiden Kegelschnitte.

2) *In eine Gerade und eine Raumkurve dritter Ordnung;* wir werden diesen Fall in der folgenden Nummer betrachten.

3) *In zwei Gerade $g$ und $h$ und einen Kegelschnitt $k$.* Die Flächen sind dann Regelflächen, im allgemeinen einschalige Hyperboloïde. Es müssen $g$ und $h$ den $k$ schneiden, weil die Ebene des $k$ außer $k$ keine Punkte mit einer Fläche zweiten Grades $F$ gemein haben kann. Außerdem müssen sich $g$ und $h$ unter einander schneiden, weil sonst nur eine Fläche $F$ durch $g$, $h$, $k$ gehen würde (142, 1)), und nicht zwei, deren Schnitt sie bilden. $g$ und $h$ gehören dann nicht derselben Schaar von Erzeugenden an, und jede $g_1$, welche $h$ und $k$, aber nicht $g$ schneidet, bestimmt mit $g$ und $k$ eine durch diese Linien und durch $h$ gehende $F$. — Im besonderen haben zwei Kegel (mit verschiedenen Spitzen), welche sich entlang einer gemeinsamen Erzeugenden berühren, noch einen Kegelschnitt gemein.

4) *In vier Gerade $g$, $g_1$, $h$, $h_1$.* Haben zwei Flächen zweiten Grades $F$, $F_1$ drei Gerade gemein, so sind dies Erzeugende, aber nicht alle von derselben Schaar, weil sonst die Flächen ganz ineinander fallen würden; sie seien $g, h, h_1$, wobei $g$ die $h$ und die $h_1$ trifft. Die Restschnittlinie kann keine krumme Linie sein, weil sonst jede durch zwei Punkte dieser Linie gelegte Ebene die drei Geraden noch in drei Punkten, die beiden Flächen daher in dem durch dieselben fünf Punkte bestimmten Kegelschnitte träfe, so daß die Flächen ganz ineinander fielen. Ferner kann die Restschnittlinie keine Gerade $h_2$ sein, weil sonst die drei gemeinsamen Geraden $h$, $h_1$, $h_2$ nur eine Fläche bestimmen würden. Dagegen kann sie eine (die $h$ und $h_1$

*) Bei analytischer Behandlung würde man hier zweckmäßig den Satz anwenden, daß, wenn eine Kurve in Teilkurven zerfällt, die Summe der Ordnungszahlen der Teilkurven gleich der Ordnungszahl der Gesamtkurve ist.

schneidende) Gerade $g_1$ sein, weil die Fläche **F** dann durch die vier Geraden $g, g_1, h, h_1$ noch nicht bestimmt ist, sondern erst durch einen weiteren Punkt $P$ (nämlich durch die Erzeugende $g_2$, welche man durch $P$ schneidend mit $h$ und $h_1$, oder durch die $h_2$, welche man durch $P, g, g_1$ legen kann). Die vier gemeinsamen Geraden zweier Regelflächen zweiten Grades gehören daher zu zwei jeder der beiden Schaaren an und bilden ein windschiefes Viereck. — In besonderem Falle sind sie vier gemeinsame Erzeugende zweier koncentrischen Kegel.

**276.** Untersuchen wir nun den zweiten Fall der vor. Nr.

*Haben zwei Regelflächen zweiten Grades* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ (*im allgemeinen einschalige Hyperboloide*) *eine Gerade g gemein, so wird der Rest k ihrer Schnittlinie von jeder Ebene in drei Punkten geschnitten, ist also eine Raumkurve dritter Ordnung**), und zwar, wie wir alsbald sehen werden, dieselbe, wie die durch den Schnitt zweier Kegel zweiten Grades entstehende (242).

Es ergeben sich folgende *Sätze:*

1) *Die Raumkurve dritter Ordnung k kann auch als der Ort des Schnittpunktes der (drei) entsprechenden Ebenen von drei unter einander projektiven Ebenenbüscheln betrachtet werden.* Denn ist $g_1$ eine Erzeugende der Fläche $\mathbf{H}_1$, $g_2$ der $\mathbf{H}_2$, welche jedesmal derselben Schaar, wie die gemeinschaftliche Erzeugende $g$ angehören, so sind die Flächenbüchel $g_1$, $g_2$ mit dem Flächenbüschel $g$, und daher auch unter einander projektiv, wenn diejenigen Ebenen als entsprechend bezeichnet werden, welche durch denselben Punkt der $k$ gehen; und $k$ ist der Ort des gemeinschaftlichen Punktes der entsprechenden Ebenen der drei unter einander projektiven Ebenenbüschel $g, g_1, g_2$.

*) Über Raumkurven 3. O. rührt die erste Arbeit von *Möbius* her. Derselbe leitet in seinem barycentrischen Calcul, 1827, S. 120, aus ihrer Gleichung die Eigenschaft her, daß die Kurve unter gewissen Umständen der Schnitt zweier Kegel 2. O. ist, und gibt Ebenen an, welche von der Gesamtheit ihrer Tangenten in einem Kegelschnitte getroffen werden. *Seydewitz* (Arch. der Math. u. Phys. v. Grunert, B. 10, 1847, S. 208) läßt diese Kurven aus zwei kollinearen räumlichen Strahlenbüscheln entstehen, dann als Schnitt zweier Kegel 2. O., und gibt ihre Konstruktion aus 6 Punkten an. Sodann liefert *Chasles* (Comptes rendus, B. 45, 1857, S. 189) eine umfassende Darstellung ihrer vielseitigen Eigenschaften. Weitere wertvolle Beiträge zu ihrer Erforschung wurden gegeben von *H. Schröter* (Journ. f. r. u. ang. Math. von Crelle-Borchardt, B. 56, 1859, S. 27); von *v. Staudt* in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage, 1860, § 33; von *Cremona* (Journ. Crelle-Borchardt, B. 58, 1861, S. 138; B. 60, 1862, S. 313; B. 63, 1864, S. 141); von *Reye* in seiner Geometrie der Lage, 2. Abt. (2. Aufl. 1880), S. 84 ff.; von *Sturm* (Journ. Crelle-Borchardt, B. 79, 1875, S. 99; B. 80, 1875, S. 128); von *H. Schröter* in seiner Theorie der Oberflächen 2. Ordn. u. der Raumkurven 3. Ordn., nach *J. Steiners* Principien bearbeitet, 1880, S. 227 ff.

2) *Liegt die Raumkurve dritter Ordnung $k$ auf einer Regelfläche zweiten Grades* $\mathbf{H}_1$, *so wird sie von allen Erzeugenden $h$ der einen Schaar in einem, von allen $g$ der anderen in zwei reellen oder konjugirt imaginären Punkten getroffen. Zu der Schaar der $g$ gehört diejenige Erzeugende $g_0$, welche auch der Regelfläche* $\mathbf{H}_2$ *angehört, deren Schnitt mit* $\mathbf{H}_1$ *die $k$ ist.* Denn jede $h$ und jede $g$ trifft die $\mathbf{H}_2$ in zwei reellen oder konjugirt imaginären Punkten; und da jede $h$ die $g_0$ in einem reellen Punkte, jede $g$ die $g_0$ aber nicht trifft, so gehören von jeder $h$ nur einer, von jeder $g$ aber zwei reelle oder konjugirt imaginäre Punkte der $k$ an. Man nennt entsprechend die Geraden $g$ *eigentliche oder uneigentliche Sekanten der $k$.*

3) *Eine Raumkurve dritter Ordnung $k$ wird aus jedem ihrer Punkte $P$ durch einen Kegel zweiten Grades projicirt.* Ist $k$ die Schnittlinie der Regelflächen $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$, die noch die Gerade $g$ gemein haben, so lege man durch $P$ die Erzeugenden $g_1$ von $\mathbf{H}_1$ und $g_2$ von $\mathbf{H}_2$, von derselben Schaar wie $g$; dann sind die Ebenenbüschel $g_1$, $g_2$, welche Punkte der $k$ projiciren, projektiv mit dem gemeinschaftlichen Ebenenbüschel $g$ beider Flächen, welches dieselben Punkte der $k$ projicirt. Daher sind die Ebenenbüschel $g_1$, $g_2$ unter einander projektiv; und da sich ihre Axen in $P$ treffen, so erzeugen sie einen Kegel zweiten Grades, dessen Erzeugende die Punkte der $k$ aus $P$ projiciren.

$k$ ist daher auch die *Schnittlinie zweier Kegel zweiten Grades,* deren Spitzen Punkte der $k$ sind (242).

4) *Durch eine Raumkurve dritter Ordnung $k$ und durch zwei beliebige Sekanten $AB$ und $CD$ derselben kann eine einzige Regelfläche zweiten Grades gelegt werden. Alle Erzeugenden der unendlich vielen derartigen Regelflächen, von derselben Schaar, wie die gewählten Sekanten $AB$, $CD$, bilden die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Sekanten der Kurve $k$.*

Denn aus $B$ und aus $C$ wird die $k$ durch je einen Kegel zweiten Grades projicirt, und beide Kegel haben die Erzeugende $BC$ gemein; daher sind bei diesen Kegeln bezw. die Ebenenbüschel $AB$ und $CD$, welche die Punkte der $k$ projiciren, projektiv mit dem Ebenenbüschel $BC$, welches dieselben Punkte der $k$ projicirt; daher sind sie auch unter einander projektiv und erzeugen eine Regelfläche, auf welcher $k$ liegt. Der Rest des Satzes folgt aus 2).

5) *Zwei Raumkurven dritter Ordnung $k$, $k_1$, welche auf derselben Regelfläche zweiten Grades* $\mathbf{H}$ *liegen, schneiden sich in vier oder fünf Punkten, je nachdem die Erzeugenden $g$ derselben Schaar die beiden Kurven in zwei Punkten, oder die eine Kurve $k$ in zweien, die andere $k_1$ in einem Punkte treffen.*

Sei im ersteren Falle $g$ irgend eine der die $k$ und die $k_1$ zwei-

punktig schneidenden Erzeugenden, jedoch nicht gerade eine durch einen Schnittpunkt von $k$ und $k_1$ gehende, und sei $P$ einer ihrer Schnittpunkte mit $k$, so wird aus $P$ die $k$ durch einen Kegel zweiter, die $k_1$ durch einen solchen dritter Ordnung projicirt, denen die $g$ bezw. als einfache und als doppelte Erzeugende angehört. Außer dieser doppelt zählenden haben beide Kegel noch vier Erzeugende gemein, da die Gesamtzahl ihrer gemeinsamen Erzeugenden $= 2 \cdot 3 = 6$ ist*). Im zweiten Falle ist $g$ nur eine einfache Erzeugende des Kegels $Pk_1$ dritter Ordnung, so daß beide Kegel außer $g$ noch fünf Erzeugende gemein haben. Ebenso viele Punkte haben in beiden Fällen die Kurven $k$ und $k_1$ gemein. Denn die gemeinsamen Erzeugenden beider Kegel gehen in ihren neben $P$ bestehenden zweiten Schnittpunkten mit dem Hyperboloide H durch gemeinschaftliche Punkte von $k$ und $k_1$, indem keine dieser Kegelerzeugenden, außer $g$, ganz dem H angehören kann, da durch $P$ nur noch eine Erzeugende $h$ geht, welche aber mit $k$ keinen Punkt außer $P$ gemein hat (2)).

Eine Verbindungslinie zweier Schnittpunkte von $k$ und $k_1$ ist eine gemeinschaftliche Sekante von $k$ und $k_1$, und daher auch der Regelfläche H und aller durch $k$ und aller durch $k_1$ gehenden Regelflächen. Daher gilt auch:

6) *Imaginäre Schnittpunkte zweier Raumkurven dritter Ordnung $k$ und $k_1$, die auf derselben Regelfläche zweiten Grades* H *liegen, befinden sich auf jeder gemeinschaftlichen uneigentlichen Sekante von* H *und von zwei anderen bezw. durch $k$ und $k_1$ gehenden Regelflächen* $H_1$ *und* $H_2$, *und sind auf einer solchen Sekante die (imaginären) Doppelpunkte der Involution, welche die Paare der zugleich in Bezug auf* H, $H_1$ *und* $H_2$ *konjugirten Punkte bilden***).

**277.** *Satz. Durch die Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades können vier Kegel zweiten Grades gelegt werden.*

Erkennen wir diesen Satz zuerst in dem Falle, daß die Flächen koaxial sind, d. h. daß die Axenlinien der einen Fläche in diejenigen der anderen Fläche fallen, ohne jedoch mit ihnen gleiche Längen zu besitzen. Diese Axenlinien seien $MX$, $MY$, $MZ$; $M$ der gemeinsame Mittelpunkt. Die Flächen haben dann gemeinschaftliche Hauptebenen, und diese sind auch Ebenen senkrechter Symmetrie für die

*) Da die ebenen Kurven dritter Ordnung hier nicht geometrisch untersucht worden sind, so muß der Satz der Analysis benutzt werden, daß die Anzahl der Schnittpunkte zweier ebenen Kurven bezw. von der $m^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Ordnung $= mn$ ist.

**) In der Analysis ergeben sich die Koordinaten der gemeinschaftlichen Punkte von H, $H_1$, $H_2$ als die Wurzeln je einer Gleichung mit reellen Koefficienten, deren imaginäre Wurzeln daher paarweise konjugirt sind, also Punkte einer reellen Geraden darstellen.

Schnittkurve, oder diese wird auf jede der Hauptebenen durch einen doppelt projicirenden Cylinder projicirt. Der vierte doppelt projicirende eigentliche Kegel hat seine Spitze im Mittelpunkte $M$, weil jedes Raumgebilde, welches in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen symmetrisch mit sich selbst ist, es auch in Bezug auf deren Schnittpunkt $M$ sein muß. $M$ bildet daher den Mittelpunkt der Schnittkurve. Es sind also die drei unendlich fernen Punkte $X$, $Y$, $Z$ der Axen und der Mittelpunkt $M$ die Spitzen der vier doppelt projicirenden Kegel der Schnittlinie, die Kegel sind daher vom zweiten Grade (237). Zugleich bemerkt man, daß die Tangenten der Schnittlinie in den beiden Punkten, in welchen sie von einer durch $X$ gehenden Geraden getroffen wird, sich in der Ebene $MYZ$ schneiden, weil diese eine Symmetrieebene der Kurve und insbesondere diejenige jener beiden Punkte ist, *daß daher die Ebene $MYZ$ eine Doppelkurve der durch alle Tangenten der Schnittkurve gebildeten Fläche enthält.* Dasselbe gilt von den Ebenen $MZX$, $MXY$ und auch von der unendlich fernen Ebene $XYZ$, weil die Tangenten der Schnittkurve in zwei Punkten, welche symmetrisch in Bezug auf $M$ liegen, zu einander parallel laufen.

Jede dieser beiden koaxialen Flächen zweiten Grades mit einem im Endlichen liegenden Mittelpunkte $M$ kann das Ellipsoid, das einschalige oder das zweischalige Hyperboloid sein. Bildet man eine beliebige *Raumprojektion* von beiden, wobei die gemeinschaftlichen Axenlinien in gemeinschaftlich konjugirte, durch denselben Punkt gehende Sekanten übergehen, so können aus den Ausgangsflächen Flächen zweiten Grades jeder Art entstehen, geradlinige und nicht geradlinige, auch jedes der Paraboloide, indem eine Berührungsebene einer Fläche ins Unendliche projicirt werden kann. Aus den vier doppelt projicirenden Kegeln werden dabei wieder solche, deren Spitzen $X$, $Y$, $Z$, $M$ aber beliebige Lagen, im allgemeinen im Endlichen, einnehmen. Die vier Flächen des Tetraeders $XYZM$ enthalten dann wieder Doppelkurven der durch die Tangenten der Schnittkurve gebildeten Fläche.

**278.** In der vorigen Nr. war $XYZM$ ein gemeinschaftliches Polartetraeder der beiden Flächen zweiten Grades $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$, sowohl in dem Falle der gemeinschaftlichen Symmetriebenen, als auch in dem kollinear abgeleiteten Falle, weil durch diese Ableitung die Eigenschaft der Polarität nicht verloren geht. Wir wollen nun zeigen, einmal, daß wenn die Schnittlinie irgend zweier Flächen zweiten Grades aus einem Punkte $X$ doppelt, also durch einen Kegel zweiten Grades, projicirt wird, dieser Punkt $X$ eine und dieselbe Ebene $\mathbf{X}$ zur Polarebene in Bezug auf jede der beiden Flächen be-

sitzt, und sodann daß, wenn umgekehrt ein Punkt $X$ in Bezug auf zwei beliebige Flächen zweiten Grades dieselbe Polarebene **X** besitzt, der Punkt die Spitze eines doppelt projicirenden Kegels der Schnittlinie der Flächen bildet. Schneide zunächst ein doppelt projicirender Strahl aus $X$ die Schnittlinie, also jede der Flächen, in den Punkten $F$ und $F'$, so liegt der von $X$ durch $F$ und $F'$ harmonisch getrennte Punkt $X'$ in der Polarebene von $X$ in Bezug auf jede der beiden Flächen, so daß drei solcher Strahlen die gemeinschaftliche Polarebene **X** bestimmen, und hierdurch ist die erste Behauptung bewiesen. In Bezug auf die zweite lege man einen Strahl aus $X$ nach einem Punkte $F$ der Schnittkurve, welcher die gemeinschaftliche Polarebene **X** in $X'$ schneide, so gehört der von $F$ durch $X$ und $X'$ harmonisch getrennte Punkt jeder der beiden Flächen, d. i. ihrer Schnittkurve an, und der Strahl projicirt doppelt.

Um nun solche Punkte, die wir jetzt wegen ihrer Gleichartigkeit mit demselben Buchstaben $S$ ($S_1$, $S_2$ ...) bezeichnen wollen, zu ermitteln, welche in Bezug auf zwei Flächen zweiten Grades **F** und $\mathbf{F}_1$ eine gemeinschaftliche Polarebene **S** besitzen, lege man durch einen beliebigen Punkt $P$ drei beliebige, aber nicht in derselben Ebene befindliche Gerade $g$, $h$, $i$. Zur Punktreihe $g$ gehört für jede der beiden Flächen ein mit ihr projektives Büschel der Polarebenen (77), welche beide unter einander projektiv sind und durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine Regelschaar zweiten Grades erzeugen, wobei jede Gerade der Schaar einem Punkte der $g$ in Bezug auf beide Flächen zugleich konjugirt ist. Ebenso entspricht der Geraden $h$ eine zweite Regelschaar und der Geraden $i$ eine dritte. Alle drei Regelschaaren haben eine Gerade $p$ gemein, welche dem gemeinsamen Punkte $P$ der Geraden in Bezug auf beide Flächen **F** und $\mathbf{F}_1$ konjugirt ist. Außerdem schneiden sich je zwei Flächen der Regelschaaren in einer Kurve dritter Ordnung, je zwei dieser Kurven liegen auf derselben Regelfläche und durch ihre Schnittpunkte gehen auch die beiden anderen Regelflächen und deren Schnittkurve. Jeder solche Schnittpunkt $S$ ist aber ein Punkt der angegebenen Art; denn durch $S$ geht eine Gerade einer jeden der erhaltenen Regelschaaren, und der ersten derselben ist ein Punkt der $g$, der zweiten einer der $h$, der dritten einer der $i$ in Bezug auf jede der beiden Flächen konjugirt, so daß die Polarebene von $S$ in Bezug auf jede der beiden Flächen durch jene drei Punkte der Geraden geht, also ein und dieselbe Ebene **S** ist.

Nun haben die drei Regelschaaren zweiten Grades eine Erzeugende $p$ gemein; daher trifft $p$ jede der Schnittkurven in zwei Punkten (276, 2)), und daher haben zwei solche Kurven *vier Punkte*

*gemein* (276, 5)), durch welche auch die dritte Kurve geht. Diese vier Punkte, deren jeder eine gemeinschaftliche Polarebene in Bezug auf beide Flächen besitzt, sind die Eckpunkte eines gemeinschaftlichen Polartetraeders beider Flächen. Denn ist $S_1$ einer der Punkte, $\mathbf{S}_1$ seine gemeinschaftliche Polarebene zu $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$, so schneidet diese Ebene diese Flächen bezw. in den Kegelschnitten $k$ und $k_1$, welche im allgemeinen ein gemeinschaftliches Polardreieck besitzen (I, 398 f.). Im besonderen haben sie einfach unendlich viele, wenn sie zu einem Punkte $Q$ die Polare $q$ und die Tangenten aus $Q$ gemein haben, oder dreifach unendlich viele, wenn sie in einander fallen. Seien $S_2$, $S_3$, $S_4$ die Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polardreiecks, so ist $S_1S_2S_3S_4$ das gemeinschaftliche Polartetraeder beider Flächen; und da jeder seiner Eckpunkte eine gemeinschaftliche Polarebene zu $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ besitzt, solcher Punkte aber im allgemeinen nur vier bestehen, so müssen die drei aus $S_1$ abgeleiteten Punkte mit den drei weiteren Schnittpunkten $S_2$, $S_3$, $S_4$ jener Raumkurven zusammenfallen, oder deren vier Schnittpunkte bilden das gemeinschaftliche Polartetraeder von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$. Daher:

*Zwei beliebige Flächen zweiten Grades* $\mathbf{F}$ *und* $\mathbf{F}_1$ *besitzen im allgemeinen ein gemeinschaftliches Polartetraeder*, *dessen etwaige imaginäre Eckpunkte paarweise auf einer reellen Geraden liegen* (276, 6) samt Anmerkung). *Die Eckpunkte dieses Tetraeders sind die Spitzen der durch die Schnittlinie beider Flächen gehenden Kegel zweiten Grades*, *von denen ein jeder jenes Tetraeder ebenfalls zum Polartetraeder hat. Die abwickelbare Fläche der Tangenten der Schnittkurve von* $\mathbf{F}$ *und* $\mathbf{F}_1$ *besitzt eine Doppelkurve*, *welche aus ebenen Ästen besteht*, *die in den Seitenflächen jenes Tetraeders liegen.*

In einem besonderen Falle besitzen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ *einfach unendlich viele gemeinschaftliche Polartetraeder,* wenn ihre Schnittlinie in zwei Kegelschnitte zerfällt; sie besitzen *dreifach unendlich viele,* wenn diese Kegelschnitte in einander fallen (die Flächen sich also entlang eines Kegelschnittes berühren); *sechsfach unendlich viele,* d. i. alle, wenn die Flächen selbst in einander fallen. Im ersteren Falle werden zwei Kegel zu je einem Ebenenpaare, im zweiten drei Kegel zu je zwei zusammenfallenden Ebenen, und es bleiben zwei bezw. ein Kegel eigentliche. Es wird dabei nur die Anzahl der Spitzen der Kegel, nicht aber die der Kegel selbst unendlich groß. — Der folgende Teil des Satzes folgt daraus, daß die aus der Spitze $S$ des einen Kegels gezogenen Sehnen der Schnittkurve auch Sehnen der drei anderen Kegel sind, und daß daher der Punkt $S$ und seine Polarebene $\mathbf{S}$ zu $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ auch die Sehnen der Kegel harmonisch teilen, so daß $\mathbf{S}$ auch die Polarebene von $S$ zu diesen Kegeln ist.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, daß die Berührungsebenen einer jeden der Flächen **F**, $\mathbf{F}_1$ und eines jeden der Kegel in zwei Punkten, welche mit einer der Tetraederecken auf einer Geraden liegen, sich in der gegenüberliegenden Fläche des Tetraeders schneiden.

**279.** Für das Folgende gebrauchen wir einen

*Hilfssatz. Ein geschlossener Linienzug wird von jeder Ebene entweder in einer geraden oder von jeder in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten, und er heißt entsprechend paar oder unpaar.*

*Geschlossen* ist ein Linienzug; wenn man auf ihm hinschreitend von einem Ausgangspunkte wieder zu diesem zurückkehrt, wobei ein Durchgang durch das Unendliche nicht als Unterbrechung des Fortschreitens angesehen wird (I, 190).

Der Satz wird durch den Nachweis bewiesen, daß, wenn der Linienzug durch irgend eine Ebene **E** in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten wird, dies auch für jede andere Ebene **F** gilt. **E** und **F** bilden zwei Paare von Scheitelwinkeln oder zwei vollständige Winkel. Da man bei einmaligem Durchschreiten einer Ebene den Winkel wechselt, in welchem man sich befindet, so muß man beim Zurückkehren zum Ausgangspunkte beide Ebenen zusammen eine gerade Anzahl mal durchschritten haben, also jede eine gerade, oder jede eine ungerade Anzahl mal, w. z. b. w.

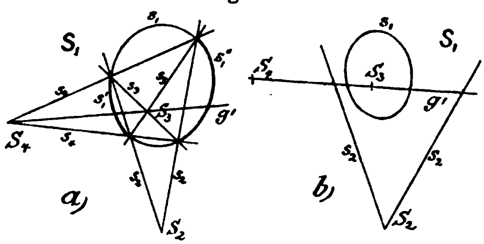
**280.** *Es können in Bezug auf das Reell- oder Imaginärsein der Eckpunkte $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier Flächen zweiten Grades* **F**, $\mathbf{F}_1$, *und der durch ihre Schnittlinie k gehenden Kegel zweiten Grades* $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$, *und in Bezug auf die davon abhängige Gestalt der Schnittlinie k aller dieser sechs Flächen folgende Fälle eintreten*).*

A. *Die vier Tetraederecken sind reell.* Da jede der Ebenen **S**, so $\mathbf{S}_4$, ein reelles gemeinschaftliches Polardreieck, so $S_1S_2S_3$, in Bezug auf ihre Schnittkurven mit **F**, $\mathbf{F}_1$ enthält, so sind jedenfalls die von einem der Punkte $S_1$, $S_2$, $S_3$ ausgehenden gemeinschaftlichen Sehnen dieser Kurven reell (I, 411), daher auch wenigstens einer der entsprechenden Kegel. Sei der von $S_1$ ausgehende $\mathbf{K}_1$ reell, so schneidet die Ebene $\mathbf{S}_1$ (die gemeinschaftliche Polarebene des $S_1$ zu **F**, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$) den Kegel $\mathbf{K}_1$ in einem reellen Kegelschnitte $s_1$, jeden anderen in zwei reellen oder imaginären Erzeugenden, welche Paare wir bezw. mit $s_2$, $s_3$, $s_4$ bezeichnen wollen. Diese vier Schnittlinien haben die vier Schnittpunkte der Kurve vierter Ordnung *k* mit der Ebene

*) Vergl. die Preisschriften: *Sturm,* Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, 1867, S. 304—310, und *Cremona*, Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre (Journ. Crelle-Borchardt, B. 68, 1868, S. 118—124).

$\mathbf{s}_1$ gemein, und besitzen ein reelles gemeinsames Polardreieck $S_2 S_3 S_4$. Daher müssen die vier gemeinsamen Punkte von $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ entweder alle reell, oder alle imaginär (I, 399), und dann die drei Geradenpaare $s_2$, $s_3$, $s_4$ a) alle reell oder b) eines ($s_2$) reell und zwei ima-
Fig. 122 a), b). ginär sein. Im Falle a) sind auch die Kegel $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ und die Kurve $k$ reell. Im zweiten Falle ist der Kegel $\mathbf{K}_2$ reell, und es kann b) $s_1$ im Inneren oder im Äußeren von $\mathbf{K}_2$ liegen. Wenn $s_1$ b′) im Inneren liegt, so ist die Schnittlinie $k$, und so sind die aus $S_3$ und $S_4$ projicirenden Kegel reell, wie bei a); wenn b″) im Äußeren, so ist $k$ imaginär, und so sind die sie aus $S_3$ und $S_4$ projicirenden Kegel imaginär, weil $S_3$, $S_4$ bezw. im Inneren der reellen Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ liegen, so daß die Kegel $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$, wenn sie reell wären, bezw. die Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ notwendig reell schneiden müßten. Es treten daher hier zwei Fälle ein:

Fig. 122.




1) *Die vier Ecken* $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ *des Polartetraeders und die vier Kegel* $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ *sind reell.* Im Falle a) ist $S_1$ ein äußerer Punkt der drei Kegel $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$, weil die Polarebene von $S_1$ zu jedem dieser Kegel ihn in zwei reellen Graden schneidet. Der Fall b′) ist aber nur eine andere Darstellung von a). Denn hier muß einer der Punkte $S_3$, $S_4$ ein innerer, und der andere ein äußerer Punkt von $s_1$ und daher auch von $\mathbf{K}_1$ sein; es sei $S_3$ der innere und $S_4$ der äußere Punkt. $S_4$ ist aber auch ein äußerer Punkt von $\mathbf{K}_3$, weil $\mathbf{K}_3$ mit der Ebene $\mathbf{s}_1$, worin $S_4$ liegt, nur den Punkt $S_3$ gemein hat; und es ist $S_4$ auch ein äußerer Punkt von $\mathbf{K}_2$, weil $\mathbf{K}_2$, damit sein Schnitt mit $\mathbf{K}_1$ reell ist, $s_1$ und den im Inneren von $s_1$ und $\mathbf{K}_1$ liegenden Punkt $S_3$ einschließen, also $S_4$ ausschließen muß. Daher ist $S_4$ ein äußerer Punkt der drei Kegel mit den anderen Spitzen; dasselbe gilt von $S_2$. Daher stellt b′) den Fall a) dar, wenn $S_4$ oder $S_2$ von b′) an die Stelle des $S_1$ von a) tritt. Im Falle a) mögen $S_3$ im Inneren, $S_2$, $S_4$ im Äußeren von $s_1$ und von $\mathbf{K}_1$ liegen. Die Projektion der Schnittkurve $k$ aus $S_1$ auf $\mathbf{s}_1$ besteht aus den von einander getrennten Bogen $s_1'$, $s_1''$ des Kegelschnittes $s_1$, welche in den die Kegel $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ darstellenden Scheitelwinkelpaaren $S_2$, $S_3$, $S_4$ liegen. Daraus ergibt sich, daß wenn die Gerade $S_3 S_4$ die Bogen $s_1'$, $s_1''$ trifft, $S_3$ im Inneren von $\mathbf{K}_4$ und $S_4$ im Inneren von $\mathbf{K}_3$, dagegen $S_2$ im Äußeren von $\mathbf{K}_3$ und von $\mathbf{K}_4$, und $S_4$ im Inneren von $\mathbf{K}_2$ liegt. Daher befinden sich $S_1$, $S_2$

im Äußeren aller Kegel, $S_3$ im Inneren von $\mathbf{K}_1$ und von $\mathbf{K}_4$, $S_4$ im Inneren von $\mathbf{K}_2$ und von $\mathbf{K}_3$. Zugleich ergibt sich, daß die beiden Kurvenäste der $k$ paar sind, weil jeder von der Ebene $\mathbf{S}_1$ in zwei Punkten geschnitten wird (in b′) in keinem).

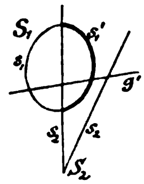
*In diesem Falle zerfällt die Schnittkurve $k$ in zwei paare Äste; zwei Ecken des Tetraeders liegen außerhalb der projicirenden Kegel, zwei im Inneren von je zweien; die den ersteren Ecken gegenüberstehenden Ebenen schneiden die $k$ in vier reellen, die anderen in vier imaginären Punkten* (vergl. Fig. 124).

2) (Fall $b''$.) *Die vier Ecken des gemeinschaftlichen Polartetraeders sind reell, dagegen sind nur zwei Kegel, etwa $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, reell, die beiden anderen imaginär. Die Schnittkurve $k$ ist dann imaginär, $S_1$, $S_2$ liegen bezw. außerhalb der Kegel $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_1$; $S_3$ innerhalb des einen derselben, $S_4$ innerhalb des anderen. Die dem $S_1$ und die dem $S_2$ gegenüberstehenden Ebenen des Tetraeders schneiden die reellen Kegel bezw. in einem Kegelschnitte und in zwei reellen Geraden, die anderen Ebenen in einem reellen und einem imaginären Geradenpaare.*

**281.** B. *Zwei Ecken des gemeinschaftlichen Polartetraeders sind reell und zwei imaginär.*

Seien $S_1$, $S_2$ die reellen Ecken, sei $g$ ihre Verbindungslinie, so liegen $S_3, S_4$ auf der gemeinsamen Polare $g'$ von $g$ zu $\mathbf{F}$ und zu $\mathbf{F}_1$; damit $S_3, S_4$ imaginär sind, muß $g'$ jede Fläche in zwei reellen Punkten treffen, und es müssen die Schnittpunkte der einen durch die der anderen getrennt sein (I, 350). Daher müssen die Flächen, ihre Schnittlinie $k$ und beide Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, sowie deren Schnittpunkte mit $g'$ reell sein. Daher liegt $S_1$ außerhalb $\mathbf{K}_2$ und $S_2$ außerhalb $\mathbf{K}_1$. Treffe wieder die Polarebene $\mathbf{S}_1$ von $S_1$ zu $\mathbf{K}_2$ den Kegel $\mathbf{K}_1$ Fig. 123.
in dem Kegelschnitte $s_1$, den $\mathbf{K}_2$ in den durch $S_2$ gehenden Geraden $s_2$, so ist $g'$ die Polare von $S_2$ zu $s_1$, und es müssen die Schnittpunkte der $g'$ mit $s_1$ durch die mit $s_2$ getrennt sein, daher muß der $s_1$ von der einen Geraden $s_2$ reell, von der anderen imaginär geschnitten werden (s. auch I, 399). Die Schnittlinie $k$ besteht aus einem Aste; denn sie projicirt sich aus $S_1$ auf $\mathbf{S}_1$ in den einen der beiden durch die $s_2$ abgeschnittenen Teile der $s_1$, etwa in $s_1'$; die beiden Teile der $k$, welche durch die auf der einen und der anderen Seite der $\mathbf{S}_1$ liegenden Schnittpunkte der Erzeugenden von $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ gebildet werden, hängen in den reellen Schnittpunkten von $s_1$ und $s_2$ (in $\mathbf{S}_1$) zusammen. Von den vier Tetraederflächen sind diejenigen $g'S_1$, $g'S_2$ reell, die beiden anderen imaginär. Es tritt daher hier nur ein Fall ein:

Fig. 123.



3) *Zwei Ecken, zwei Kanten und zwei Flächen des Polartetraeders,*

*sowie zwei Kegel sind reell, die übrigen imaginär. Die Schnittkurve hat einen einzigen (paaren) Ast.*

**282.** C. *Die vier Ecken des Tetraeders sind imaginär.* Sie liegen dann paarweise auf zwei reellen Geraden $g = S_1 S_2$, $g' = S_3 S_4$, welche gegenseitig Polaren zu **F** und zu $\mathbf{F}_1$ sind. Damit auf $g$ oder $g'$ die Eckpunkte imaginär sind, muß jede dieser Geraden jede der Flächen in zwei reellen Punkten schneiden, welche durch die der anderen Fläche getrennt sind. Schneidet aber jede von zwei Polaren $g$, $g'$ zu **F** die **F** reell, so ist **F**, und ebenso $\mathbf{F}_1$, eine Regelfläche (82, 4)). Trifft die Gerade $g$ die Flächen **F** und $\mathbf{F}_1$ bezw. in $A$, $B$ und $A_1$, $B_1$, die $g'$ bezw. in $A'$, $B'$ und $A_1'$, $B_1'$, so sind, da $g$ und $g'$ Polaren, $ABA'B'$ und $A_1B_1A_1'B_1'$ windschiefe Vierecke bezw. auf **F** und $\mathbf{F}_1$, welche von je zwei Erzeugenden der beiderlei Schaaren gebildet werden. Dabei müssen $A$ und $B$ auf verschiedenen Seiten der $\mathbf{F}_1$ liegen, und ebenso $A'$ und $B'$. Liegen etwa $A$ und $B'$ auf derselben Seite von $\mathbf{F}_1$, also $B$ und $A'$ auf der anderen Seite, so treffen die beiden Erzeugenden $AB'$ und $BA'$, welche der einen Schaar der **F** angehören, die $\mathbf{F}_1$ nicht und liegen auf verschiedenen Seiten der $\mathbf{F}_1$. Denn wenn zwei konjugirte Punkte $A$, $B'$ (auf $g$ bezw. $g'$) einer Fläche zweiten Grades auf derselben Seite von ihr liegen, so schneidet die Gerade $AB'$ die Fläche nicht, weil die Punkte $A$ und $B'$ durch die Schnittpunkte harmonisch getrennt sein, also auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen müßten. Da $AB'$, $BA'$, daher auch $A$, $A'$, sowie $B$, $B'$ je auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{F}_1$ liegen, so schneiden die Geraden $AA'$ und $BB'$ die $\mathbf{F}_1$, und die Schnittpunkte auf jeder sind durch $A$ und $A'$, bezw. durch $B$ und $B'$ oder durch die Geraden $AB'$ und $BA'$ harmonisch getrennt. Daraus folgt, daß die Schnittkurve $k$ aus zwei Teilen besteht, welche auf **F** durch die Erzeugende $AB'$, $BA'$ derselben Schaar von einander getrennt sind. Jeder der Kurvenäste bildet einen geschlossenen Zug, weil jede Erzeugende der **F**, welche der Schaar der $AB'$ und $BA'$ nicht angehört, die $\mathbf{F}_1$ in einem Punkte eines jeden jener Kurvenäste schneidet, da sie die $AB'$ und die $BA'$ trifft, welche ganz auf verschiedenen Seiten der $\mathbf{F}_1$ liegen. Jeder der Kurvenäste ist aber unpaar. Denn jede Ebene trifft die Regelfläche **F** und $\mathbf{F}_1$ bezw. in den reellen Kegelschnitten $c$ und $c_1$. Die Schnittpunkte von $AB'$ und von $BA'$ mit der Ebene liegen auf $c$ und auf entgegengesetzten Seiten von $c_1$; daher teilen sie den $c$ in zwei Teile, deren jeder den $c_1$ in einer ungeraden Anzahl (1 oder 3) von Punkten schneidet, welche auch die Schnittpunkte der Äste der Kurve $k$ mit der Ebene sind. Es tritt daher hier der Fall ein:

4) *Die vier Ecken und Flächen des gemeinschaftlichen Polartetraeders sind imaginär, zwei Gegenkanten desselben reell, die vier Kegel imaginär. Die sich schneidenden Flächen zweiten Grades sind Regelflächen; die Schnittkurve besteht aus zwei geschlossenen unpaaren Ästen.*

**283.** *Satz. Die Schnittlinie k zweier Flächen zweiten Grades* **F**, $\mathbf{F}_1$ *besitzt in ihren Schnittpunkten mit einer Seitenfläche* **S** *des gemeinschaftlichen Polartetraeders von* **F** *und* $\mathbf{F}_1$ *Tangenten, welche nach der der* **S** *gegenüberliegenden Ecke S des Tetraeders laufen, und Schmiegungsebenen, welche Rückkehrebenen der k und Berührungsebenen des die k aus S projicirenden Kegels sind.*

Denn die Berührungsebenen der **F** und der $\mathbf{F}_1$ in einem solchen Punkte gehen durch $S$, daher auch ihre Schnittlinie, d. i. die Tangente der $k$. Die Schmiegungsebene andererseits geht durch diese Tangente und durch die benachbarte, ebenfalls durch $S$ laufende Sekante; sie ist daher die Berührungsebene des die $k$ aus $S$ projicirenden Kegels, enthält vier benachbarte Punkte der $k$ und ist daher eine Rückkehrebene (I, 260).

**284.** Es sollen die drei Fälle der *reellen Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades* dargestellt werden*).

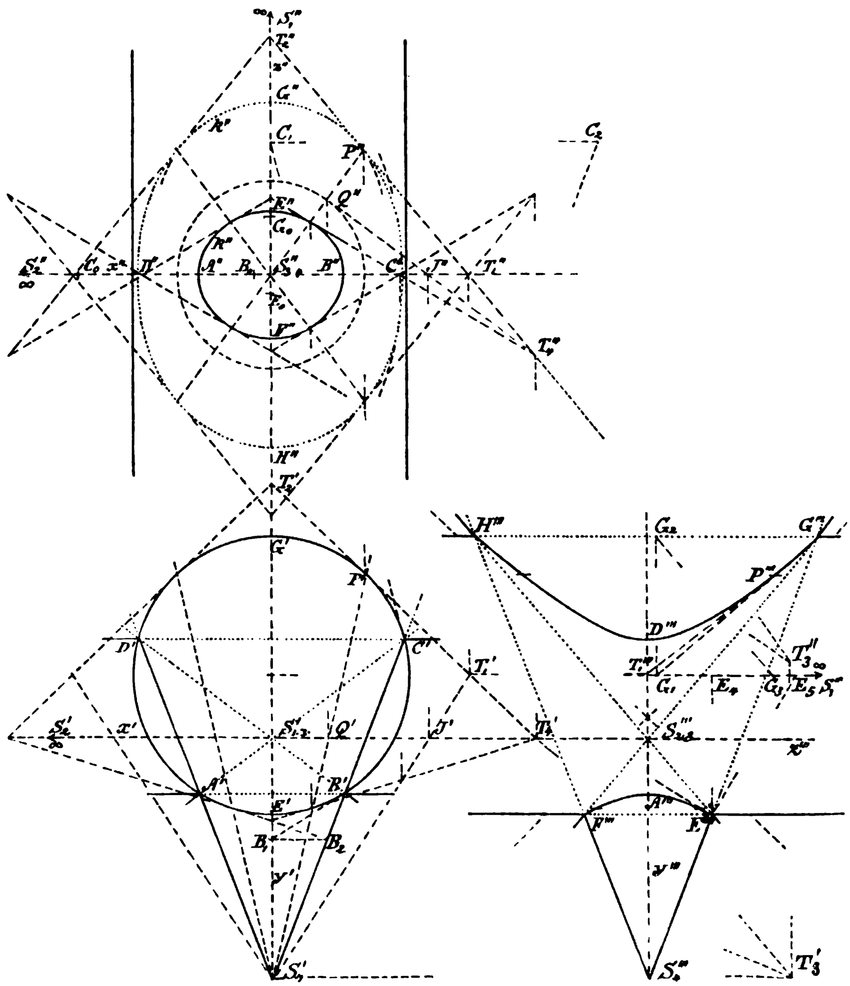
*Aufg. Die Schnittlinie k zweier Flächen zweiten Grades darzustellen, wenn sie aus zwei paaren Ästen besteht* (280, 1)).

*Aufl.* Da vier reelle Kegel durch $k$ gehen, so können wir die $k$ durch zwei derselben bestimmen; es geschehe durch $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_4$ (mit den Spitzen $S_1$, $S_4$), und $S_2$, $S_3$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ werde dann ermittelt. Es soll eine mehrfach symmetrische Anordnung gewählt werden. $\mathbf{K}_1$ sei Fig. 124.
ein mit der $z$Axe paralleler Umdrehungscylinder, dessen Spitze $S_1$ (im Unendlichen von $z$) außerhalb der anderen Kegel liegen soll; $\mathbf{K}_4$ sei ein Umdrehungskegel mit $y$ als Umdrehungsaxe, $S_4$ liege außerhalb $\mathbf{K}_1$. Die Projektionsebene $\mathbf{P}_1$ ist daher die Polarebene $\mathbf{S}_1$ von $S_1$ zu $\mathbf{K}_4$ und sie schneidet $\mathbf{K}_1$ in einem Kreise, $\mathbf{K}_4$ in zwei Geraden, welche den Kreis in den reellen Punkten $A, B, C, D$ treffen. Die Spitzen von $\mathbf{K}_2$ und $\mathbf{K}_3$ ergeben sich als die weiteren Nebenecken des vollständigen Vierecks $ABCD$, als $S_2$ (unendlich ferner Punkt der $x$) und $S_3$ (im Inneren von $\mathbf{K}_1$); $S_2 S_3$ sei die $x$Axe. Die dritte Projektion liefert durch die Umrisse von $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_4$ die Scheitelpunkte $E, F, G, H$ der $k$, wodurch die acht Scheitelpunkte der zweiten Projektion der beiden Äste von $k$ bestimmt sind. $\mathbf{K}_2$

*) Diese Kurven als Schnittlinien von Regelflächen und die abwickelbaren Flächen ihrer Tangenten eignen sich sehr zur Darstellung durch Fadenmodelle in der in Nr. 241 angegebenen Weise. Mein Sohn *Hermann Wiener* konstruirte die Modelle der drei Hauptfälle; ihre Ausführung in Metallrahmen ist bei L. Brill in Darmstadt erschienen.

ist ein Cylinder, der sich auf $\mathbf{P}_3$ in eine Hyperbel projicirt; dieselbe ist durch ihre Scheitel $A'''$, $D'''$ und vier Punkte überschüssig bestimmt und wird mittelst der nach I, 371 ermittelten Asymptoten verzeichnet. $\mathbf{K}_3$ kann bei diesen Annahmen nicht ebenfalls ein Umdrehungskegel sein. Eine Erzeugende des Kegels $\mathbf{K}_4$, welche durch den beliebigen Punkt $Q$ seines Schnittkreises mit $\mathbf{P}_2$ geht, liefert

Fig. 124.




zwei Punkte der $k$, darunter $P$. Aus $P$ ergeben sich noch sieben weitere Punkte der $k$, welche mit $P$ *eine Achtpunktgruppe* bilden, derart daß auf der Verbindungslinie eines jeden der Punkte mit einer jeden der Tetraederecken noch ein zweiter Punkt liegt, der

von ihm durch diese Ecke und ihre Gegenebene harmonisch getrennt ist. Die *Tangente* der $k$ in $P$ ist als die Schnittlinie der bezw. den $\mathbf{K}_1$ und den $\mathbf{K}_4$ in $P$ berührenden Ebenen bestimmt; die Tangente der zweiten (kreisförmigen) Spur der $\mathbf{K}_4$ in $Q$ trifft die $\mathbf{P}_1$ in $J$, woraus sich die erste Spur $S_4'J'$ der Berührungsebene des Kegels $\mathbf{K}_4$ entlang $S_4QP$ ergibt; diese trifft die erste Spur der Berührungsebene der $\mathbf{K}_1$ in $P$ im Punkte $T_1$, so daß $PT_1$ die gesuchte Tangente bildet. Dieselbe schneidet jede der Flächen des Tetraeders in einem Punkte ($T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$), und durch jeden geht noch eine zweite Tangente der $k$ in einem der acht Punkte; zwei sich schneidende Tangenten sind durch die den Schnittpunkt enthaltende Tetraederfläche und deren Gegenecke harmonisch getrennt. — Die Örter der Punkte $T$ in den Ebenen des Tetraeders wollen wir alsbald gesondert konstruiren.

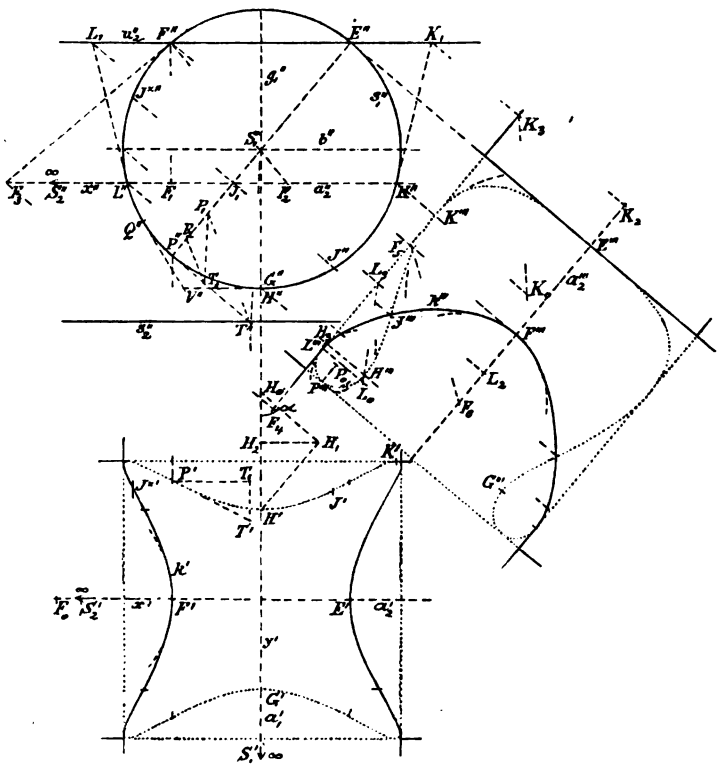
Es ist noch nützlich und leicht, die *Krümmungshalbmesser der $k''$ in ihren Scheiteln* zu bestimmen; sie sind dieselben, wie diejenigen der zweiten Projektionen der Schnittkurven der Schmiegungsebenen der $k$ in den entsprechenden Punkten mit jedem der vier Kegel. Die Schmiegungsebene der $k$ in einem Punkte $C$ der Ebene $\mathbf{S}_1$ ist die Berührungsebene des Cylinders $\mathbf{K}_1$; diese trifft den Kegel $\mathbf{K}_4$ in einer Kurve, deren zweite Projektion die Strecke $C''C_0 = C_1C_2$ zum Krümmungshalbmesser hat, wenn $C_1$ der Schnittpunkt jener Berührungsebene mit $y$, und $C_1C_2$ der Parallelkreishalbmesser des Kegels $\mathbf{K}_4$ in $C_1$ ist (57). Ebenso ist $B''B_0 = B_1B_2$. Die Schmiegungsebene der $k$ in einem Punkte $G$ der $\mathbf{S}_2$ ist die Berührungsebene des hyperbolischen Cylinders $\mathbf{K}_2$, deren dritte Projektion die Hyperbeltangente $G'''G_1$ bildet. Diese Ebene schneidet den Kreiscylinder $\mathbf{K}_1$ in einer Ellipse, deren zweite Projektion Axen bezw. $= G'''G_2$ und $= G_1G_2$ hat, wenn die $G''G_1$ die Cylinderaxe in $G_1$ trifft, und $G_2$ die senkrechte Projektion von $G_1$ auf $G'G'''$ bildet. Der Krümmungshalbmesser dieser Ellipse in $G''$ ist aber $= G''G_0 = G_1G_3$, wenn $G_3$ auf der Cylinderaxe durch $G_2G_3 \perp G'''G_1$ bestimmt wird. Entsprechend ist $E''E_0 = E_4E_5$, wenn in etwas anderer Linienführung $E'''E_5$ die Normale der Hyperbel in $E'''$, $E'''E_4 \perp E'E'''$ und $E_4$, $E_5$ auf der Cylinderaxe liegen.

**285.** *Aufg. Die Schnittlinie $k$ zweier Flächen zweiten Grades darzustellen, wenn sie aus einem Aste besteht* (281).

*Aufl.* Es gehen zwei reelle Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ durch die $k$, und als deren Schnittlinie wollen wir die $k$ bestimmen. $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_3$ seien zwei kongruente Umdrehungscylinder, deren Axen bezw. mit $y$ und $x$ parallel laufen, sich aber nicht treffen. Von dem gemeinsamen Polartetraeder sind die Kante $g = S_1S_2$ (im Unendlichen der $\mathbf{P}_1$) Fig. 125.

und ihre Gegenkante $g_1$ ($\| z$), sowie die Flächen $g_1 S_1$ und $g_1 S_2$ reell. Die Schnitte dieser Ebenen mit **K**$_1$ und **K**$_2$, ein Kreis und zwei Gerade (in $g_1 S_2$ der Kreis $s_1$ und die Geraden $s_2$ und $u_2$), liefern die Punkte $E$, $F$, $G$, $H$ der $k$. Es sind in der ersten Projektion von $k$ noch die Punkte der Umrisse (so $K'$) bestimmt und ein allgemeiner Punkt $P'$ aus $P''$. Sind $a_2''$ und $b''$ die mit $x$ parallelen Mittellinien der zweiten Projektionen der Cylinder **K**$_2$ und **K**$_1$, und hat auf $s_1''$ der Punkt $Q''$ den Abstand von $b''$, wie $P''$ von $a_2''$, so ist Abst. $P'a_2' =$ Abst. $Q''g_1''$. Die *Tangente* der $k'$ in $P'$ bestimmt man durch ihre Spur $T'$ etwa mit der zu **P**$_1$ parallelen

Fig. 125.



Berührungsebene des **K**$_2$ entlang $s_2$. Schneiden die Tangenten des Kreises $s_1''$ in $P''$ und $Q''$ bezw. die $s_2''$ in $T''$ und die durch $G''$ gezogene Parallele zu $x$ in $V''$, so ist $T'$ aus $T''$ und durch Abst. $T'a_2' = G''V''$ bestimmt. Der *Krümmungshalbmesser* der $k'$ in $F'$ ist $F'F_0 = F_1F_2$. Denn die $k$ und die Schnittellipse der Schmiegungsebene $F''F_3$ der $k$ in $F$ mit **K**$_2$ besitzen in $F$, und ihre ersten Projektionen besitzen in $F'$ dieselben Krümmungskreise. Schneiden

nun die Gerade $F''F'$, die Tangente $F''F_3$ und die Normale $F''S_1''$ des Kreises $s_1''$ die $a_2''$ bezw. in $F_1$, $F_3$, $F_2$, so sind $F_1F_3$ und $F_1F''$ die Axen der Projektion jener Schnittellipse, und $F_1F_2$ ist ihr Krümmungshalbmesser in $F'$. Sodann ist auch $H'H_0 = F'F_0$ u.s.w.

Um ein besseres Bild der $k$ zu geben, ist noch die Projektion auf eine zu $\mathbf{P}_2$ senkrechte und dann in $\mathbf{P}_2$ umgelegte Ebene $\mathbf{P}_3$ gebildet, wobei die zu $\mathbf{P}_2$ parallele Symmetrieebene der $k$ sich in $a_2'''$ projicirt, und Abstand $P'''a_2''' =$ Abst. $P'a_2'$ ist. Dabei wurde $a_2'''$ senkrecht zur Tangente des $s_1''$ in $E''$ (und $\parallel S_1''E''$) angenommen, so daß die Schmiegungsebene der $k$ in $E \perp \mathbf{P}_3$ steht, also projicirende Ebene ist. $E'''$ und $F'''$ sind Scheitelpunkte der $k'''$. In $F'''$ ist der *Krümmungshalbmesser* $F'''F_6$, wie vorhin bestimmt, durch $F_5F_6 \perp F'''F_4$ (s. Fig.); in $E'''$ ist derselbe unendlich groß. Der Krümmungshalbmesser in $K'''$ ist gleich demjenigen der dritten Projektion der Schnittellipse der Berührungsebene des $\mathbf{K}_1$ in $K$ mit $\mathbf{K}_2$, deren Axen gleich $K'''K_3$ und $K_3K_2$ sind, er ist daher $= K'''K_0$, wenn $K_3K_0 \perp K'''K_2$ ist. Ebenso $L'''L_0$ in $L'''$. Der (sehr kleine) Krümmungshalbmesser der $k'$ in $K'$ könnte ganz entsprechend bestimmt werden. — Da $P''$ auf $S_1''E''$ gewählt wurde, ist $P''P'''$ Tangente des $s_1''$ und der $k'''$. Sind $r = P''S_1''$ und $r_0 = P'''P_0$ die Krümmungshalbmesser bezw. des $s_1''$ und der $k'''$ in $P''$ und $P'''$, so ist

$$r_0 = r\left(\frac{T_1T'}{P''T''}\right)^2,$$

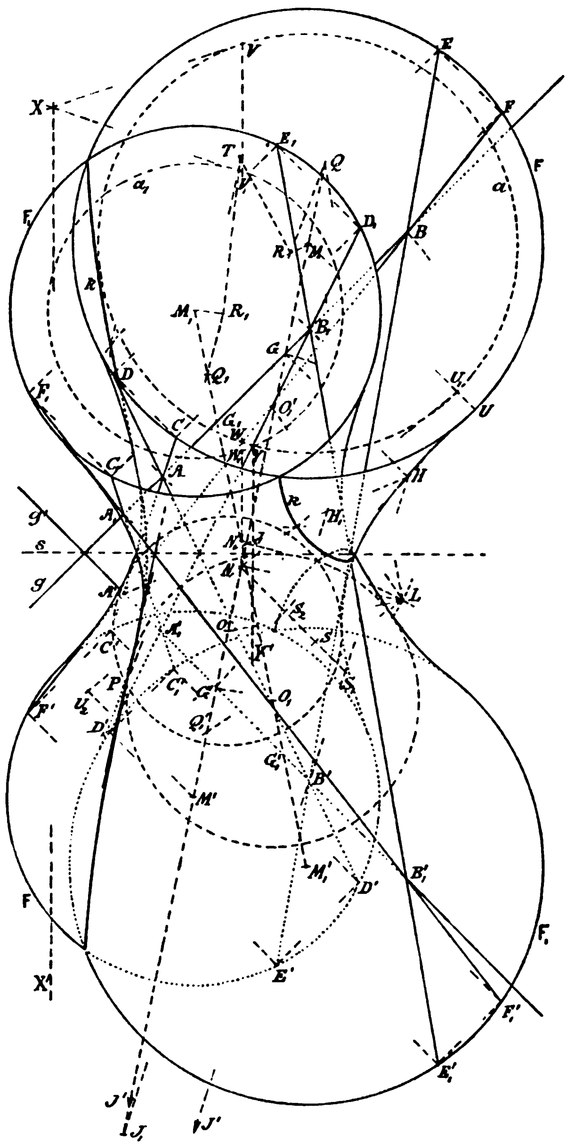
denn (208) zu gleichen $x$ gehören in beiden Kurven $y$, welche sich wie $T_1T' : P''T''$ verhalten. Die Formel wird konstruirt, indem man auf $P''T''$ die $P''T_2 = T_1T'$ aufträgt, und auf $P''S_1''$ die Punkte $P_1$ und $P_2$ so bestimmt, daß $T_2P_1 \parallel T''S_1''$ und $T_2P_2 \parallel T''P_1$; dann ist $P'''P_0 = P''P_2$. — Aus entsprechenden Gründen ist der Krümmungshalbmesser $H'''H_3 = H'H_0 \cdot \cos^2\alpha$, wenn $\alpha$ der Winkel der Tangenten der $k'$ in $H'$ und der $k'''$ in $H'''$; also $H'''H_3 = H_0H_2$, wenn $H_0H_1 \perp a_2'''$, $H'H_1 \perp H_0H_1$, $H_1H_2 \perp H_0H'$.

Die *Doppelpunkte* der $k'''$, wie $J'''$, erhält man, wenn man die Ebene der dritten Umrißlinien des $\mathbf{K}_1$ ($E''S_1''P''$) und des $\mathbf{K}_2$ ($a_2''$) mit einander schneidet, die dritte Projektion $J_1J'''$ ihrer Schnittlinie zeichnet und auf ihr die beiden Punkte, wie $J'''$, aus $J''$ und $J'$ oder aus $J^{*''}$, $J^{*'}$ bestimmt.

Der *Übergang* dieses Falles mit einem Aste der Schnittkurve $k$ in den ersten Fall mit zwei Ästen wird gebildet, indem man den Kegel $\mathbf{K}_2$ in der Richtung von $g_1$ so lange verschiebt, bis einer der Schnittpunkte der $g_1$ mit $\mathbf{K}_2$ in einen derjenigen mit $\mathbf{K}_1$ fällt; dabei müssen aber die in der Figur angenommenen Cylinder $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$

ungleich gemacht werden, damit nicht zugleich auch die zwei anderen Schnittpunkte ineinanderfallen. Es berühren sich dann beide Kegel, und im Berührungspunkte besitzt die $k$ einen Doppelpunkt, in welchem die vereinigten Spitzen der reell werdenden Kegel $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ liegen, so daß drei getrennte Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ($\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$) vorhanden sind. Bei weiterer Verschiebung in demselben Sinne teilt sich $k$ in zwei Äste, und der eine Kegel ($\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$) teilt sich in deren zwei $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$. Läßt man im Falle der Berührung die Spitze $S_2$ von $\mathbf{K}_2$ in den Berührungspunkt rücken, so wird dieser aus einem Doppelpunkte eine Spitze der $k$, und es bestehen nur noch zwei getrennte Kegel $\mathbf{K}_1$ und ($\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$).

Fig. 126.



**286.** *Aufgabe. Die Schnittlinie k zweier Flächen zweiten Grades darzustellen, wenn sie aus zwei unpaaren Ästen besteht* (282, 4)).

*Aufl.* Es gehen dann keine reellen Kegel durch $k$; und die Flächen zweiten Grades $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$, deren Schnitt $k$ ist, sind Regelflächen.

Benutzen wir irgend eine Parallelprojektion, deren Art unbestimmt bleiben kann, da es sich nur um Schnitte, nicht aber um wahre Maße handelt, und seien $g$, $g'$ die reellen Gegenkanten des gemeinschaftlichen Polartetraeders, so treffen diese die **F** bezw. in $A$, $B$ Fig. 126. und $A'$, $B'$, die $\mathbf{F}_1$ in $A_1$, $B_1$ und $A_1'$, $B_1'$, derart daß $A$, $B$ durch $A_1$, $B_1$, und $A'$, $B'$ durch $A_1'$, $B_1'$ getrennt sind.

Es wurde der Einfachheit halber in der Zeichnung $g' \perp g$ und die Punktreihe $A'B'A_1'B_1'$ symmetrisch mit $ABA_1B_1$ in Bezug auf die Halbirende $s$ des einen Winkels von $g$ und $g'$ angenommen. Stellen wir uns diese $s$ als die Projektion einer Geraden vor, welche durch die Mitten der räumlichen (windschiefen) Strecken $AA_1'$ und $BB_1'$ geht, und denken uns die Raumgerade $s$ parallel zur Projektionsebene und die projicirenden Ebenen von $AA_1'$ und $BB_1'$ senkrecht auf $s$, so sind auch die räumlichen Punktreihen auf $g$ und $g'$ senkrecht symmetrisch zu einander in Bezug auf die Raumgerade $s$. Wir wollen die beiden Regelflächen durch zwei zugleich mit $g$ und mit $g'$ parallele Ebenen **P** und **P**$'$ begrenzen, welche, in gleichen Abständen von diesen Geraden gelegt, dieselben zwischen sich einschließen, und durch ihre beiden Schnittpunkte $C$, $C'$ mit $AA'$ bestimmt sind, wenn $A'C' = -AC$ gemacht wird. Die bezw. auf **F** und $\mathbf{F}_1$ liegenden windschiefen Vierseite $AA'BB'$ und $A_1A_1'B_1B_1'$ werden von **P** und **P**$'$ in je vier Punkten geschnitten, welche Parallelogramme bilden, deren Seiten mit $g$ und $g'$ parallel, also in unserem Falle in der Abbildung Rechtecke sind. Diejenigen für **F** sind dadurch als $CDEF$, $C'D'E'F'$ bestimmt; dabei z. B. $D$ auf $AB'$ durch $CD \parallel g'$. Für $\mathbf{F}_1$ bestimmt man zuerst $C_1$ und $C_1'$ durch $A_1C_1 : A_1A_1' = AC : AA'$ und $A_1'C_1' = -A_1C_1$, oder hier wegen der Symmetrie kürzer $A_1C_1 = -A'C'$, und $A_1'C_1' = -AC$; und sodann $C_1D_1E_1F_1$ und $C_1'D_1'E_1'F_1'$ durch Parallele zu $g$ und $g'$. **F** und $\mathbf{F}_1$ sind durch jene Vierseite noch nicht bestimmt; wir können für jede noch einen Punkt willkürlich annehmen, wodurch eine dritte Erzeugende einer jeden Schaar und somit die Fläche bestimmt ist. Wir thun dies dadurch, daß wir in **P** zu den vier Punkten $C$, $D$, $E$, $F$ noch einen fünften annehmen, wodurch der Schnittkegelschnitt von **F** mit **P** festgelegt ist. Da $CDEF$ ein Rechteck ist, so können wir als diesen Kegelschnitt einen Kreis annehmen, ebenso für $\mathbf{F}_1$ einen solchen durch $C_1$, $D_1$, $E_1$, $F_1$ legen, dann sind auch die Spuren der Flächen in **P**$'$ Kreise; die Mittelpunkte dieser vier Kreise seien $M$, $M_1$, $M'$, $M_1'$. Die Regelflächen sind dann einschalige Hyperboloide.

Von den so bestimmten in Bezug auf die Raumgerade $s$ symmetrischen Flächen ermitteln wir nun die Schnittlinie $k$ in unserem

Falle leicht durch Hilfsebenen, welche ∥ **P** laufen und daher beide Flächen in Kegelschnitten treffen, deren Abbildungen Kreise sind. Die Geraden $MM'$, $M_1M_1'$ enthalten die Mittelpunkte aller dieser Kreise; diese Geraden schneiden die $g$ und $g'$ bezw. in $G$, $G_1$, $G'$, $G_1'$, und diese Punkte sind die Mittelpunkte zweier Paare von Kreisen, welche der Reihe nach durch $A$, $B$; $A_1$, $B_1$; $A'$, $B'$; $A_1'$, $B_1'$ gehen und je zwei Punkte der $k$ liefern, wie in der Figur angedeutet ist. Zur Bestimmung weiterer Punkte teile man $GG'$, $G_1G_1'$ und etwa $BB'$, $B_1B_1'$ in dieselbe Anzahl (etwa sechs) gleiche Teile, trage die Teilung, wenn nötig, über $G$, $G'$, $G_1$, $G_1'$ hinaus weiter und ziehe aus den ersteren Teilungspunkten Kreise durch die letzteren. Zwei Kreise derselben Hilfsebene liefern zwei Punkte der $k$; zwei solche mit den Mittelpunkten $O$, $O_1$ sind verzeichnet; ihr einer Schnittpunkt ist $P$. Bei der Symmetrie unserer Figur kommt jeder Halbmesser zweimal vor. Man bemerkt, daß jeder Ast von $k$ diejenigen Erzeugenden $AB'$, $A'B$, $A_1'B_1$, $A_1B_1'$ nicht schneidet, deren Punkte auf $g$ und $g'$ beide auf der endlichen, oder beide auf der unendlichen Strecke liegen, welche durch die andere Fläche ausgeschnitten wird.

Um die *Tangente* der $k$ in $P$ zu ermitteln, bestimme man zunächst die Berührungsebene der **F** in $P$ mittelst der auf $MM'$ liegenden Spitze $Q$ des die **F** entlang des Kreises $(O, P)$ berührenden Kreises, wobei man beachtet, daß $O$ und $Q$ konjugirte Punkte in Bezug auf **F** sind. Auf $MM'$ sind aber schon zwei konjugirte Punkte $G$, $G'$ gegeben; ein zweites Paar findet man, wenn man von dem aus $G$ durch $B$ gezogenen Kreise den Halbmesser $GH \parallel g'$ und $= GB$ zieht; $HA'$ und $HB'$ schneiden dann auf $MM'$ die konjugirten Punkte $J$, $J'$ ein (I, 347). Die (gleichlaufende) Involution $G$, $G'$; $J$, $J'$ wird aus einem Schnittpunkte $L$ zweier in derselben Ebene über $GG'$ und $JJ'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt. (Da $J'$ unerreichbar, erhält man den Mittelpunkt $J_1$ von $JJ'$ durch $H_1J_1 \parallel HB'J'$, wenn $H_1$ der Mittelpunkt von $JH$.) $Q$ ist dann bestimmt durch $LQ \perp LO$. Die Erzeugende $QP$ jenes Kegels trifft die **P** in $R$, wenn $MR \parallel OP$, und die Berührungsebene des Kegels und der **F** in $P$ hat in **P** die Spur $RT$ ($\perp MR$). In übereinstimmender Weise bestimmt man für $\mathbf{F}_1$ auf $M_1M_1'$ den zu $O_1$ konjugirten Punkt $Q_1$, und zwar in unserem Falle wegen der Symmetrie von $MM'$ und $M_1M_1'$ in Bezug auf $s$ am leichtesten durch $MO_1' = -M_1'O_1$, $O_1'LQ_1' = 90^0$, $M_1Q_1 = -M'Q_1'$. Die $PQ_1$ schneidet die **P** in $R_1$, wenn $M_1R_1 \parallel O_1P$; dann ist $R_1T$ ($\perp M_1R_1$) die Spur der Berührungsebene der $\mathbf{F}_1$ in $P$. Schneiden sich $RT$ und $R_1T$ in $T$, so ist $PT$ die gesuchte

Tangente. — Der Ort der $T$ ist die Spur der abwickelbaren Fläche der Tangenten der $k$; diese Fläche besteht aus zwei geschlossenen Flächenästen, und ihre Spur aus zwei geschlossenen Kurvenästen, wovon jeder einem der beiden geschlossenen Äste der $k$ angehört und eine Spitze in jedem Schnittpunkte der $k$ mit der **P** besitzt.

**287.** Zur Bestimmung der *Asymptoten* der $k$ ermitteln wir zuerst die Asymptotenkegel der Hyperboloide. Der Mittelpunkt der **F** liegt als konjugirt zu dem unendlich fernen Punkte von $MM'$ im Fußpunkte $N$ der von $L$ auf $MM'$ gefällten Senkrechten. Die Ebene $MM'H$ schneidet die Fläche **F** in einer Hyperbel, in welcher die Geraden $MM'$ und $GH$ konjugirt sind. Der Halbdurchmesser $NS$ ($\parallel GH$) ist bestimmt durch $NS^2 = NS_1 . NS_2$, wenn $S_1$ und $S_2$ auf $NS$ und bezw. auf $HS_1$ ($\parallel MM'$) und auf $HG'$ (Tangente der Hyperbel in $H$, weil $G$ und $G'$ konjugirt sind) liegen; denn $S$ ist einer der Doppelpunkte der Involution konjugirter Punkte, in welcher $N$ der Mittelpunkt und $S_1$, $S_2$ ein Punktepaar ist. Auf der Ordinate $MU$ ($\parallel NS$) erhält man den Punkt $U_1$ einer Asymptote der Hyperbel vermittelst $MU_1^2 = MU^2 - NS^2$ (I, 371). Der Asymptotenkegel schneidet daher die **P** in dem aus $M$ durch $U_1$ gezogenen Kreise $a$ und die $\mathbf{P}_1$ in dem aus $M'$ durch $U_2$ gezogenen Kreise, wenn $M'U_2 \parallel MU_1$ und $U_2$ auf $NU_1$. — Übereinstimmend könnte man den Asymptotenkegel der $\mathbf{F}_1$ ermitteln; wegen jener Symmetrie ist seine Spitze $N_1$ symmetrisch zu $N$ in Bezug auf $s$, und seine Spur in **P** ist der aus $M_1$ mit einem Halbmesser $= M'U_2$ beschriebene Kreis $a_1$.

Um die unendlich fernen Punkte der $k$ zu erhalten, bringt man den Asymptotenkegel $N_1$ durch Parallelverschiebung in eine mit dem Asymptotenkegel $N$ koncentrische Lage, schneidet die koncentrischen Kegel etwa mit **P** in je einem Kreise, und verbindet deren Schnittpunkte mit $N$, so sind mit diesen Verbindungslinien die Asymptoten der $k$ parallel. Unter den vier Asymptoten sind stets zwei reell, da jede Ebene, so auch die unendlich ferne, die **F** und die $\mathbf{F}_1$ in reellen Kegelschnitten trifft, die sich reell schneiden, weil die Punkte des einen Kegelschnittes, welche auf jenen Ausgangserzeugenden der zugehörigen Fläche liegen, die der anderen Fläche nicht reell begegnen, sich auf entgegengesetzten Seiten des anderen Kegelschnittes befinden. In unserem Falle sind nur zwei Asymptoten reell, da jene Kegelschnitte Kreise sind und daher nur zwei reelle Punkte gemein haben. Sie lassen sich bei der von uns gemachten Annahme der Symmetrie besonders leicht bestimmen. Die koncentrischen Kegel sind in Bezug auf eine parallel zur Raumgeraden $s$ durch $N$ gelegte Gerade $s'$ symmetrisch; und da nur zwei Schnittgeraden beider Kegel bestehen, müssen sich diese in der durch $N$ senkrecht

zu $s'$ gelegten Ebene befinden, wobei jede dieser Schnittgeraden in Bezug auf $s'$ symmetrisch zu sich selbst ist. Lägen nämlich beide Gerade nicht in jener Ebene, so müßten zu den zwei Geraden des einen Astes eines der Kegel auf dessen anderem Aste zwei symmetrische in Bezug auf $N$ und zwei davon verschiedene symmetrische in Bezug auf $s'$ bestehen, also im ganzen vier, was unmöglich. In der Zeichnung ziehen wir daher durch $N$ eine (zugleich durch $N_1$ gehende) Senkrechte zu $s$, schneiden sie mit dem Kreise $a$ des Asymptotenkegels $N$ in $V$ und $W$, und mit demjenigen $a_1$ des wieder zurückgeschobenen Kegels $N_1$ in den entsprechenden Punkten $V_1$ und $W_1$, ziehen in diesen Punkten die Tangenten $VX$, $V_1X$; $WY$, $W_1Y$ an $a$ und $a_1$, deren Schnittpunkte bezw. $X$ und $Y$ seien, so sind die auf $s$ Senkrechten $XX'$, $YY'$ die Asymptoten der $k$.

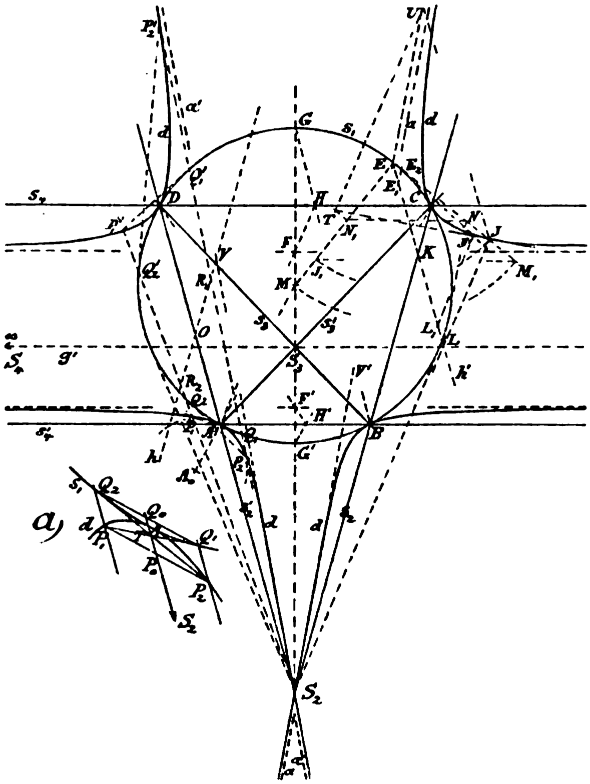
In der Projektion liegt jede Asymptote auf derselben Seite der beiden nach ihrem unendlich fernen Punkte laufenden Zweige der Kurve $k$, so daß dieser Punkt ein Wendepunkt der $k$ ist. Es rührt dies von der zu den Asymptoten senkrechten Lage der Symmetrieaxe her; die durch eine Asymptote gehende Schmiegungsebene steht dann senkrecht auf der Projektionsebene (I, 260).

288. *Die Doppelkurve $d$ der abwickelbaren Fläche der Tangenten der Schnittlinie $k$ zweier Flächen zweiten Grades* $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ besteht aus vier ebenen Ästen, welche in den Seitenflächen des gemeinschaftlichen Polartetraeders von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ liegen (278). Damit sie reell ist, müssen wenigstens zwei Seitenflächen und daher auch die ihnen gegenüberstehenden Ecken dieses Tetraeders, und dann auch zwei der durch $k$ gehenden Kegel zweiten Grades reell sein, ohne daß, wie wir sehen werden, die Schnittkurve $k$ reell sein müßte. Ein solcher ebener Ast ist bestimmt, wenn der Kegelschnitt $s_1$ und die zwei Geraden $s_2$ gegeben sind, worin seine Ebene $\mathbf{S}_1$ bezw. den von der gegenüberliegenden Ecke $S_1$ des Tetraeders ausgehenden Kegel $\mathbf{K}_1$, und einen der anderen Kegel, etwa $\mathbf{K}_2$, schneidet (dessen Spitze $S_2$ in $\mathbf{S}_1$ liegt).

1. *Fall. Die Ebene* $\mathbf{S}_1$ *des Kurvenastes $d$ enthält von einem der vier Kegel einen reellen Kegelschnitt* $s_1$, *von jedem der drei anderen ein*
Fig. 127. *Paar reeller Geraden* $s_2$, $s_2'$; $s_3$, $s_3'$; $s_4$, $s_4'$; diese vier Linien gehen durch die vier, der Schnittkurve $k$ angehörigen reellen Punkte $A$, $B$, $C$, $D$. Indem wir wieder die Projektion aus $S_1$ auf $\mathbf{S}_1$ bilden, erhalten wir $s_1$ als Projektion der Schnittkurve $k$. Bei der Konstruktion können wir einen beliebigen der drei reellen Kegel $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ benutzen. Es sei $\mathbf{K}_2$; derselbe kann sich in dasjenige Paar von Scheitelwinkeln $S_2(s_2 s_2')$ projiciren, in welchem $S_3$ liegt, oder in das andere. Im ersteren Falle stelle $S_2 R_1$ eine Erzeugende des

$\mathbf{K}_2$ vor; die Berührungsebene des $\mathbf{K}_2$ entlang $S_2 R_1$ hat zur Spur die Gerade $S_2 R_2$, wenn $S_2 R_2$ und $S_2 R_1$ durch $s_2$ und $s_2'$ harmonisch getrennt sind. Man findet zwei solche entsprechende Strahlen $S_2 R_1$, $S_2 R_2$ etwa durch ihre Punkte $R_1$, $R_2$ auf einer Parallelen $h$ zu $s_2$, welche von $s_2'$ in $O$ getroffen werde, wenn man $OR_2 = -OR_1$ macht. Trifft nun $S_2 R_1$ den Kegelschnitt $s_1$ (in der Figur ein Kreis) in zwei Punkten $Q_1$, $Q_1'$, so sind diese die Projektionen der beiden Schnittpunkte der Erzeugenden $S_2 R_1$ mit dem Kegel $\mathbf{K}_1$, also zweier Punkte der $k$. Die Berührungsebene des $\mathbf{K}_1$ entlang $S_1 Q_1$ hat zur Spur die Tangente $Q_1 P_1$ des $s_1$ in $Q_1$, und

Fig. 127.




die Spuren $S_2 R_2$ und $Q_1 P_1$ beider Berührungsebenen treffen sich in der Spur $P_1$ der Tangente der $k$ im Raumpunkte $Q_1$, so daß $P_1$ ein Punkt der Doppelkurve ist. $Q_1'$ liefert einen zweiten Punkt $P_1'$ der $d$ auf $S_2 R_2$. Würde aber der Kegel $\mathbf{K}_2$ sich in das andere Paar von Scheitelwinkeln $s_2 s_2'$ projiciren, so wäre $S_2 R_2 Q_2 Q_2'$ die Projektion einer Erzeugenden dieses Kegels, $S_2 R_1$ die Spur der ihn entlang $SR_2$ berührenden Ebene, und die Tangenten des $s_1$ in $Q_2$ und $Q_2'$ würden auf $S_1 R_1$ die zwei Punkte $P_2$, $P_2'$ liefern, welche die Schnittpunkte je zweier Tangenten der neuen Schnittkurve sind. Beide Teile zusammen bilden die ganze nur von dem Kegelschnitte $s_1$ und seinem eingeschriebenen Vierecke $ABCD$ abhängige Kurve $d$. Nach der bald zu verfolgenden Imaginärprojektion würde aber der eine der Kegel $s_2 s_2'$ die Imaginärprojek-

tion des anderen aus $S_1$ sein, die eine Schnittkurve $k$ die Imaginärprojektion der anderen, die reellen Tangenten der einen die Projektionen der imaginären der anderen, die reellen Doppelkurven $d$ auf der Kollineationsebene $\mathbf{S}_1$ würden aber sich selbst entsprechen als reelle Schnittpunkte von je zwei reellen oder konjugirt imaginären Tangenten.

*Die Doppelkurve d berührt die Grundkurve* $s_1$ *in den vier Punkten* $A, B, C, D$ *der Schnittkurve* $k$*; sie hat einen jeden der drei in ihrer Ebene liegenden Eckpunkte* $S_2, S_3, S_4$ *des Tetraeders zu einem Doppelpunkte und zu einem Wendepunkte eines jeden durch den Punkt gehenden Astes.* Denn zieht man aus einem dieser Eckpunkte, etwa aus $S_2$, die beiden Tangenten an $s_1$ und sucht deren entsprechende Strahlen $S_2V$, $S_2V'$, so findet man auf jedem derselben den Punkt $S_2$ als Punkt der $d$. Zugleich ist jeder der Strahlen eine Tangente und der Punkt ein Wendepunkt der $d$, weil auf dem benachbarten Strahle zwei Punkte der $d$ auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $S_2$ liegen, deren Abstände von $S_2 = 0^1$ und von dem Strahle $= 0^2$ sind.

Ebenso findet man die Tangenten in dem in der Figur unendlich fernen Doppelpunkte $S_4$, indem man zu den aus $S_4$ an $s_1$ gezogenen Tangenten, deren Berührungspunkte $G, G'$ sind, bezw. die entsprechenden Strahlen $S_4F$, $S_4F'$ bestimmt, derart daß $S_4G$, $S_4F$, sowie $S_4G'$, $S_4F'$ durch $s_4$, $s_4'$ harmonisch getrennt werden. Es geschieht dies etwa dadurch, daß man $GB$ mit $s_4$ in $H$, $HA$ mit $GG'$ in $F$ schneidet. In unserem Falle sind $S_4F$, $S_4F'$ Asymptoten der $d$. Da die aus $S_3$ an $s_1$ zu ziehenden Tangenten imaginär sind, so sind es auch die in $S_3$ an $d$ zu ziehenden, oder $S_3$ ist ein isolirter Punkt der $d$.

*Die ebene Doppelkurve d ist von der vierten Ordnung*, da ein aus einem Doppelpunkte gezogener Strahl außer diesem noch zwei Punkte derselben enthält. *Die ganze Doppelkurve der abwickelbaren Fläche ist von der* $16^{ten}$ *Ordnung*, da sie aus vier solchen ebenen Kurvenästen besteht.

**289.** *Die Tangente der Doppelkurve d.* Schneidet die durch einen Punkt $E$ der $s_1$ gezogene Parallele $h'$ zu $s_2'$ die $s_2$ in $K$, und macht man $KL = -KE$, und, unendlich wenig davon verschieden, $KL_1 = -KE_1$, so sind $S_2L$, $S_2E$, sowie $S_2L_1$, $S_2E_1$ entsprechende Strahlen; schneiden $S_2E$, $S_2E_1$ den $s_1$ in den benachbarten Punkten $E$, $E_2$, und treffen die Tangenten des $s_1$ in $E$ und $E_2$ bezw. die $S_2L$ und $S_2L_1$ in $J$ und $J'$, so sind dies zwei benachbarte Punkte der $d$. Die zwei durch $J$ und die zwei durch $J'$ ge-

zogenen Konstruktionslinien bilden ein unendlich kleines Parallelogramm; vergrößert man dasselbe aus $J$ als Ähnlichkeitspunkt zu einem mit ihm ähnlichen und endlichen Parallelogramme, so ist dessen aus $J$ gezogene Diagonale die gesuchte Tangente. Vergrößert man dabei $EE_1$ zu $EL$, so wird $EE_2$ zu $EN$, wenn $N$ auf $EE_2$ (der Tangente der $s_1$) und wenn $LN \parallel S_2E$. Die Tangenten an $s_1$ in $E$ und $E_2$ bilden denselben Winkel, wie die aus dem Krümmungsmittelpunkte $M$ des $s_1$ in $E$ zu ziehenden Normalen $ME$, $ME_2$; das von diesen Tangenten auf einer durch $J$ und $\perp EJ$ gezogenen Geraden abgeschnittene Stück $n$ verhält sich daher zu $EE_2$, wie $EJ : ME$, und ebenso verhalten sich die aus $n$ und aus $EE_2$ durch ihre verhältnismäßige Vergrößerung entstandenen Stücke $EN_1$ und $EN$. Daher erhält man $EN_1$, wenn man auf $EM\,(\perp EJ)$ die $EJ_1 = EJ$ und auf $EJ$ die $EM_1 = EM$ aufträgt, und $NN_1 \parallel M_1J_1$ zieht. Dann ist die zu $EJ$ Parallele $N_1T$ eine neue Seite des vergrößerten Parallelogramms. — Andererseits schneidet $S_2L_1$ auf der Parallelen $JU$ zu $EL$ ein Stück ab, das durch seine verhältnismäßige Vergrößerung $= JU$ ($U$ auf $S_2E$) wird; daher ist $UT \parallel S_2J$ die andere neue Seite des vergrößerten Parallelogramms. Seine Diagonale $JT$ ist die gesuchte Tangente.

*Die nicht durch eine der Tetraederecken gehenden Asymptoten $a, a'$* sind in der Figur verzeichnet; ihre Konstruktion soll bei Fig. 129, welche hierzu mehr Deutlichkeit bietet, gegeben werden.

**290.** *Satz. Die Krümmungshalbmesser der Doppelkurve $d$ und der Grundkurve $s_1$ in einem Punkte gegenseitiger Berührung verhalten sich wie* $-1:3$. So ist $AA_0 = -\frac{1}{3}AM$.

Kommen $Q_1$ und $Q_2$ dem Punkte $A$ unendlich nahe, so wird $Q_1P_2 \parallel Q_2P_1 \parallel AS_2$ und Abst. $A . Q_1P_2 =$ Abst. $A . Q_2P_1$. Schneidet Fig. 127, a). $AS_2$ die Linien $Q_1Q_2$, $P_1P_2$ bezw. in $Q_0$, $P_0$, und die beiden die $s_1$ in $Q_1$ und $Q_2$ Berührenden in $T$, so ist $Q_0A = AT$ (I, 236, 7)); ferner ist $Q_0T = TP_0$, daher $AP_0 = 3 . Q_0A$. Denkt man sich nun in $A$ die gemeinschaftliche Tangente und Normale der Kurven $s_1$ und $d$ gezogen, und bezeichnet die senkrechten Abstände des $Q_1$ von diesen Linien mit $x$ und $y$, die von $P_2$ mit $x_1$ und $y_1$, und die Krümmungshalbmesser der $s_1$ und $d$ in $A$ mit $r$ und $r_0$, so ist wegen $y_1 = y$ und $x_1 = -3x$ (208)

$$r_0 = -\tfrac{1}{3}r.$$

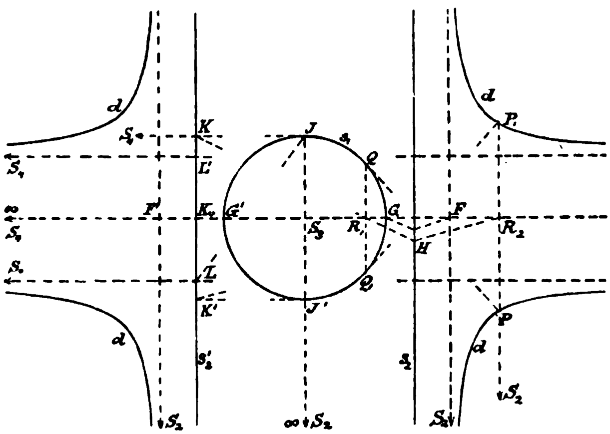
Diese Eigenschaft ist projektiv, und es gilt: *Die Krümmungshalbmesser zweier Kurven in einem gemeinschaftlichen Punkte mit gemeinschaftlicher Tangente und Schmiegungsebene verhalten sich wie die Krümmungshalbmesser der (Central- oder Parallel-) Projektionen der*

*Kurven in der Projektion jenes gemeinschaftlichen Punktes.* Denn wird bei den bisherigen Bezeichnungen aus $y$, $y_1$, $x$, $x_1$ durch die Projektion $y'$, $y_1'$, $x'$, $x_1'$, so ist wegen $y = y_1$ auch $y' = y_1'$ und $x' : x_1' = x : x_1$, woraus der Satz folgt (208).

**291.** 2. *Fall. Die Ebene des Kurvenastes $d$ enthält von einem der vier Kegel einen reellen Kegelschnitt $s_1$, von einem anderen zwei von $S_2$ ausgehende, den $s_1$ nicht reell schneidende Gerade $s_2$, $s_2'$, von den beiden letzten Kegeln daher je zwei bezw. von reellen Punkten $S_3$ und $S_4$ ausgehende imaginäre Gerade.* Liegt dabei $s_1$ im Innern desjenigen Scheitelwinkelpaares $S_2(s_2 s_2')$, in welchen sich die Projektion des Kegels $\mathbf{K}_2$ befindet, so ist die Schnittkurve $k$ beider Kegel reell; im anderen Falle ist $k$ imaginär und $d$ ist die reelle Doppelkurve der imaginären abwickelbaren Fläche der Tangenten der $k$.

Fig. 128. In der Figur wurden $s_1$ als Kreis, $S_3$ im Mittelpunkte desselben angenommen, wodurch $S_2$, $S_4$ ins Unendliche fallen und $\sphericalangle\, S_2 S_3 S_4$

Fig. 128.



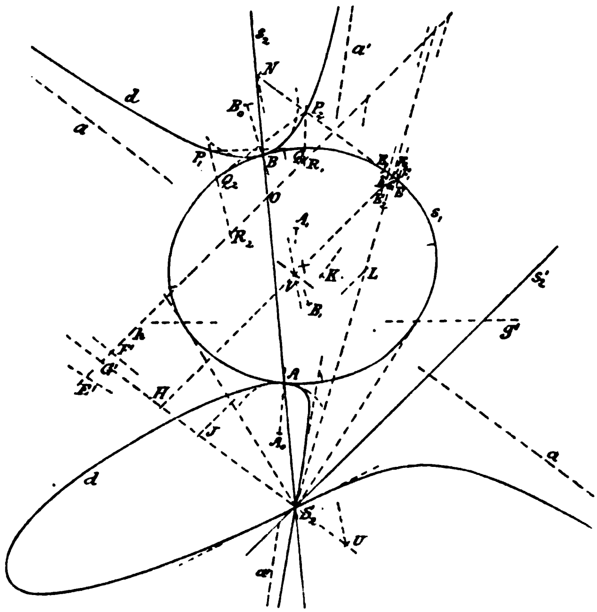

$= 90^0$ wird. Zieht man aus $S_2$ einen Strahl, welcher die $S_3 S_4$ und $s_1$ bezw. in $R_1$ und $Q$, $Q_1$ trifft, so erhält man den entsprechenden Strahl $S_2 R_2$, wenn man auf $s_2'$ von $K_0$ (auf $S_3 S_4$) aus $K_0 K' = - K_0 K$, die wir gleich dem Kreishalbmesser machen wollen, aufträgt, $K R_1$ mit $s_2$ in $H$, und $H K'$ mit $S_3 S_4$ in $R_2$ schneidet; die Tangenten an $s_1$ in $Q$ und $Q_1$ treffen dann die $S_2 R_2$ bezw. in $P$ und $P_1$, Punkten der Doppelkurve $d$. Die Asymptoten $S_2 F$, $S_2 F'$ entsprechen den die $s_1$ in $G$, $G'$ berührenden Strahlen $S_2 G$, $S_2 G'$. Die Asymptoten $S_4 L$, $S_4 L'$ erhält man, indem man beachtet, daß eine jede derselben, z. B. $S_4 L$ und die in $J$ berührende Tangente $S_4 K J$ der $s_1$ zugeordnete Strahlen der Involution sind, deren Doppelstrahlen durch je zwei der Schnittpunkte von $k$ mit $\mathbf{s}_1$ oder von $s_2'$

und $s_2$ mit $s_1$ gehen (288), d. h. daß $S_4 I_4$ und $S_4 K$ die $s_2'$ in Punkten $L$ und $K$ schneiden, welche in Bezug auf $s_1$ konjugirt sind, daß also $L$ auf der Polaren von $K$ zu $s_1$ liegt, oder daß $JL \perp S_3 K$ steht.

**292.** 3. *Fall. Die Ebene des Kurvenastes d enthält von einem der vier Kegel einen reellen Kegelschnitt* $s_1$, *von einem anderen zwei von* $S_2$ *ausgehende Gerade* $s_2$, $s_2'$, *deren eine* ($s_2$) *den* $s_1$ *reell, die andere* ($s_2'$) *ihn imaginär schneidet, so daß die beiden letzten Kegel imaginär sind.*

Dabei kann das eine Scheitelwinkelpaar $s_2 s_2'$, oder das andere die Projektion des Kegels $\mathbf{K}_2$ bilden; jedesmal ist der Teil der $d$, welcher außerhalb der Projektion von $\mathbf{K}_2$ liegt, die Doppelkurve der reellen abwickelbaren Fläche, und der Teil, welcher innerhalb derselben liegt, die reelle Doppelkurve des imaginären Teiles der abwickelbaren Fläche. Fig. 129.

Fig. 129.



Die Schnittpunkte $A$, $B$ von $s_2$ mit $s_1$ sind Berührungspunkte der $d$ und $s_1$. Mittelst $h$ ($\parallel s_2'$), $OR_2 = -OR_1$ und $Q_1$, $Q_2$ ergeben sich wieder die $P_1$, $P_2$ der $d$. Den Tangenten aus $S_2$ an $s_1$ entsprechen die Tangenten der $d$ in $S_2$. Die Kurve besitzt auf der unendlich fernen Geraden vier Punkte und daher auch *vier Asymptoten*, deren keine bei endlich entferntem $S_2$ durch eine Tetraederecke geht. Von diesen Asymptoten sind in der Figur zwei reell. Dieselben wurden in folgender Weise durch Fehlerkurven konstruirt. Ist $S_2 E'$ die mutmaßliche Richtung einer Asymptote, $S_2 E$ der entsprechende Strahl, und $E$ derjenige seiner beiden Schnittpunkte mit $s_1$, in welchem die Tangente des $s_1$ nahezu parallel mit $S_2 E'$ läuft, ferner $E_1$ derjenige zunächst bei $E$ liegende Punkt von $s_1$, in welchem die Tangente des $s_1$ wirklich parallel mit $S_2 E'$

läuft, so kann die Strecke $E E_1$ als Maß des Fehlers dienen. Verbessert man die Richtung $S_2 E'$ schätzungsweise in $S_2 F'$ und erhält dadurch entsprechend $F$ und $F_1$ mit dem in der Zeichnung entgegengesetzt gerichteten Fehler $FF_1$, so ziehe man durch $E_1$ und $F_1$ in passender Richtung zwei Parallele und trage auf ihnen in ihrem bezüglichen Sinne $E_1 E_2 = E_1 E$, $F_1 F_2 = F_1 F$ auf; dann schneidet die Gerade $E_2 F_2$ den $s_1$ in dem verbesserten Punkte $G$. Ist nun der dem $S_2 G$ entsprechende Strahl $S_2 G'$ parallel mit der Tangente des $s_1$ in $G$, so ist $S_2 G'$ die Richtung einer Asymptote; anderenfalls verbessert man die gerade Fehlerlinie $E_2 F_2$ durch einen dritten Punkt $G_2$ zu einer Fehlerkurve, deren Schnittpunkt mit $s_1$ die Asymptotenrichtung bestimmt.

In der Figur ist schon $S_2 G'$ parallel zur Tangente $GN$ des $s_1$ in $G$, also die Richtung der Asymptote; man bestimmt nun die Asymptote $a$ selbst, indem man beachtet, daß wenn die entsprechenden Strahlen $S_2 G'$ und $S_2 G$ auf $h$ gleiche unendlich kleine Strecken in entgegengesetztem Sinne beschreiben, $G$ ein unendlich kleines Bogenstück auf $s_1$, und die Tangente an $s_1$ in dem beweglichen Punkte einen unendlich kleinen Winkel beschreibt; daß endlich die Abstände der Asymptote $a$ von $S_2 G'$ und von $GN$ im Verhältnisse der von $S_2 G'$ und von $GN$ beschriebenen Winkel stehen, dabei in unserem Beispiele von entgegengesetztem Sinne sind, so daß $a$ im endlichen Streifen jener Parallelen liegt. Ersetzt man $h$ durch die Parallele zu $s_2'$ durch $G$, und vergrößert die auf ihr von $S_2' G$ und $S_2 G$ beschriebenen unendlich kleinen Wege zu dem zwischen $G$ und $S_2 G'$ liegenden Stücke $GH$, so ist $S_2 H$ gleich dem verhältnismäßig vergrößerten Bogenelemente des $s_1$ bei $G$, und es ist $S_2 H$ zugleich das Maß des Winkels der Endtangenten dieses Elementes, wenn man diesen Winkel durch einen Bogen mißt, dessen Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser $GK$ des $s_1$ in $G$ ist. Trägt man andererseits diesen Halbmesser auf $S_2 G'$ nach $S_2 J$ $(= GK)$ auf, zieht $JL \parallel h$ bis $L$ auf $S_2 G$, so ist der Abstand des $L$ von $S_2 J$ das verhältnismäßig vergrößerte gleichartige Maß des von $S_2 G'$ beschriebenen Winkels. Man teilt nun $GH$ im Verhältnisse jener unendlich kleinen Winkel, indem man auf den Parallelen $GN$ und $S_2 G'$ in entgegengesetztem Sinne bezw. $GN = S_2 H$ und $HU =$ Abst. $L . S_2 J$ aufträgt, und $NU$ mit $GH$ in $V$ schneidet. Durch $V$ und $\parallel S_2 G'$ läuft dann die Asymptote $a$. — Übereinstimmend wurde diejenige $a'$ bestimmt.

## VI. Die Imaginärprojektion der Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades.

**293.** *Sind von zwei Flächen zweiten Grades* **F**, $\mathbf{F}_1$ *die Imaginärprojektionen in Bezug auf einen Eckpunkt S ihres gemeinschaftlichen Polartetraeders und dessen Gegenebene* **S** *die Flächen (zweiten Grades)* **H**, $\mathbf{H}_1$ (96), *so soll auch von der Schnittkurve (vierter Ordnung) k von* **F** *und* $\mathbf{F}_1$ *die Schnittkurve (vierter Ordnung) l von* **H** *und* $\mathbf{H}_1$ *die Imaginärprojektion oder die konjugirte Kurve in Bezug auf S und* **S** *heißen. Weil* **F**, $\mathbf{F}_1$ *auch die Imaginärprojektionen von* **H**, $\mathbf{H}_1$ *sind, ist auch k diejenige von l.* (Vergl. 239.)

Da **H** und $\mathbf{H}_1$, ebenso wie **F** und $\mathbf{F}_1$, die **S** zur gemeinschaftlichen Polarebene von $S$ haben (96), *so wird l aus S durch einen Kegel zweiten Grades (doppelt) projicirt.*

*Die Kegel zweiten Grades, welche die konjugirten Raumkurven k und l vierter Ordnung aus ihrem Konjunktionsmittelpunkte S projiciren, fallen in einen Kegel* **K** *zusammen. Derselbe projicirt entweder mit allen seinen Erzeugenden die eine der Kurven reell und die andere imaginär, oder er projicirt mit einem Teil seiner Erzeugenden die eine Kurve reell und die andere imaginär, und mit dem anderen Teile die zweite reell und die erste imaginär.*

Denn jede durch $S$ gelegte Ebene schneidet die **F** und **H** in zwei konjugirten Kegelschnitten $f$ und $h$, und ebenso die $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{H}_1$ in zweien solchen $f_1$ und $h_1$, und die Schnittpunkte von $f$ und $f_1$ werden durch zwei durch $S$ gehende gemeinschaftliche reell oder imaginär schneidende Sehnen (doppelt) projicirt, und diese sind zugleich gemeinschaftliche imaginär oder reell schneidende Sehnen von $h$ und $h_1$ (I, 410 f.), projiciren also auch deren Schnittpunkte doppelt. Da aber diese Schnittpunkte der $k$ und $l$ angehören, so folgt hieraus der Satz:

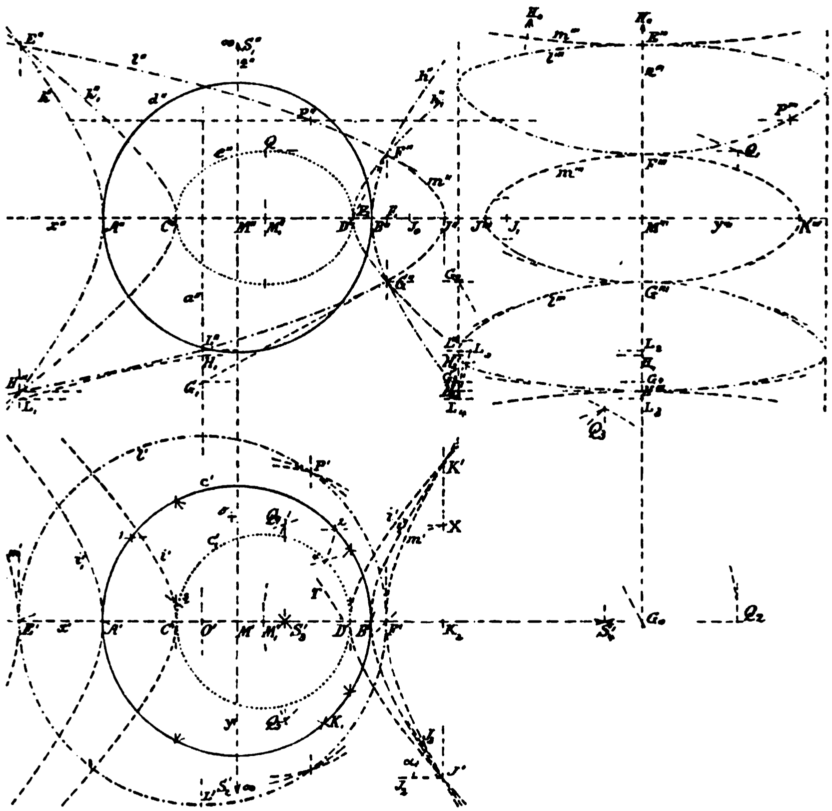
*Eine Raumkurve vierter Ordnung hat mit ihrer konjugirten in jedem ihrer Punkte in der Ebene der Konjunktion diesen Punkt, die Tangente und die Schmiegungsebene gemein, und die Krümmungshalbmesser beider Kurven sind gleich und entgegengesetzt gerichtet.* Die Tangente geht durch den Punkt der Konjunktion, ebenso die Schmiegungsebene und berührt den gemeinschaftlich doppelt projicirenden Kegel (283); die Krümmungshalbmesser sind diejenigen der konjugirten Kegelschnitte, in welchen die Schmiegungsebene die konjugirten Flächen schneidet, haben daher gleiche und entgegengesetzt gerichtete Krümmungshalbmesser (171, 239).

**294.** *Aufg. Durch die imaginäre Schnittlinie k zweier Flächen zweiten Grades* **F**, $\mathbf{F}_1$ *den reellen Kegel zweiten Grades zu legen und*

*aus der Spitze dieses Kegels die (reelle) Imaginärprojektion l der k zu bilden.*

Fig. 130. Es sei $\mathbf{F}$ eine Kugel, $\mathbf{F}_1$ ein Umdrehungsellipsoid, das ganz im Inneren der $\mathbf{F}$ liege, $M$, $M_1$ seien die Mittelpunkte der Flächen, und $M$ liege in der Äquatorebene des $\mathbf{F}_1$. In diese Ebene legen wir die $\mathbf{P}_1$, $MM_1$ sei die $x$ Axe; durch $M$ gehen die $y$- und die $z$ Axe. Es werden $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ von $\mathbf{P}_1$ bezw. in den Kreisen $c$ und $c_1$ und von $\mathbf{P}_2$ in dem Kreise $d$ und der Ellipse $e$ geschnitten.

Fig. 130.



*Aufl.* Das gemeinschaftliche Polartetraeder von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ hat die unendlich fernen Punkte $S_1$ von $z$ und $S_2$ von $y$ zu zwei Ecken, da $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ gemeinschaftliche Symmetrieebenen der beiden Flächen sind. Die anderen Eckpunkte $S_3$, $S_4$ liegen auf $x$ und sind harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte $A$, $B$ der $\mathbf{F}$ und $C$, $D$ der $\mathbf{F}_1$ mit $x$. (Schneiden $C'C''$ und $D'D''$ den $c'$ in je zwei Punkten, so sind $S_3'$, $S_4'$ Nebenecken des Vierecks dieser Punkte (114).) Die

Imaginärprojektionen der Schnittlinie $k$ von **F** und $\mathbf{F}_1$ aus $S_1$ und $S_2$ ergeben sich als reell, die aus $S_3$ und $S_4$ als imaginär. Es soll zunächst diejenige aus $S_1$ gebildet werden.

Die Imaginärprojektion aus $S_1$ von **F** ist ein einschaliges gleichseitiges Umdrehungshyperboloid **H**, die von $\mathbf{F}_1$ ein Umdrehungshyperboloid $\mathbf{H}_1$, ihre Schnitte mit $\mathbf{P}_2$ sind die beiden Hyperbeln $h''$, $h_1''$, welche bezw. $A''$, $B''$; $C''$, $D''$ zu Scheiteln, und die mit $z''$ parallelen Axen von $d''$ und $e''$ zu ideellen Axen haben. Die Schnittlinie $l$ von **H** und $\mathbf{H}_1$ ist die Imaginärprojektion von $k$ aus $S_1$. $h$, $h_1$ liefern vier Punkte $E, F, G, H$ der $l$, und weitere Punkte $P$ derselben können durch parallele Ebenen zu $\mathbf{P}_1$ erhalten werden, welche die **H** und $\mathbf{H}_1$ in Kreisen schneiden. Die erste Projektion $l' = E'P'F'$ ist ein Kegelschnitt und die Spur des reellen die $l$ und die $k$ aus $S_1$ doppelt projicirenden Kegels. Dieser Kegelschnitt $l'$ ist aber ein Kreis, und der Kegel ein Cylinder. Denn $l'$ geht durch die vier Spurpunkte der $k$ in $\mathbf{P}_1$, d. i. durch die vier (imaginären) Schnittpunkte der Kreise $c'$, $c_1'$; zwei derselben sind die unendlich fernen Kreispunkte, daher ist $l'$ ebenfalls ein Kreis; die zwei anderen sind die imaginären Punkte auf der Potenzlinie $J'K'$ von $c', c_1'$ (I, 302 und 395), welche Linie $\perp x'$ durch den Schnittpunkt $X$ einer Sehne 1, 2 des $c$, und einer solchen 3, 4 des $c_1'$ geht, wenn diese vier Punkte auf einem (Hilfs-)Kreise (sein Mittelpunkt ist 0) liegen. Die ideellen gemeinschaftlichen Punkte $J'$, $K'$ von $c'$ und $c_1'$ erhält man, wenn man $K_1$ auf $c'$ so bestimmt, daß $S_2'K_1$ und $S_2'K'$ durch $A'$ und $B'$ harmonisch getrennt (die Tangente des $c_1'$ in $K_1$ geht durch den Schnittpunkt $K_2$ von $K'J'$ mit $x'$) und daß $A'K_1J'$ und $B'K_1K'$ Gerade sind (I, 400); $J'K'$ wird durch $x'$ halbirt. Auch die Punkte $E'$, $F'$ des $l'$ können ohne Hilfe der Hyperbeln $h$, $h_1$ bestimmt werden (I, 411; $Q_1$ Schnittpunkt der Polaren von $Q$ zu $d''$ bezw. $e''$, $Q_2$ auf $x'$, $Q_1Q_2 \perp x'$; $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$ auf dem Kreise, dessen Durchmesser $M_1'Q_2$, $S_4'Q_3 \perp x'$, $S_3'Q_4Q_5 \perp x'$, $Q_3Q_4E'$ und $Q_3Q_5F'$ gerade Linien). Es muß auch $J'B' \perp K'E'$ (I, 395, 3)). Der Kreis $l'$ ist dann durch seinen Durchmesser $E'F'$ bestimmt; sein Mittelpunkt $O'$ ist die erste Projektion der Axe $a$ des Cylinders $S_1l$.

Die zweite Projektion $l''$ von $l$ ist ein Kegelschnitt, dessen beide Scheitel auf $x''$ die reellen Projektionen der beiden Paare konjugirt imaginärer Spurpunkte der $k$ in $\mathbf{P}_1$ sind, nämlich der unendlich ferne Punkt und $J''$; daher ist $l''$ eine Parabel. Ihr Krümmungshalbmesser $J''J_0$ im Scheitel ist gleich einer Subnormale (z. B. $= F_1F_2$). Die dritte Projektion $l'''$ bestimmt man durch ihre Scheitelpunkte $E'''$, $F'''$, $G'''$, $H'''$, durch allgemeine Punkte $P'''$ und durch die

Punkte, wie $L'''$, auf den Umrissen des Cylinders $S_1 l$. Die Krümmungshalbmesser der $l$ und der $l'''$ stimmen bezw. mit denen der Schnittlinien der Schmiegungsebenen der $l$ mit dem Cylinder $S_1 l$ und ihrer dritten Projektionen überein. Für $G'''$ ist diese Projektion eine Ellipse, welche $G'''$, $G_3$ zu benachbarten Scheiteln ($G'' G_1$ Tangente der $l''$ in $G''$, $G_1$ auf $a''$, $G_1 G_3 G_4 \perp z'''$) und daher $G_0$ zum Krümmungsmittelpunkte in $G'''$ hat ($G_2 G_0 \perp G''' G_3$). Entsprechend wurde $H''' H_0$, $L''' L_0$ bestimmt.

**295.** *Aufg. Von der reellen Schnittlinie $l$ zweier Flächen zweiten Grades* **H**, $\mathbf{H}_1$ *die Imaginärprojektion $m$ aus einem solchen Punkte zu bilden, aus welchen $l$ nur durch einen Teil eines reellen Kegels zweiten Grades projicirt wird.*

Diese Aufgabe ist schon in Nr. 239 gelöst worden. Doch bietet die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe Anlaß auch zur Lösung
Fig. 130. der gegenwärtigen Aufgabe. In Fig. 130 wird die Schnittlinie $l$ der beiden Umdrehungshyperboloide aus $S_2$ durch einen Teil eines parabolischen Cylinders projicirt; es soll nun die Imaginärprojektion $m$ von $l$ aus $S_2$ bestimmt werden.

*Aufl.* Die Imaginärprojektionen der einschaligen Umdrehungshyperboloide **H**, $\mathbf{H}_1$ aus $S_2$ sind die zweischaligen Hyperboloide **I**, $\mathbf{I}_1$ bezw. mit den Scheiteln $A, B$; $C, D$. Ihre Spuren in $\mathbf{P}_1$ sind die gleichseitigen Hyperbeln $i'$, $i_1'$, welche sich in vier reellen Punkten treffen, den unendlich fernen ihrer Asymptoten, und den ideellen Schnittpunkten $J'$, $K'$ der Kreise $c'$, $c_1'$. Die zweite Projektion $m''$ der Schnittlinien beider Flächen ist durch $E''$, $F''$, $G''$, $H''$, durch den unendlich fernen Punkt des $x''$ und durch $J''$ bestimmt; sie ergänzt die Linie $l''$ zu einer vollen Parabel. Die erste Projektion $m'$ ist ein Kegelschnitt, der durch seine Scheitel $E'$, $F'$ und die Punkte $J'$, $K'$ bestimmt ist; er ist also die Imaginärprojektion des Kreises $l'$ aus $S_2'$, d. i. eine gleichseitige Hyperbel. Die dritte Projektion $m'''$ besteht aus drei Ästen, welche in $E'''$, $F'''$, $G'''$, $H'''$ gemeinsame Scheitel und gleiche Krümmungshalbmesser mit $l'''$ besitzen. Der Krümmungshalbmesser in dem auf $y'''$ liegenden Scheitel $J'''$ des endlichen Astes der $m'''$ ist $= J''' J_1 = J'' J_0 : \operatorname{tg} \alpha$, wenn $\alpha$ den Winkel der Tangente $J' T$ der Hyperbel $m'$ in $J'$ mit $x'$ bezeichnet. Ist daher $J' J_2 \parallel x'$ und ist $J_3$ auf $J' T$ so gelegen, daß Abst. $J_3 \cdot J' J_2 = J'' J_0$, so gibt Abst. $J_3 \cdot J' J''$ die Größe des gesuchten Krümmungshalbmesser $J''' J_1$ an. Denn sind, wie in Nr. 290, die bezw. mit $\mathbf{P}_1$ und $z$ parallelen Elemente von $m''$ und $m'''$ bei $J$: $x, y$; $x_1, y_1$, so ist $y_1 = y$ und $x_1 = x \operatorname{tg} \alpha$, da die Schmiegungsebene von $m$ in $J$ die $J' T$ zur ersten Projektion hat; hieraus folgt aber die Angabe.

**296.** *Übungsaufgaben.*

1) Die Imaginärprojektion der imaginären Schnittlinie einer Kugel und eines mit derselben koncentrischen Umdrehungsellipsoides aus dem unendlich fernen Punkte der Umdrehungsaxe des letzteren zu bestimmen.

2) Von einer Kugel und einem Umdrehungscylinder, welcher sie berührt und durch ihren Mittelpunkt geht, die Schnittlinie und deren Imaginärprojektion aus dem unendlich fernen Punkte des Kugeldurchmessers zu ermitteln, welcher auf dem nach dem Berührungspunkte laufenden und auf dem in einer Cylindererzeugenden liegenden Durchmesser senkrecht steht. Diese Durchmesser mögen der Reihe nach die Axen $y$, $x$, $z$ bilden*).

## VII. Bestimmung einer Fläche zweiten Grades durch neun Punkte. Büschel und Schaaren von Flächen zweiten Grades.

**297.** Für das Folgende bedürfen wir einiger *Sätze über die Projektivität zwischen involutorischen und einfachen Gebilden***). Es genügt dabei, die Punktreihe auf dem Kegelschnitte zu betrachten, da dieselbe projektiv ist mit einem Strahlen- oder Ebenenbüschel, dessen Schnitt sie ist, wenn der Kegelschnitt durch den Mittelpunkt bezw. die Axe des Büschels geht, oder mit einer geraden Punktreihe, deren Projektion aus einem Punkte des Kegelschnittes sie bildet.

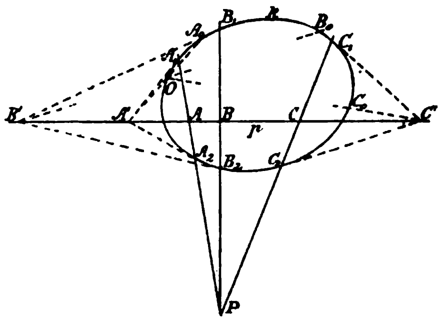
1) *Begriff. Eine auf einem Kegelschnitte $k$ liegende involutorische Punktreihe soll projektiv zu demjenigen (einfachen) Strahlenbüschel heißen, dessen Strahlen je durch die beiden Punkte eines Paares der Involution gehen; dabei soll jeder Strahl dem auf ihm liegenden Punktepaare und auch jedem Punkte dieses Paares entsprechend genannt werden.* Sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ die Punktepaare, so gehen die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ durch einen und denselben Punkt $P$, den Pol der Involution (I, 346), Fig. 131.

*) Von der Imaginärprojektion der Flächen zweiten Grades und der Schnittlinie zweier solchen Flächen machte der Verfasser Mitteilung in der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Straßburg am 19. September 1885 (Tageblatt dieser Versammlung, S. 354) und zeigte dabei ein Modell zu der obigen Aufgabe vor, in welchem die Erzeugenden der vorkommenden Regelflächen, zweier Cylinder und eines einschaligen Hyperboloides durch Fäden, Parallelkreise der Kugel durch Drähte und die Schnittkurven durch einen über die Flächen gespannten stärkeren Faden dargestellt waren.

**) Die ein- und zweideutige Beziehung wurde aufgestellt von *Chasles* in „Principe de correspondance entre deux objets variables" (Comptes rendus, B. 41, 1855, S. 1097) und weiter ausgebildet von Herrn *Weyr* in seinem Buche „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde der algebraischen Kurven und Flächen, als deren Erzeugnisse, 1869".

und es heißt dann $A_1A_2$, $B_1B_2$ ... projektiv zu $P(A_1B_1 \ldots)$ oder zu $P(A_2B_2 \ldots)$ oder zu $P(AB \ldots)$, wobei $A$, $B$ ... bezw. die Schnittpunkte von $A_1A_2$, $B_1B_2$ ... mit der Axe $p$ der Involution seien. Die Schnittpunkte von $k$ mit $p$ sind die Doppelpunkte der Involution auf $k$, und diesen entsprechen die Tangenten aus $P$ an $k$, die s. g. *Verzweigungselemente* des Strahlenbüschels $P$. Diese teilen das Büschel in zwei Winkel; den Strahlen im einen Winkel entsprechen in der Involution reelle Punktepaare, denen im anderen Winkel imaginäre. Ist $P$ ein innerer Punkt von $k$, so sind die Doppelpunkte der Involution, sowie die Verzweigungsstrahlen imaginär; es entsprechen dann allen Strahlen reelle Punktepaare. — *Rückt P in k*, so fallen die einen Elemente aller Punktepaare auf $k$ in $P$ zusammen, während die anderen eine dem Strahlenbüschel $P$ *projektive einfache Punktreihe* bilden; die Verzweigungselemente des Strahlenbüschels sind in die Tangente des $k$ in $P$ zusammengefallen. Dann entspricht der Punkt $P$ des $k$ jedem Strahle aus $P$, und außerdem jeder Punkt des $k$ einem bestimmten Strahle aus $P$ in gewöhnlicher Projektivität.

Fig. 131.



Ein einfaches und ein damit projektives involutorisches Grundgebilde heißen auch *ein-zweideutig verwandt oder ein-zweideutige Gebilde*, weil jedem Elemente des einfachen zwei des involutorischen, und jedem Elemente des involutorischen eines des einfachen entsprechen.

Ferner sollen *zwei Involutionen unter einander projektiv* heißen, wenn diejenigen einfachen Grundgebilde unter einander projektiv sind, mit deren jedem je eine der Involutionen projektiv ist. Dabei kann ein reelles oder ein imaginäres Elementenpaar der einen Involution sowohl einem reellen, wie einem imaginären der anderen entsprechen. — Sie heißen auch *zwei-zweideutig verwandt.*

2) *Satz. Eine Involution von Elementenpaaren ist projektiv mit dem Gebilde der einfachen Elemente, deren jedes von einem festen Elemente durch die zwei Elemente je eines Paares harmonisch getrennt wird.* Ist $O$ das feste Element, also hier ein Punkt auf $k$, und ist $A_0$ von $O$ durch $A_1$ und $A_2$ harmonisch getrennt, ebenso $B_0$ von $O$ durch $B_1$ und $B_2$, u. s. w., so gilt

$$(A_0B_0 \ldots) = P(AB \ldots).$$

Denn ist $A'$ der (auf $p$ liegende) Schnittpunkt der Tangenten von $k$ in $A_1$ und $A_2$, so erhält man $A_0$ als zweiten Schnittpunkt der $OA'$ mit $k$, weil $A_1 A_2 O A_0$ die Projektion der vier harmonischen Punkte $(A_1 A_2) A' O A_0$ aus $A_2$ auf $k$ ist. Daher projicirt sich $A'B' \ldots$ aus $O$ in $A_0 B_0 \ldots$, und es ist $(A'B' \ldots) = (A_0 B_0 \ldots)$; da außerdem $(A'B' \ldots) = (AB \ldots)$ (I, 343), so folgt

$$\text{Inv.}\,(A_1 A_2,\ B_1 B_2 \ldots)\ \text{proj.}\ P(AB \ldots) = (A_0 B_0 \ldots).$$

3) *Die projektive Beziehung eines involutorischen zu einem einfachen Gebilde ist durch drei Elementenpaare des involutorischen und die drei entsprechenden Elemente des einfachen Gebildes bestimmt.* Denn durch diese Elemente ist die projektive Beziehung des Strahlenbüschels $P$ zur Punktreihe $p$ (Fig. 131) gegeben. Dabei können zwei Paare und ein Element des dritten Paares (I, 297) und die drei Elemente des einfachen Gebildes willkürlich angenommen werden.

*Allgemeiner ist die Beziehung eines involutorischen zu einem damit projektiven einfachen Gebilde durch fünf willkürlich anzunehmende Paare entsprechender einfacher Elemente beider Gebilde gegeben*, wie durch $ABCDE$, $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Dann muß $P(A_1 B_1 C_1 D_1 E_1) = ABCDE$ sein, und daher wird $P$ bestimmt als der vierte Schnittpunkt eines durch $A_1 B_1 C_1 D_1$ gelegten Kegelschnittes $k$, aus dessen Punkten diese vier Punkte durch Strahlenbüschel vom Doppelverhältnisse $(ABCD)$ projicirt werden, und eines durch $A_1 B_1 C_1 E_1$ mit dem Doppelverhältnis $(ABCE)$ gelegten Kegelschnittes $l$. Dazu ist aber die Verzeichnung keines der Kegelschnitte $k$ oder $l$ notwendig. Denn sind $A_1 K$ und $A_1 L$ die Tangenten in $A_1$ bezw. von $k$ und $l$, welche man vermittelst $A_1(K B_1 C_1 D_1) = ABCD$ und $A_1(L B_1 C_1 E_1) = ABCE$ erhält, und schneiden die Strahlen $A_1 K$, $A_1 D_1$ den Kegelschnitt $l$ in den vermittelst $B_1(A_1 C_1 E_1 K' D') = A_1(L C_1 E_1 K D_1)$ zu konstruirenden Punkten $K'$, $D'$, so ist wegen $k$: $A_1(K C_1 D_1) = B_1(A_1 C_1 D_1)$, und wegen $l$: $A_1(K C_1 D_1) = B_1(K' C_1 D')$, daher auch $B_1(A_1 C_1 D_1) = B_1(K' C_1 D')$. Diese koncentrischen und projektiven Strahlenbüschel haben $B_1 C_1$ und $B_1 P$ zu Doppelstrahlen, wovon man den zweiten erhält, wenn man die Büschel durch zwei aus einem Punkte $C''$ der $B_1 C_1$ gezogenen Geraden bezw. in den (perspektiven) Punktreihen $A'' C'' D''$, $A''' C'' D'''$ schneidet, und dann $B_1 P$ durch den gemeinsamen Punkt von $A'' A'''$ und $D'' D'''$ zieht. Dem Strahle $B_1 P$ entspricht in $k$ und $l$ derselbe Strahl aus $A_1$, der den $B_1 P$ in $P$ trifft.

Ein involutorisches und ein damit projektives einfaches oder involutorisches Gebilde, welche sich nicht auf demselben Träger befinden, sollen *perspektiv* heißen, wenn ein (einfaches) Element des einen in einem entsprechenden (einfachen) des anderen liegt.

4) *Satz und Aufg. Eine involutorische und eine mit derselben projektive einfache Punktreihe eines Kegelschnittes haben dreimal zwei entsprechende Punkte gemein, oder sie besitzen drei Doppelpunkte. Es sollen dieselben bestimmt werden.*

*Beweis und Aufl.* Bestimmt man von der auf dem Kegelschnitte $k$ liegenden Involution den Mittelpunkt $P$ (s. Fig. 131), projicirt aus $P$ die involutorische Reihe doppelt, und sodann aus irgend einem Punkte $D$ des $k$ die einfache Punktreihe, so sind die Strahlenbüschel $P$ und $D$ projektiv und bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt $k'$, welcher durch $D$ und $P$ geht. Die außer $D$ bestehenden drei gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte $k$ und $k'$ sind die Doppelpunkte beider Reihen auf $k$. *Es können daher zwei der Doppelpunkte imaginär sein;* sie sind dann durch die auf der zweiten gemeinschaftlichen Sehne beider Kegelschnitte liegende (gemeinschaftliche) Punktinvolution derselben gegeben.

*Derselbe Satz gilt von zwei ein-zweideutigen geraden Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln, welche je auf demselben Träger liegen.*

5) *Satz. Alle einfachen und alle involutorischen Punktreihen, welche ein Kegelschnittbüschel bezw. auf Geraden g einschneidet, die durch einen der Grundpunkte gehen, sowie auf Geraden h, die durch keinen solchen gehen, sind unter einander projektiv, und je zwei derselben sind perspektiv.*

Die Projektivität der $g$ unter einander wurde in I, 396 bewiesen. In Bezug auf die Involutionen auf zwei Geraden $h$ nehme man deren Schnittpunkt $O$ als festen Punkt an; man erhält dann die von $O$ durch die Punkte je eines Paares getrennten Punkte auf beiden Geraden $h$ zugleich als Schnittpunkte mit den Polaren des $O$ zu den einzelnen Kegelschnitten. Da die Polaren ein Strahlenbüschel bilden (I, 397), so sind die von ihnen eingeschnittenen Punktreihen und damit die Involutionen unter einander projektiv. In Bezug auf eine Punktreihe $g$ und eine Involution $h$ beachte man, daß wenn $O$ der Schnittpunkt von $g$ und $h$, wieder die Punktreihe, welche die Kegelschnitte, und die Punktreihe, welche die Polaren von $O$ zu diesen Kegelschnitten auf $g$ erzeugen, also auch das Büschel der Polaren und die Involution unter einander projektiv sind (denn jene Reihen auf $g$ sind in I, 397, 1) und 2) die der $H$ und der $Q$). In allen diesen Fällen sind je zwei Reihen oder Involutionen perspektiv, weil durch den Schnittpunkt ihrer Träger nur ein Kegelschnitt des Büschels geht, also der Schnittpunkt auf beiden Geraden sich selbst entspricht.

6) *Satz. Alle Kegelschnitte, welche durch die zwei Punkte je eines Paares einer auf einer Geraden g befindlichen Punktinvolution und*

*durch drei feste Punkte gelegt werden, gehen auch durch einen vierten festen Punkt P und bilden daher ein Kegelschnittbüschel.* Denn zwei solche Kegelschnitte treffen sich noch in einem vierten Punkte $P$ und bestimmen ein Kegelschnittbüschel; dieses schneidet auf $g$ eine Involution ein, welche mit der gegebenen zusammenfällt, da sie mit ihr die durch die zwei ersten Kegelschnitte eingeschnittenen Punktepaare gemein hat; hieraus folgt unser Satz.

7) *Satz. Sind in einer Ebene auf zwei Geraden zwei unter einander projektive und perspektive Punktinvolutionen gegeben, so gehen alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte je zweier entsprechenden Paare und durch einen festen Punkt P gelegt werden, auch durch drei weitere feste Punkte, und bilden daher ein Kegelschnittbüschel.* Denn legt man zwei Kegelschnitte je durch die vier Punkte zweier entsprechenden Paare, die den Schnittpunkt $O$ beider Geraden nicht enthalten, und durch $P$, so haben diese außer $P$ noch drei Punkte gemein (von denen zwei konjugirt imaginär sein können). Das Kegelschnittbüschel mit diesen vier Grundpunkten schneidet beide Gerade in projektiven und perspektiven Involutionen, welche mit den gegebenen zusammenfallen, weil sie mit diesen die Elemente je zweier entsprechenden Paare und je einen Punkt (nämlich $O$) zweier dritten entsprechenden Paare gemein haben (s. 3)); hieraus folgt wieder der Satz.

8) *Satz. Befinden sich in einer Ebene auf den Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC Punktinvolutionen, welche zu zweien projektiv und perspektiv sind, und welche auf zwei Seiten (a, b) vollständig durch drei entsprechende Paare, auf der dritten (c) unvollständig durch zwei der entsprechenden Paare von Punkten, die auf jeder Seite die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks in sich schließen und sonst willkürlich angenommen werden können, bestimmt sind, so kann man auf der dritten Seite c als drittes entsprechendes Punktepaar ein solches angeben, daß durch die sechs Punkte dreier entsprechenden Paare ein Kegelschnitt gelegt werden kann, und daß alle diese Kegelschnitte durch vier feste Punkte gehen und daher ein Büschel bilden.* Nimmt man nämlich auf der Seite $a$ die seinen Eckpunkten $B$ und $C$ zugeordneten Punkte $B_a$, $C_a$ willkürlich an, ebenso auf $b$ die Punkte $C_b$, $A_b$, und auf $c$ die $A_c$, $B_c$, endlich auf $a$ und $b$ willkürlich zwei Punkte $A_1$ und $B_1$ zweier dritten sich entsprechenden Paare, deren zugeordnete $A_2$, $B_2$ dann konstruirt werden können, so ist alles Andere dadurch bestimmt. Denn legt man zwei Kegelschnitte bezw. durch die fünf Punkte $AA_bA_cA_1A_2$ und $BB_cB_aB_1B_2$, so schneiden sich dieselben in vier Punkten; und legt man durch diese und durch $C$ einen Kegelschnitt, so geht derselbe durch die dem $C$ auf $a$ und $b$ zugeordneten Punkte $C_a$, $C_b$ der gegebenen Involutionen (5)) und schneidet die $c$

in den Punkten $C_1$, $C_2$ desjenigen Paares, welches den Paaren $C, C_a$; $C, C_b$ entspricht. Die entsprechenden Punktepaare der drei Involutionen sind dann

$$\begin{array}{llll} \text{auf } a: & A_1 A_2, & B\,B_a, & C\,C_a, \\ \text{auf } b: & A\,A_b, & B_1 B_2, & C\,C_b, \\ \text{auf } c: & A\,A_c, & B\,B_c, & C_1 C_2. \end{array}$$

Der letzte Teil des Satzes folgt aus 7).

**298.** Da die beiden folgenden *Sätze und Aufgaben* durch dieselbe Konstruktion bezw. bewiesen und gelöst werden, so sollen sie zusammen betrachtet werden.

*Satz* 1). *Durch acht von einander unabhängig im Raume gegebene Punkte geht eine einzige Kurve vierter Ordnung k, und durch diese können unendlich viele Flächen zweiten Grades gelegt werden.*

Legt man in einer alsbald anzugebenden Weise durch sieben Punkte drei Flächen zweiten Grades $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, von den mehrfach unendlich vielen, die durch sie gelegt werden können, so schneiden sich je zwei derselben in einer Raumkurve vierter Ordnung, und diese drei Kurven $k_1$, $k_2$, $k_3$ müssen noch einen achten Punkt gemein haben, nämlich einen weiteren Schnittpunkt der Schnittlinie $k_1$ von $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ mit $\mathbf{F}_1$. Da nämlich jede $k$ eine geschlossene Kurve ist oder aus zwei geschlossenen Ästen besteht, so muß die Anzahl der Schnittpunkte der ganzen Kurve (sowie eines jeden in sich geschlossenen Astes) mit einer $\mathbf{F}$ eine gerade sein, weil man auf $k$ hinschreitend zum Ausgangspunkte nur zurückkehren kann, nachdem man die Fläche $\mathbf{F}$ vom zweiten Grade eine gerade Anzahl mal durchschritten hat. Daher muß noch ein achter Schnittpunkt bestehen; derselbe ist von den sieben anderen abhängig, darf also keiner der acht unabhängig zu wählenden Punkte sein. Es sei nebenbei bemerkt, daß nicht nur jene drei, sondern alle durch dieselben sieben Punkte gelegten Flächen zweiten Grades durch denselben achten Punkt gehen.

*Satz* 2). *Durch neun von einander unabhängig im Raume gegebene Punkte geht eine einzige Fläche zweiten Grades* $\mathbf{F}$.

Wenn dagegen die Punkte derart von einander abhängen, daß der eine derselben auf der durch die übrigen acht bestimmten Kurve vierter Ordnung liegt, gehen unendlich viele $\mathbf{F}$ durch die neun Punkte.

Eine Regelfläche zweiten Grades fanden wir durch drei Leitgerade, welche mit je drei Punkten und dann ganz auf der Fläche lagen, also durch $3 . 3 = 9$ Punkte bestimmt; ebenso jede Fläche zweiten Grades durch einen Kegelschnitt $p$ (= 5 Punkten), durch die Berührungsebenen der Fläche in drei Punkten des $p$, indem deren gemeinsamer Punkt $P$ der Pol der Ebene von $p$ war (also drei weitere

Punkte), und noch einen letzten Punkt, d. i. durch $5+3+1=9$ Punkte.

*Aufgaben. Durch acht unabhängig von einander gegebene Punkte eine Raumkurve vierter Ordnung und durch neun solche Punkte eine Fläche zweiten Grades zu legen*).*

*Bew. und Aufl.* Die neun gegebenen Punkte teile man in drei Gruppen von je drei Punkten

$$A_1 A_2 A_3, \qquad B_1 B_2 B_3, \qquad C_1 C_2 C_3,$$

lege durch die Punkte je einer Gruppe eine Ebene, also die drei

$$\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B}, \qquad \mathbf{C},$$

und bilde die Schnittlinien dieser Ebenen

$$a = \mathbf{BC}, \qquad b = \mathbf{CA}, \qquad c = \mathbf{AB},$$

deren gemeinschaftlicher Punkt $O$ sei. Geht nun eine Fläche zweiten Grades durch die neun gegebenen Punkte, so schneidet sie jede der Ebenen in einem durch drei der Punkte gehenden Kegelschnitte, und je zwei der Kegelschnitte treffen die Schnittgerade ihrer Ebenen in denselben beiden Punkten. Wenn umgekehrt drei Kegelschnitte je durch die drei Punkte einer Gruppe gehen und sich paarweise in zwei Punkten einer jener Geraden treffen, so geht durch sie, also auch durch die neun Punkte, eine Fläche zweiten Grades (87), und zwar nur eine, wenn solche Kegelschnitte nur auf eine Art gelegt werden können.

Nimmt man auf einer der Geraden, etwa auf $a$, willkürlich einen Punkt $P$ an, und legt in der Ebene $\mathbf{C}$ durch die vier Punkte $C_1$, $C_2$, $C_3$, $P$ als Grundpunkte ein Kegelschnittbüschel, so schneidet dieses auf $a$ eine Reihe veränderlicher Punkte $X$ und auf $b$ eine mit dieser Reihe projektive und perspektive Involution veränderlicher Punktepaare $Y$, $Y'$ ein (297, 5)). Legt man sodann in der Ebene $\mathbf{A}$ durch die drei festen Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ und durch die Punkte $Y$, $Y'$ eines jeden Paares der Involution einen Kegelschnitt, so bilden diese Kegelschnitte ein Büschel mit einem vierten Grundpunkte (297, 6)), und dieses Büschel schneidet auf der Geraden $c$ eine Involution von Punktepaaren $ZZ'$ ein, welche mit derjenigen $YY'$ auf $b$ projektiv und perspektiv ist. Daher ist auch in der Ebene $\mathbf{B}$ die Involution der $ZZ'$ auf $c$ mit der Reihe der $X$ auf $a$ projek-

*) Die hier gegebene Auflösung ist im wesentlichen die von *Chasles* gelieferte und auf das Korrespondenzprincip gegründete (Principe de correspondance entre deux objets variables; Comptes rendus, B. 41, 1855, S. 1097). Damit stimmt auch die von *Steiner* aus dem Jahre 1836 herrührende, aber erst von Herrn Geiser 1867 veröffentlichte Lösung in den Grundzügen überein (Borchardts Journ. f. r. u. ang. Math., B. 68, S. 191).

tiv, und auch perspektiv, weil bei diesen Reihen der Punkt $O$ stets sich selbst entspricht. Legt man nun durch zwei der drei Punkte $B_1$, $B_2$, $B_3$, etwa durch $B_1$, $B_2$, sowie durch $P$ (auf $a$) und durch die zwei Punkte $Z$, $Z'$ je eines Paares einen Kegelschnitt, so bilden alle diese ein Büschel, welches außer $B_1$, $B_2$, $P$ noch einen vierten Grundpunkt besitzt und auf der $a$ eine mit der Involution der $ZZ'$, also auch mit der Reihe der $X$ projektive Reihe von Punkten $X'$ einschneidet. Die Reihen $X$ und $X'$ der $a$ haben außer $O$ noch einen zweiten Doppelpunkt $P'$, welcher leicht linear bestimmt werden kann*). Legt man nun den Kegelschnitt $C_1 C_2 C_3 P P'$, durch dessen Schnittpunkte $Y$, $Y'$ mit $b$ und durch $A_1$, $A_2$, $A_3$ einen zweiten Kegelschnitt, durch dessen Schnittpunkte $Z$, $Z'$ mit $c$ und durch $B_1$, $B_2$, $P$ einen dritten Kegelschnitt, so läuft derselbe auch durch $P'$. Durch diese drei Kegelschnitte geht eine Fläche zweiten Grades, welche daher acht von den neun gegebenen Punkten ($B_3$ nicht) und den Punkt $P$ enthält. Legt man auf gleiche Weise durch dieselben acht der gegebenen Punkte und durch einen anderen Punkt $P_1$ der Geraden $a$ eine Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}_1$, welche die $a$ noch in $P_1'$ treffe, so schneiden $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ die Ebene $\mathbf{A}$ in zwei Kegelschnitten, welche die Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ und außerdem einen vierten Punkt $A_0$ gemein haben, die $\mathbf{C}$ in zweien, welche $C_1$, $C_2$, $C_3$ und $C_0$, die $\mathbf{B}$ in zweien, welche $B_1$, $B_2$ und außerdem $B_0$, $B_0'$ gemein haben. Diese vier Schnittpunkte in jeder der Ebenen sind die Grundpunkte je eines Kegelschnittbüschels, und jedes derselben schneidet auf zweien der Geraden $a$, $b$, $c$ zwei unter einander projektive und perspektive Punktinvolutionen ein (297, 5)). Die beiden auf jeder der Geraden liegende fallen aber zusammen, weil sie durch dieselben beiden durch $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ eingeschnittenen Punktepaare bestimmt sind. Da nun vermöge des in jedem Büschel durch den gemeinsamen Punkt $Q$ von $a$, $b$, $c$ gelegten Kegelschnittes in allen diesen Involutionen $O$ sich selbst entspricht, so ist die Projektivität der Involutionen auf $a$, $b$, $c$ durch je zwei Paare und ein Element $O$ eines dritten Paares bestimmt. Gibt man daher irgend drei entsprechende Punktepaare auf den Involutionen $a$, $b$, $c$ an, so geht durch je zwei dieser Paare ein Kegelschnitt eines der drei Büschel,

*) Wohl am einfachsten auf folgende Weise. Sind $MAB$, $MA_1B_1$ zwei auf einer Geraden $g$ vereinigte projektive Punktreihen, mit dem Doppelpunkte $M$, so lege man durch $M$ eine von $g$ abweichende Gerade, wähle auf derselben zwei beliebige Punkte $P$, $Q$, schneide $PA$ mit $QB$ in $C$, $PA_1$ mit $QB_1$ in $C_1$, dann trifft die $CC_1$ die $g$ in dem zweiten Doppelpunkte $N$. Denn schneidet $CC_1$ die $MPQ$ in $R$, so ist bezw. wegen der Projektionen aus $C$ und $C_1$, $ABMN = PQMR = A_1B_1MN$.

und durch diese drei Kegelschnitte geht eine Fläche zweiten Grades. Man kann daher durch die acht Punkte (die neun gegebenen außer $B_3$) unendlich viele Flächen zweiten Grades legen, und eine derselben enthält den durch $B_3$ gehenden Kegelschnitt des Büschels $B_1 B_2 B_0 B_0'$, so daß durch die neun gegebenen Punkte nur eine Fläche zweiten Grades geht.

Die Flächen **F** und $\mathbf{F}_1$ schneiden sich in einer Raumkurve vierter Ordnung $k$, welche die Ebenen **A**, **B**, **C** bezw. in den Grundpunkten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_0$; $B_1$, $B_2$, $B_0$, $B_0'$; $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_0$ trifft. Durch diese Punkte gehen alle durch die acht der gegebenen Punkte gehenden Flächen zweiten Grades; denn sie schneiden die Ebenen je in einem Kegelschnittbüschel mit diesen Grundpunkten. Jede dieser Flächen enthält aber die ganze Kurve $k$; denn jede Ebene **E** schneidet die Gesammtheit der Flächen in einem Kegelschnittbüschel, und die vier Grundpunkte desselben sind die den Flächen gemeinsamen Punkte der $k$. Es schneidet nämlich **E** die Ebenen **A**, **B**, **C** bezw. in den Geraden $a_1$, $b_1$, $c_1$, und die Kegelschnittbüschel dieser Ebenen in Involutionen auf den Geraden; diese sind zu zwei, so $b_1$ und $c_1$, projektiv und perspektiv, weil jede derselben mit der Involution auf $a$ projektiv ist (297, 5)), und weil der gemeinschaftliche Punkt von $b_1$, $c_1$, $a$ sich selbst entspricht. Die Kegelschnitte, in welchen **E** alle durch die acht gegebenen Punkte gehenden Flächen zweiten Grades trifft, gehen nun durch die Punkte der drei entsprechenden Paare der Involutionen $a_1$, $b_1$, $c_1$, bilden daher ein Büschel, dessen vier Grundpunkte die Schnittpunkte der **E** mit $k$ sind und allen den Flächen angehören (297, 8)).

**299.** *Die Gesamtheit der einfach unendlich vielen Flächen zweiten Grades, welche durch eine Raumkurve vierter Ordnung k gehen, heißt ein Flächenbüschel zweiten Grades und k dessen Grundkurve. Durch jeden außerhalb k liegenden Punkt geht eine der Flächen.* Unter diesen Flächen befinden sich *vier Kegel zweiten Grades*, deren Spitzen in den Eckpunkten des *gemeinschaftlichen Polartetraeders aller Flächen des Büschels* liegen (278). Die Kegel bilden den *Übergang von Regelflächen in Nichtregelflächen des Büschels,* indem sich ihnen einerseits einschalige, andererseits zweischalige Hyperboloide anschließen. Sind alle Kegel imaginär, so sind alle Flächen Regelflächen (282, 4)).

*Jede Gerade g, welche durch keinen Punkt der Grundkurve geht, schneidet das Flächenbüschel in einer Involution, wenn die beiden Punkte derselben Fläche einander zugeordnet sind.* Denn eine durch $g$ gelegte Ebene schneidet das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, und dieses erzeugt die genannte Involution.

*Die Reihen der Schnittpunkte der Flächen des Büschels mit Ge-*

*raden $g$, welche durch einen Punkt der Grundkurve gehen, sowie die Büschel der Berührungsebenen dieser Flächen in einem Punkte $P$ der Grundkurve sind unter einander projektiv, wenn die Punkte und Berührungsebenen derselben Fläche einander entsprechen.* Man nennt auch das *Flächenbüschel* mit diesen Punktreihen und Ebenenbüscheln *projektiv.* Für zwei Büschel von Berührungsebenen in den Punkten $P$ und $P_1$ der $k$ folgt der Satz aus dem entsprechenden Satze für das Kegelschnittbüschel (I, 396), in welchem eine durch $P$ und $P_1$ gelegte Ebene das Flächenbüschel schneidet; für ein Büschel $P$ und eine Punktreihe $g$ folgt er vermittelst einer durch $P$ und $g$ gelegten Ebene, und für zwei Punktreihen $g$ und $g_1$ vermittelst zweier Ebenen, welche durch einen Hilfspunkt $P$ der $k$ und durch $g$, bezw. durch $P$ und $g_1$ gelegt werden.

Man findet daher *Punkte $Q$ einer durch die (reelle oder imaginäre) Schnittkurve $k$ zweier gegebenen Flächen zweiten Grades* $\mathbf{F}$ *und* $\mathbf{F}_1$ *und durch einen Punkt $P$ gegebenen Fläche zweiten Grades* $\mathbf{F}_2$, indem man Gerade durch $P$ legt, jede mit $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ in einem Punktepaare schneidet, und in der durch diese zwei Paare bestimmten Involution den zugeordneten Punkt $Q$ zu $P$ sucht.

Von den *polaren Eigenschaften der Büschel von Flächen zweiten Grades* wollen wir nur einen anführen: *Die Polarebenen eines Punktes $P$ zu den Flächen eines Büschels zweiten Grades bilden ein mit dem Flächenbüschel projektives Ebenenbüschel.* Die Polarebenen von $P$ zu zweien der Flächen schneiden sich in einer Geraden $g$. Eine durch $P$ gelegte Ebene schneidet das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, und schneidet die Polarebenen von $P$ zu den Flächen in den Polarlinien von $P$ zu den Kegelschnitten der Flächen. Da aber alle Polarlinien durch ein und denselben Punkt gehen (I, 397), und dieser auf $g$ liegt, und da das Büschel der Polaren mit dem Büschel der Kegelschnitte projektiv ist (weil die Punktreihen der $Q$ und der $H$ in dem Beweise von I, 397, 1) 2) projektiv sind), so gehen alle Polarebenen durch jeden Punkt der $g$ und bilden ein mit dem Flächenbüschel projektives Ebenenbüschel.

Es kann noch der *Satz* ausgesprochen werden: *drei Flächen zweiten Grades haben acht Punkte* (298, 1)), *die paarweise konjugirt imaginär sein können, oder eine Raumkurve vierter Ordnung gemein.*

**300.** Zu den Sätzen über die Schnittlinie von Flächen zweiten Grades und über die Büschel solcher Flächen können wir nach dem *Gesetze der Reciprocität* (103) neue Sätze bilden, von denen wir aber nur einige anführen wollen.

Einer Fläche zweiter Ordnung, welche aus Punkten besteht, entspricht reciprok eine Fläche zweiter Klasse, welche aus ihren

Berührungsebenen gebildet ist; oder einer Fläche zweiten Grades entspricht wieder eine Fläche zweiten Grades (74). Den gemeinsamen Punkten und der von ihnen gebildeten Schnittkurve $k$ zweier Flächen zweiten Grades **F** und $\mathbf{F}_1$, welche von jeder Ebene in vier Punkten getroffen wird, also von der vierten Ordnung ist, entsprechen reciprok die gemeinsamen Berührungsebenen zweier Flächen zweiten Grades **F** und $\mathbf{F}_1$, und die sie *einhüllende abwickelbare Fläche* **K**, von deren Ebenen vier durch jeden Punkt gehen, die also von der *vierten Klasse* ist. Dem gemeinsamen Polartetraeder von **F** und $\mathbf{F}_1$ entspricht wieder ein solches. Den vier Kegeln zweiten Grades, welche die Schnittkurve $k$ von **F** und $\mathbf{F}_1$ aus den Eckpunkten des gemeinsamen Polartetraeders doppelt projiciren, entsprechen *vier Kegelschnitte in den Flächen des neuen Polartetraeders*, durch deren Tangenten je zwei Ebenen der abwickelbaren Fläche **K** gehen, oder welche eine *Doppelkurve* der **K** ist. Den Tangenten der $k$ entsprechen die geradlinigen Erzeugenden der **K**; der Doppelkurve vierter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte je zweier Tangenten der $k$ in jeder Fläche jenes Tetraeders gebildet wird, entspricht reciprok *ein Kegel vierter Klasse*, welcher durch die Ebenen je zweier Erzeugenden der Fläche **K** gebildet wird, und *deren Spitzen in den Ecken jenes Tetraeders liegen.*

Dem Büschel von Flächen zweiten Grades entspricht reciprok eine *Schaar von Flächen zweiten Grades; dieselbe besteht aus der Gesamtheit der einfach unendlich vielen Flächen zweiten Grades, welche von einer abwickelbaren Fläche vierter Klasse eingehüllt werden. Diese Fläche ist durch acht von einander unabhängig angenommene Ebenen bestimmt. Jede die abwickelbare Fläche nicht berührende Ebene wird von einer Fläche der Schaar berührt; oder eine Fläche zweiten Grades ist durch neun von einander unabhängig angenommene Ebenen, welche sie berührt, bestimmt.*

Endlich: *Drei Flächen zweiten Grades haben acht berührende Ebenen, die paarweise konjugirt imaginär sein können, oder eine einhüllende abwickelbare Fläche vierter Klasse gemein.*

# VII. Abschnitt.

## Die Beleuchtung der Flächen zweiten Grades.

**301.** Um auf einer Fläche zweiten Grades **F** eine Lichtgleiche von gegebener Lichtstärke zu bestimmen, lege man aus dem Mittelpunkte $M$ der **F** den Tangentialkegel von dieser Lichtstärke (193), führe parallel zu jeder seiner Berührungsebenen zwei Berührungsebenen an die **F**, so bilden deren Berührungspunkte die Lichtgleiche. Diese Punkte findet man auf den zu den Berührungsebenen des Tangentialkegels in Bezug auf **F** konjugirten Durchmessern, und eine solche Ebene und ihr konjugirter Durchmesser schneiden die Polarebene von $M$ zu **F**, d. i. die unendlich ferne Ebene in einer Geraden und einem Punkte, welche Polare und Pol in Bezug auf den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche sind; oder auch die Durchmesserebene und der konjugirte Durchmesser sind Polarebene und Polare in Bezug auf den (reellen oder imaginären) Kegel, welcher den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche aus $M$ projicirt. Der Kegel jener Durchmesser projicirt aber eine Lichtgleiche und mag daher *Lichtgleichenkegel* heißen. Es ergibt sich daraus, daß die unendlich ferne Kurve des Lichtgleichenkegels die reciproke Figur zu dem unendlich fernen Kegelschnitte des Tangentialkegels in Bezug auf den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche **F** ist, oder daß ein Lichtgleichenkegel die reciproke Fläche zu dem Tangentialkegel in Bezug auf den (reellen oder imaginären) Kegel ist, welcher den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche aus $M$ projicirt.

*Daher ist für eine Fläche vom zweiten Grade der Lichtgleichenkegel ebenfalls vom zweiten Grade, und sein Schnitt mit der Fläche, oder deren Lichtgleiche eine Kurve von der vierten Ordnung.*

Die Gesamtheit jener Kegel wollen wir das *Büschel der Lichtgleichenkegel* nennen; seine *Axe* ist der zu einer Geraden gewordene Kegel, welcher den Punkt $P$ von der Helligkeit 1. enthält.

Ist die Fläche eine *Kugel*, so bilden die Lichtgleichenkegel das *Büschel der Normalkegel*; seine Axe ist der Lichtstrahl, und derselbe enthält den Punkt $P_1$ der Kugel von der Helligkeit 1.

*Das Büschel der Lichtgleichenkegel $K$ einer Fläche zweiten Grades* **F** *ist kollinear mit dem Büschel der Normalkegel $K_1$.* Denn sie sind die reciproken Gebilde des Tangentialbüschels einmal in Bezug auf die Fläche, das anderemal in Bezug auf die Kugel. Dabei ist irgend ein Strahlenbüschel des $K$ reciprok und daher projektiv zu einem gewissen Ebenenbüschel des Tangentialbüschels; diesem entspricht ein Strahlenbüschel des $K_1$, welches mit ihm und daher auch mit dem Strahlenbüschel des $K$ projektiv ist und ihm entsprechend heißen soll. Wenn aber in zwei Strahlenbündeln, von welchen die Kegelbüschel Teile sind, jedem Strahlenbüschel des einen ein mit ihm projektives Strahlenbüschel des anderen entspricht, so sind sie kollinear, und ihre kollineare Beziehung ist durch vier Paare entsprechender Strahlen bestimmt. Denn sind in zwei Strahlenbündeln vier Paare entsprechender Strahlen gegeben, deren drei in jedem Bündel nicht in derselben Ebene liegen, so ist durch das erste auch das zweite ganz bestimmt, sowohl wenn jedem Strahlenbüschel des einen ein damit projektives des anderen entsprechen soll, als auch wenn das eine mit dem anderen kollinear sein soll (wie in I, 309 für ebene Systeme gezeigt ist). In dem letzteren Falle sind aber ebenfalls alle entsprechenden Strahlenbüschel projektiv, und daher fällt das zweite projektive mit dem zweiten kollinearen Bündel zusammen.

**302.** Aus dieser kollinearen Beziehung des Büschels $K$ der Lichtgleichenkegel einer Fläche zweiten Grades **F** zum Büschel $K_1$ der Normalkegel folgt:

1) Der mit dem Lichtstrahle $l$ parallelen Axe $MP_1$ des $K_1$ entspricht die Axe $MP$ des $K$, welche zu der auf $l$ senkrechten Ebene in Bezug auf **F** konjugirt ist. Der Kegel von $K$, welcher die Grenzlichtgleiche „Null“ bestimmt, ist die zu $l$ in Bezug auf **F** konjugirte Durchmesserebene, die *Nullebene.*

2) Da die *Axe $NP$* zu der auf $l$ senkrechten Ebene in Bezug auf **F** konjugirt ist, so ist die senkrechte Projektion von $MP$ auf eine der Hauptebenen der **F**, z. B. auf $MAB$, konjugirt in Bezug auf den Hauptschnitt $AB$ zu der Spur jener Ebene, d. h. zu einer Senkrechten zur Projektion $l'$ des $l$ auf $MAB$. Durch zwei Hauptebenen ist daher $MP$ bestimmt.

3) Die Richtungen der Halbaxen $MA$, $MB$, $MC$ der **F** entsprechen in $K$ und $K_1$ sich selbst, da sie in beiden zu den bezw. auf ihnen senkrechten Ebenen des Tangentialbüschels reciprok sind. Die kollineare Beziehung von $K$ und $K_1$ ist daher durch die vier Paare entsprechender Strahlen festgestellt, welche bezw. nach den Punkten laufen: $P, A, B, C$ und $P_1, A, B, C$.

4) Da die Gestalt von $K$ nur von der Richtung des Lichtstrahles $l$ und von dem unendlich fernen Kegelschnitte der F abhängt (301), so besitzen koaxiale, ähnliche und ähnlich gelegene Flächen F bei derselben Lichtrichtung dieselben Büschel $K$. Es gilt dies daher für ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid mit demselben Asymptotenkegel.

5) Irgend ein ebener Schnitt von $K$ und einer von $K_1$ sind Kegelschnittbüschel, weil sie kollinear sind, und in $K_1$ ein Büschel koncentrischer Kreise vorkommt. Es entsprechen sich in ihnen die Schnittpunkte mit jenen vier Paaren entsprechender Strahlen.

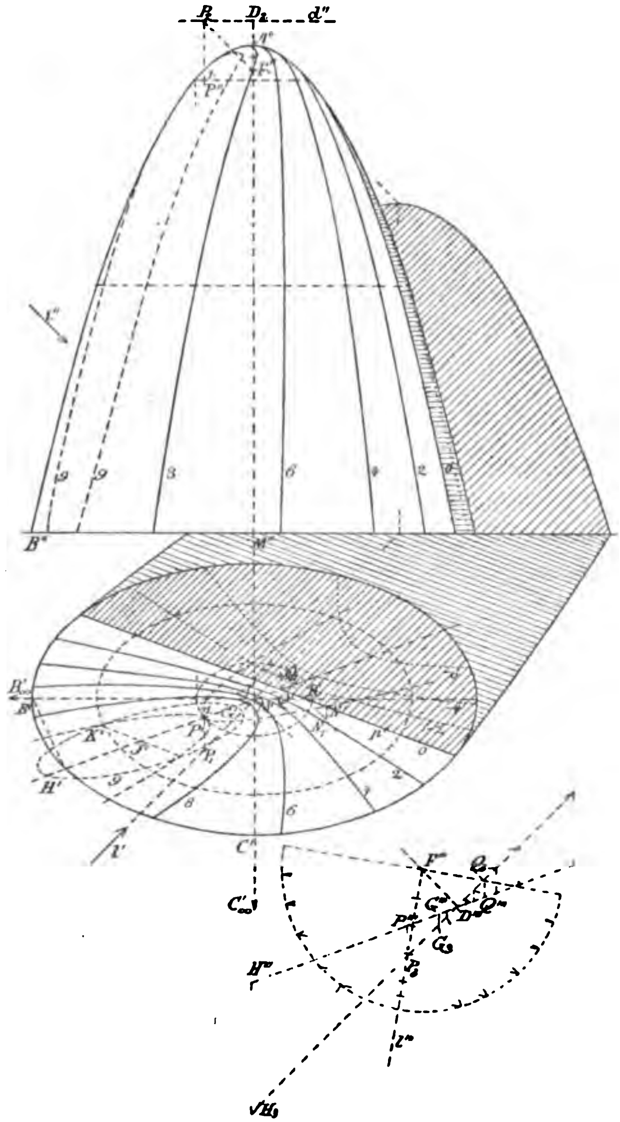
6) Die Beziehung der Büschel $K$ der Lichtgleichenkegel in den verschiedenartigen Flächen zweiten Grades ergibt sich folgendermaßen. Sei $M$ der endlich entfernte Mittelpunkt, seien $MA$, $MB$, $MC$ die reellen oder ideellen Halbaxen der F, und sei für das *Ellipsoid* $MP$ die Axe des Büschels $K$. Das *einschalige Hyperboloid* habe $MA$ zur ideellen Axe; man kann es dann als Imaginärprojektion des Ellipsoides aus dem unendlich fernen Punkte $A_\infty$ der $MA$ mit $MBC$ als Kollineationsebene ansehen. Dann ist die Axe $MP$ für das Hyperboloid symmetrisch zu derjenigen für das Ellipsoid in Bezug auf die Ebene $MBC$, weil beide Gerade die Polaren derselben (auf $l$ senkrechten) Ebene in Bezug auf beide Flächen, daher durch $A_\infty$ und $MBC$ harmonisch getrennt sind (100). Das *zweischalige Hyperboloid* mit den ideellen Halbaxen $MB$, $MC$ kann aus dem Ellipsoide durch zweimalige Imaginärprojektion aus $B_\infty$ und $C_\infty$ entstehen; daher ist für es die Axe $MP$ aus derjenigen für das Ellipsoid durch zweimalige symmetrische Umwandlung in Bezug auf $MCA$ und in Bezug auf $MAB$ zu erhalten; sie fällt dadurch mit derjenigen für das einschalige Hyperboloid zusammen, wie wir es in 4) notwendig fanden. — Für den unendlich fernen Mittelpunkt $M$ oder für die *Paraboloide* werden die Lichtgleichenkegel zu Cylindern, und es kann bei dem Umdrehungsparaboloide ihr Schnitt mit einer auf der Umdrehungsaxe $MA$, senkrechten Ebene kongruent mit deren Schnitt mit dem Normalbüschel gemacht werden. Bei dem *elliptischen Paraboloide* bestimmt man leicht $MP$; seine unendlich fernen Halbaxen $MB$, $MC$ mögen als reell bezeichnet werden (94). Hat dann ein *hyperbolisches Paraboloid* $MA$, $MB$ zu reellen, $MC$ zur ideellen Halbaxe, so ist es die Imaginärprojektion des elliptischen aus $C_\infty$, und seine $MP$ ist symmetrisch zu der $MP$ des elliptischen Paraboloides in Bezug auf $MAB$.

**303.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines elliptischen Paraboloides zu konstruiren.*

*Aufl.* Bei jedem Paraboloide werden die Lichtgleichenkegel zu

Cylindern, und diese sind zugleich die projicirenden Cylinder der Lichtgleichen für eine auf der Axe senkrechte Projektionsebene $\mathbf{P}_1$; die *Grundrißlichtgleichen* (auf $\mathbf{P}_1$) bilden daher ein *Kegelschnittbüschel*.

Fig. 132.



Ist die Fläche ein *Umdrehungsparaboloid*, so schneidet der durch den hellsten Punkt 1. oder $P$ gehende Lichtstrahl die Axe der Fläche, und nimmt man den Schnittpunkt als Mittelpunkt des Normalbüschels, so fällt dessen Schnitt mit der durch $P$ parallel zu $\mathbf{P}_1$

gelegten Ebene mit dem Büschel der in dieselbe Ebene gelegten Grundrißlichtgleichen zusammen (302, 6)) und stimmt offenbar mit dem früher (215) erhaltenen Schnitte des aus dem Brennpunkte gelegten Normalbüschels mit der Leitebene überein.

Fig. 132. Von dem *elliptischen Paraboloide* stehe die Axe $AM \perp \mathbf{P}_1$, die Hauptebene $AMB \parallel \mathbf{P}_2$, und die erste Spur sei die Ellipse $B'C'$. Die erste Projektion $P'$ seines hellsten Punktes 1. oder $P$ liegt auf dem zu der Senkrechten zu $l'$ konjugirten Durchmesser der Ellipse $B'C'$, und seine zweite Projektion $P''$ auf dem zur Senkrechten zu $l''$ konjugirten Durchmesser $P''P_2$ der Parabel $A''B''$ (302, 2)); letztere wird also erhalten, wenn man aus dem Brennpunkte $F''$ der Parabel $A''B''$ die $F''P_2$ parallel zu $l''$ zieht und mit der Leitlinie $d''$ der Parabel in $P_2$ schneidet. Dadurch ist $P'$ auf $M'P'$ bestimmt; und aus $P'$ wird mittelst der durch $P$ parallel zu $\mathbf{P}_1$ gelegten Ebene und ihrer Schnittellipse mit $\mathbf{F}$ der Punkt $P''$ ermittelt, indem man deren Schnittpunkt mit der Parabel $A''B''$ bestimmt; hierzu aber genügt die Sehne dieser Ellipse, welche parallel mit der in demselben Winkel von Durchmessern liegenden Sehne der Ellipse $B'C'$ läuft. Andererseits schneidet der durch $F''$ geführte Lichtstrahl die Ebene $D$, welche durch $d''$ parallel zu $\mathbf{P}_1$ gelegt wird, im Punkte $(P_1, P_2)$, wenn $A'P_1$ die erste Projektion $l'$ eines Lichtstrahles ist. Die Schnitte der Leitebene $D$ mit dem Büschel der Lichtgleichenkegel (Cylinder) und des Normalbüschels sind daher kollineare Systeme, welche $A'$, $B'_\infty$, $C'_\infty$ zu gemeinsamen, und $P'$, $P_1$ zu getrennten entsprechenden Punkten besitzen; und da $P'P_1 \parallel A'C'_\infty$, so sind sie affin mit $C'_\infty$ als Mittelpunkt und $A'B'_\infty$ als Axe der Affinität. Wir wollen beide Kegelschnittbüschel bezw. mit $P'$ und $P_1$ bezeichnen.

Man bestimmt nun von dem Büschel $P_1$ die Punkte auf $A'P_1 = l'$, indem man die durch $l$ und $AM$ gehende Ebene in eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene umlegt, wobei $F$ $(A', F'')$ nach $F'''$ gelangt ($A'F''' \perp l'$ und von passender Länge, $F'''D''' = F''D_2$, $D'''P_3 \# A'P_1$), wodurch $F'''P_3 = l'''$ der umgelegte $l$ wird. Dann bildet man das Normalbüschel mit $F'''$ als Mittelpunkt und $F'''P_3$ als Lichtstrahl, schneidet dessen Strahlen mit $D'''P_3$ in Punkten, unter denen $G_3$ und $H_3$ den Strahlen 9, $Q_3$ dem Strahle 0 angehören, projicirt diese Punktreihe aus $C'_\infty$ auf die parallel zu $A'P'$ gezogene Gerade $D'''P'''$ und überträgt die Projektion $P'''G'''H''' \ldots Q'''$ kongruent auf $A'P'$ nach $P'G'H' \ldots Q'$, so sind dies die Punkte des Kegelschnittbüschels $P'$ auf $A'P'$ und Endpunkte von Durchmessern seiner Kurven. Die zu diesen Durchmessern konjugirte Richtung im Büschel $P'$ entspricht der auf $l'$ senkrechten im Büschel $P_1$; sie ist also

$Q'R'$, wenn $R'$ der Schnittpunkt der auf $l'$ Senkrechten $Q_3 Q_1$ mit der Affinitätsaxe $A'B'$ ist. Es ist auch $Q'R'$ in der Ellipse $B'C'$ zu $l'$ konjugirt. Denn sowohl die konjugirten Durchmesser dieser Ellipse, wie die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $A'R'Q'Q_1$ ($Q_1$ auf $l'$) schneiden auf der unendlich fernen Geraden eine Involution ein. Und da von beiden Involutionen zwei Punktepaare, nämlich die durch $A'R'$, $Q'Q_1$ und $A'Q'$, $R'Q_1$ bestimmten, zusammenfallen, so gilt dies auch für die zwei weiteren Paare; oder $A'Q_1$, $R'Q'$ sind mit zwei konjugirten Durchmessern der Ellipse parallel.

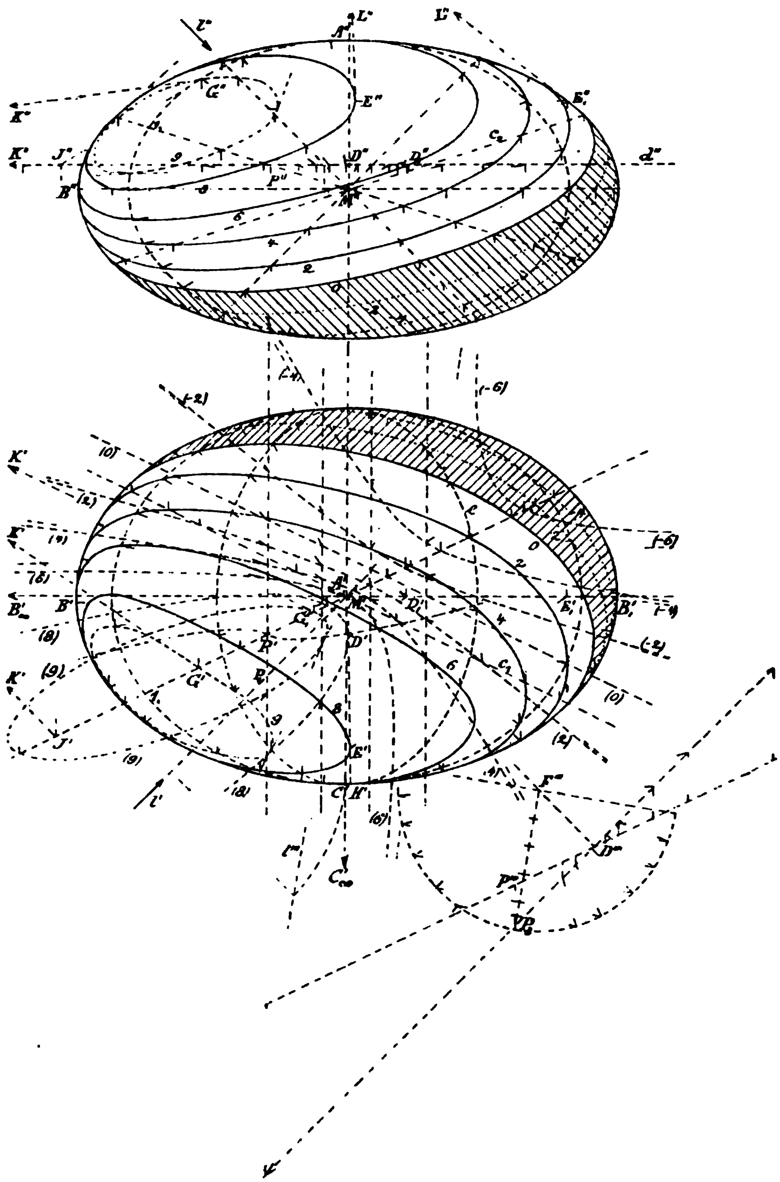
Aus den Mitten der Durchmesser auf $A'P'$, z. B. aus $J'$ als Mitte von $G'H'$, ziehe man die Linien der konjugirten Durchmesser, wie $J'K'$, parallel zu $Q'R'$. Die Endpunkte dieser Durchmesser liegen auf der affinen Figur derjenigen Parabel, welche $P_1$ zum Scheitel, $A'P_1$ zur Axe und $N_1$ zu einem Punkte eines ideellen zur Axe konjugirten Punktepaares hat, wenn auf $Q_1R'$ die $Q_1N_1 = Q_3F'''$ gemacht wurde (216); diese affine Figur ist daher ebenfalls eine Parabel, von welcher $P'$ ein Punkt, $A'P'$ ein Durchmesser, $Q'R'$ die demselben konjugirte Richtung und $N'$ ein Punkt eines dem Durchmesser $A'P'$ konjugirten ideellen Punktepaares ist, wobei $N'$ auf $Q'R'$ durch $N_1N' \parallel A'C'$ bestimmt wurde. Man verzeichnet die durch die bezeichneten konjugirten Punktepaare gebildete, durch $N'$ gehende Parabel (nach I, 380 oder I, 382), und die mit dieser in Bezug auf $P'$ symmetrische Parabel, so schneidet erstere die ideellen konjugirten Durchmesser der Hyperbeln, letztere die reellen der Ellipsen des Büschels $P'$ ab, wie $K'$ auf $J'K'$, mittelst deren diese Kegelschnitte leicht verzeichnet werden. — Der Aufriß der Lichtgleichen wird mittelst einiger zu $\mathrm{P}_1$ parallelen Ellipsen der $\mathrm{F}$ bestimmt.

**304.** *Aufg. Die Lichtgleichen eines Ellipsoides zu konstruiren.* Fig. 133.

*Aufl.* Es seien $MA$, $MB$, $MC$ die Halbaxen des Ellipsoides; man stelle jede der Projektionsebenen senkrecht auf eine der Axen, $\mathrm{P}_1 \perp MA$, $\mathrm{P}_2 \perp MC$; dann bilden die elliptischen Hauptschnitte $B'C'$ und $B''A''$ die Umrisse. $l$ sei der durch $M$ gehende Lichtstrahl. Die aus $M$ nach dem hellsten Punkte 1. der Fläche gehende Gerade $M$1., die Axe des Büschels der Lichtgleichenkegel, hat zu Projektionen die Linien $M'P'$ 1. und $M''P''$ 1., welche in Bezug auf die Ellipse $B'C'$, bezw. $B''A''$ zu der Senkrechten zu $l'$ bezw. $l''$ konjugirt sind (302, 2)). Um die Schnitte der Lichtgleichenkegel mit der Fläche, oder die Lichtgleichen, zu erhalten, wollen wir das Kegelschnittbüschel verzeichnen, in welchem das Kegelbüschel eine mit $\mathrm{P}_1$ parallele, nicht durch $M$ gehende Ebene $\mathrm{D}$ ($d''$) schneidet. Man könnte die Verzeichnung dieser und anderer noch vorkommenden

Kegelschnitte vermeiden, und wir wollen auch später solche Verfahrungsweisen andeuten; aber abgesehen davon, daß bei diesen

Fig. 133.



Verfahren weitgehende Betrachtungen notwendig würden, ist die Verzeichnung von so leicht herzustellenden Hilfslinien, wie von Kegelschnitten, in Bezug auf Kürze und Genauigkeit dann vor-

teilhaft, wenn, wie hier, durch jede derselben viele Punkte gewonnen werden.

Jene Ebene D ($d''$) schneidet das Büschel der Lichtgleichenkegel in einem Kegelschnittbüschel, welches durch den Schnittpunkt $P$ der D mit der Axe des Kegelbüschels, durch $A'$, $B'_\infty$, $C'_\infty$ und $l'$ vollständig bestimmt ist. Man wählt den Abstand der D von $M$ nur so groß, daß noch das Kegelschnittbüschel auf der begrenzten Zeichenfläche in hinreichender Ausdehnung dargestellt werden kann. Dann erhält man nach der vor. Nr. das Kegelschnittbüschel, wenn man $P'P_1 \parallel M'C'$ zieht, mit $l'$ in $P_1$ schneidet, den Lichtstrahl um $l'$ in die Hauptebene $MBC$ nach $l'''$ umlegt, $A'D''' \perp l'$ von passender Länge zeichnet, $D'''P_3 \# A'P_1$ macht, $P_3F''' \parallel l'''$ zieht und mit $A'D'''$ in $F'''$ schneidet, dann aus $F'''$ das Normalbüschel mit dem Lichtstrahle $F'''P_3$ zeichnet und daraus, ganz wie in der vor. Nr., das Kegelschnittbüschel $P'$ ableitet, dessen Kurven mit (0), (2) ... bezeichnet und die vorkommenden Asymptoten der Hyperbeln andeutet. Die dabei benutzten durch $P'$ gehenden Parabeln sind nur einseitig gezeichnet.

**305.** Um nun das durch den Mittelpunkt $M$ und das Kegelschnittbüschel $P'$ gegebene Büschel der Lichtgleichenkegel mit F zum Schnitt zu bringen, legt man durch $M$ Hilfsebenen, schneidet sie mit dem Büschel $P'$ in einer Punktreihe und mit F in einer Ellipse, projicirt die Punkte der Reihe aus $M$ auf die Ellipse, so sind die Projektionen Lichtgleichenpunkte auf F. Die Hilfsebenen legt man zweckmäßig durch $MA$ oder $MC$, und wählt vor allen die durch $MA$ und $P$ geführte, welche auch den Punkt 1. der Fläche liefert. Dieselbe schneidet die F in einer Ellipse, deren erste Projektion die Gerade $A'P'$, deren zweite als Ellipse aus ihren beiden Axen gezeichnet ist. $A'P'$ schneidet die Kegelschnitte des Büschels $P'$ in Punkten, deren zweite Projektionen auf $d''$ man bestimmt und aus $M''$ auf jene Ellipse projicirt; daraus ergeben sich dann die ersten Projektionen der Lichtgleichenpunkte auf $A'P'$. Dabei sind stets nur die sichtbaren Punkte angegeben; und da dies in beiden Projektionen nicht dieselben sind, so ist die Symmetrie in Bezug auf $M$ benutzt. Es ist vorteilhaft sogleich auch als zweite Hilfsebene die zur ersten in Bezug auf die Ebene $MAB$ symmetrische zu legen, weil die Schnittellipsen beider Ebenen mit F dieselbe zweite Projektion besitzen.

Sodann legt man die Ebene $MCP$ und ihre in Bezug auf die Hauptebene $MBC$ symmetrische, deren Schnittellipsen mit F eine gemeinschaftliche durch 1. gehende erste Projektion besitzen. Die Schnitte dieser Ebenen mit D sind bezw. die durch $P'$ gezogene

Parallele zu $M'C'$ und deren Symmetrische in Bezug auf $M'$. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit den Kegelschnitten des Büschels $P'$ projicirt man aus $M'$ auf jene Schnittellipse, zuerst in der ersten Projektion, und überträgt die Punkte in die zweite. Die Lichtgleichenpunkte auf den Umrissen $B''A''$ und $B'C'$ werden durch die Hilfsebenen $MAB$ und $MBC$ gewonnen, und weil letztere mit D parallel ist, erhält man die Punkte auf $B'C'$ durch Strahlen aus $M'$ nach den unendlich fernen Punkten der Kegelschnitte des Büschels $P'$, d. h. durch Parallele zu deren Asymptoten. Weitere Hilfsebenen legt man zweckmäßiger durch $MC$, als durch $MA$, weil sie ein Übertragen der Punkte des Kegelschnittbüschels $P'$ in die zweite Projektion nicht notwendig machen.

Die aus $A'$ an die Kegelschnitte des Büschels $P'$ gezogenen Tangenten berühren auch die jedesmal zu ihnen gehörigen Grundrißlichtgleichen, so die Tangente aus $A'$ an den Kegelschnitt (8) die Lichtgleiche 8. Um den Berührungspunkt $E$ auf letzterer zu bestimmen, ermittelt man denjenigen $D'$ auf dem Kegelschnitte, und legt durch die Tangente $A'D'$ und die Axe $MA$ eine Ebene; dieselbe schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Verzeichnung man besser vermeidet, weil sie nur einen Punkt liefert. Man projicirt sie daher auf den Hauptschnitt $A'B'$ (durch Parallele zu $H'B_1'$, s. Fig.), dabei $D'$ nach $D_1'$, dessen zweite Projektion $D_1''$ auf $d''$ liegt, projicirt $D_1''$ aus $M''$ auf die Ellipse $A''B''$ nach $E_1''$, woraus sich $E_1'$ auf $A'B'$ ergibt, und projicirt dann $E_1$ ($E_1'$, $E_1''$) auf die Ebene $MAD$ zurück nach ($E'$, $E''$). Im Aufriß schneiden sich die Tangente der Lichtgleiche 8 in $E''$ und die des Hauptschnittes $A''B''$ in $E_1''$ im Punkte $L''$ der Axe $M''A''$, wodurch $E''L''$ bestimmt ist.

**306.** *Die Tangente einer Lichtgleiche* in einem beliebigen Punkte derselben erhält man leicht als Schnittlinie der Berührungsebenen der Fläche und des Lichtgleichenkegels in diesem Punkte. Für den Punkt $G$ der Lichtgleiche 9 auf dem Axenschnitte $A$ 1. der Ebene $MA$ 1. mit F ist die Tangente an diese Ellipse in $G$ die $GJ$, welche die Ebene D in $J$ trifft, so daß die Spur der Berührungsebene der F in $G$ die $J'K'$ bildet, als Konjugirte zu $A'G'$ in Bezug auf die Ellipse $B'C'$. Die Berührungsebene des Lichtgleichenkegels in $G$ schneidet andererseits die Ebene D in $G_1'K'$, der Tangente an den Kegelschnitt (9) im Punkte $G_1'$, in welchem die Erzeugende $GM$ die D trifft, d. i. auch einer Konjugirten zu $l'$ in Bezug auf den Kegelschnitt $B'C'$. Die Geraden $J'K'$ und $G_1'K'$ haben den Punkt $K'$ gemein; $K'G'$, $K''G''$ sind daher die Tangenten an die Projektionen der Lichtgleiche 9 in $G$, wobei $K''$ auf $d''$ liegt.

Alle Tangenten in Punkten des Axenschnittes *A* 1. können leicht gezeichnet werden, da die Entsprechenden der $J'K'$ und der $G_1'K'$ je eine Schaar Paralleler bilden.

Die *Grenzlichtgleiche* ist eine Diametralellipse, von der man zwei Punkte auf dem ersten Umrisse $B'C'$ in dem zu $l'$ konjugirten Durchmesser $c_1$ dieser Umrißellipse erhält. In unserer Zeichnung sind $c_1$ und $M'P'$ gleichgeneigt gegen $M'B'$, weil $l'$ und daher auch die zu $l'$ Senkrechte einen Winkel von 45° mit $M'B'$ bilden, und weil $c_1$ und $M'P'$ bezw. zu diesen beiden letzteren Linien konjugirt sind. Ebenso findet man die zwei Punkte der Grenzlichtgleiche auf dem zweiten Umrisse in dem zu $l''$ konjugirten Durchmesser $c_2$. Dadurch erhält man im Grundriß zwei Durchmesser, $c_1$ und die erste Projektion von $c_2$, sowie die Richtung $l'$ des zu $c_1$ konjugirten Durchmessers, und kann dann die Länge der $l'$ durch Affinität zu dem über $c_1$ als Durchmesser verzeichneten Kreise leicht finden, was aber in der Figur nicht ausgeführt ist. Entsprechend kann man im Aufriß verfahren; doch ist hier der Punkt auf $l''$ zugleich mit den Lichtgleichenpunkten bestimmt.

**307.** Man kann auch die Verzeichnung des Kegelschnittbüschels $P'$ vermeiden, wenn man beachtet, daß dasselbe von allen durch $P$ gelegten Geraden in projektiven Punktreihen getroffen wird, weil das Normalbüschel und dann auch das Büschel der Lichtgleichenkegel von allen durch die zugehörige Axe gelegten Geraden in untereinander projektiven Punktreihen geschnitten wird (vergl. 302, 5)). Bestimmt man daher die Punktreihe $M'P'$ wie vorhin, und sodann auf anderen durch $P'$ gelegten Geraden die Helligkeitszahlen außer in $P'$ in zwei Punkten, etwa in den Punkten des Umrisses mittelst des berührenden elliptischen Cylinders (197), so kann man jede zweite Punktreihe als Projektion der mit ihr perspektiven ersten ($M'P'$) ermitteln. Diese Punktreihen projicirt man aus $M$ auf diejenigen Ellipsen der Fläche, welche in ihren projicirenden Ebenen liegen; wobei man die Verzeichnung der Projektionen der Ellipsen vermeiden kann, wenn man sie (und mit ihnen die Punktreihen) in einen Hauptschnitt der Fläche projicirt, wie es vorhin mit der Ellipse *AEH* geschah. — Andererseits könnte man das Kegelschnittbüschel durch ein Büschel koncentrischer Kreise, den senkrechten Schnitt des Normalbüschels, ersetzen, womit es projektiv ist, würde aber dazu neue Betrachtungen und ein weiteres Projiciren von Punktreihen nötig haben*). Endlich könnte man das

*) Herr *Burmester* in seiner Theorie und Darst. der Beleuchtung, 1871, S. 247, benutzte ein Kreisbüschel.

Büschel der Lichtgleichenkegel ganz entbehren, der Fläche F Cylinder umschreiben, welche entlang Ellipsen berühren, deren Ebenen etwa die Axe $MA$ enthalten, und die Lichtgleichenpunkte auf diesen Ellipsen mittelst der Cylinder finden, für die man aber besondere Normalbüschel konstruiren müßte. — Das hier angegebene Verfahren scheint mir das einfachere zu sein.

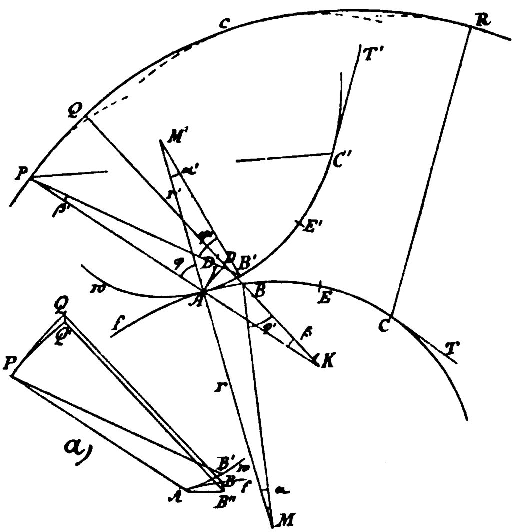
# VIII. Abschnitt.

## Die Rolllinien und die Schraubenlinie.

### I. Die Rolllinien.

**308.** Wenn eine Kurve auf einer anderen (ohne Gleiten) hinrollt oder wälzt, so beschreibt jeder Punkt der ersteren oder jeder andere fest mit ihr ver- Fig. 134.

Fig. 134.




bundene Punkt eine *Rolllinie*. Sei $f$ die *feste* oder *Bahnkurve*, $w$ die *rollende oder wälzende Kurve*, $A$ der Berührungspunkt beider, $P$ der beschreibende Punkt, so erhält man eine neue Lage $R$ desselben, oder einen neuen Punkt der beschriebenen Kurve $c$, wenn man von $A$ aus auf $f$ und $w$ in demselben Sinne gleiche Bogenlängen $AC = AC'$ aufträgt, in $C$ und $C'$ in demselben Sinne die Tangenten $CT$ und $C'T'$ an $f$ bezw. $w$ zieht, und $\sphericalangle TCR = \sphericalangle T'C'P$, sowie $CR = C'P$ macht.

Um in $P$ die *Tangente* an $c$ zu erhalten, bestimme man einen dem $P$ benachbarten Punkt $Q$ der $c$, indem man das Rollen um die unendlich kleinen Bogenstücke $AB = AB'$ vor sich gehen läßt, wobei $B'P$ nach $BQ$ gelangt. Man kann aber auch dieselbe neue Lage erhalten, wenn man zuerst eine Drehung des Dreiecks $APB'$ Fig. a) um $A$ vornimmt, bis $B'$ nach $B''$ gelangt, derart daß die Tangente an die neue Lage von $w$ in $B''$ parallel zur Tangente an $f$ in $B$ wird. Hierbei gelangt $P$ nach $Q'$, und wenn man dann eine Parallel-

verschiebung des Dreiecks $AQ'B''$ vornimmt, bis $B''$ nach $B$ kommt, gelangt $Q'$ nach $Q$. Der zuerst beschriebene Drehungswinkel ist unendlich klein von der ersten Ordnung ($0^1$), ebenso wie $AB$, daher ist auch der mit dem endlichen Halbmesser $AP$ beschriebene Kreisbogen $PQ' = 0^1$, der mit dem unendlich kleinen $AB'$ beschriebene Bogen $B'B''$ dagegen $0^2$. Da auch $B'B = 0^2$, so ist auch $B''B = Q'Q = 0^2$. Daher ist auch der Winkel $QPQ'$ der Sehne $PQ$ der Rolllinie mit der Sehne $PQ'$ des Kreisbogens $= 0^1$, oder er verschwindet in der Grenze; daher steht die Tangente der Rolllinie senkrecht auf $PA$, oder die *Normale einer Rolllinie in einem Punkte $P$ derselben geht durch den zugehörigen Berührungspunkt $A$ der wälzenden und der festen Kurve.*

Es berührt daher die Rolllinie $c$ den aus $A$ durch $P$ gezogenen Kreis; und man erhält sie am kürzesten als einhüllende Kurve der Kreisbogen, welche man aus den Punkten $A, E, C \ldots$ bezw. mit den Halbmessern $AP, E'P, C'P \ldots$ beschreibt, wenn $A, A$; $E, E'$; $C, C' \ldots$ entsprechende Punkte der $f$ und $w$ sind.

*Anm.* In der *Kinematik* wird jede Bewegung eines starren ebenen Systems in einem festen Systeme auf das Rollen einer Kurve $w$ des beweglichen auf einer Kurve $f$ des festen Systems zurückgeführt. Der augenblickliche Berührungspunkt $A$ ist der einzige augenblicklich ruhende Punkt des beweglichen Systems und heißt der *Pol* oder das *Momentancentrum*, $w$ im beweglichen Systeme heißt die *Polbahn*, $f$ im festen die *Polkurve.*

**309.** Den *Krümmungsmittelpunkt**) der Rolllinie $c$ in ihrem Punkte $P$ findet man als Durchschnittspunkt $K$ ihrer beiden benachbarten Normalen $PA$ und $QB$. Sei $MAM'$ die gemeinschaftliche Normale von $f$ und $w$ in $A$, seien auf ihr $M$ und $M'$ bezw. die Krümmungsmittelpunkte von $f$ und $w$, so ist auch $MB$ die Normale der $f$ in $B$ und $M'B'$ die der $w$ in $B'$. Setzen wir

$MA = r, \quad AM' = r', \quad AP = p, \quad KA = q,$

$\measuredangle M'AP = \varphi, \quad \measuredangle M'B'P = \measuredangle MBK = \varphi',$

$\measuredangle AMB = \alpha, \quad \measuredangle AM'B' = \alpha', \quad \measuredangle AKB = \beta, \quad \measuredangle APB' = \beta',$

und nehmen den Sinn $MA$ positiv, so ist $r$ stets, und $r' = AM'$ bei der Lage, wie in der Figur, positiv.

Es folgt nun aus den Vierecken $AMBK$ und $AM'B'P$

$$\varphi + \alpha = \varphi' + \beta, \quad \varphi' + \alpha' = \varphi + \beta',$$

und daraus
$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta'. \tag{1}$$

*) Einen Teil der folgenden Entwickelung habe ich schon in einem Aufsatze „Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven" in Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., B. 27, 1882, S. 129 veröffentlicht.

Setzt man das Bogenelement $AB = AB' = ds$, zieht aus $P$ im Winkel $\beta'$ den Kreisbogen $AD'$, und aus $K$ in $\beta$ den $AD$, so ist $AD' = AD = ds \cos \varphi$ und

$$\alpha = \frac{ds}{r}, \quad \alpha' = \frac{ds}{r'}, \quad \beta = \frac{ds \cos \varphi}{q}, \quad \beta' = \frac{ds \cos \varphi}{p}.$$

Diese Werte in (1) eingesetzt, liefern

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\cos \varphi}. \tag{2}$$

Man findet nach dieser Formel $q$ oder $K$, wenn man $AN \perp AP$, Fig. 135. dann $PM'$ bis $N$ auf $AN$, und endlich $MN$ zieht; diese Linie trifft die $PA$ in $K$*). Denn führt man $KE \parallel MA$, schneidet sie mit $NP$ und $NA$ bezw. in $E$ und $D$, und fällt $MF \perp NA$, so ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken die Proportionen

$$\frac{KD + DE}{KA} = \frac{MA + AM'}{MF} \quad \text{oder} \quad \frac{KD + DE}{q} = \frac{r + r'}{r \cos \varphi}$$

und

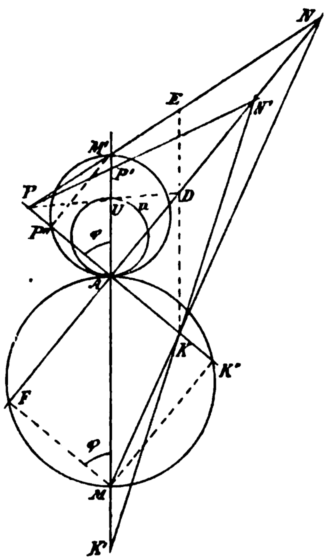
$$\frac{KA + AP}{AP} = \frac{KD + DE}{AM'} \quad \text{oder} \quad \frac{p + q}{p} = \frac{KD + DE}{r'},$$

durch deren Multiplikation (2) folgt.

Die Gleichung (2) drückt folgenden *Satz* aus: *Wenn man durch einen Punkt $A$ im Inneren eines Winkels $KNP$ eine beliebige Gerade zieht, sie mit den Schenkeln des Winkels bezw. in $M$ und $M'$ schneidet und $MA = r$, $AM' = r'$ setzt, so ist für alle solche Gerade*

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\sin NAM} = \text{const.}$$

Fig. 135.




**310.** Läßt man den beschreibenden Punkt $P$ auf der Geraden $AP$ verschiedene Lagen einnehmen, und bestimmt zu jeder den Krümmungsmittelpunkt $K$, so ergibt sich:

1) Die Reihe der $P$ ist *projektiv* mit der Reihe der zugehörigen $K$; denn beide Reihen sind mit der Reihe der $N$ auf $AN$ perspektiv bezw. aus $M'$ und $M$.

2) Außer in dem sogleich zu betrachtenden besonderen Falle, daß $M$ in $M'$ liegt, aber nicht zugleich $AP \perp AM$ steht, fällt nach

*) Diese Konstruktion der Formel (2) rührt von *Euler* her (novi commentarii der Petersburger Acad., B. 11, 1765, S. 219).

der Konstruktion der Punkt $P$ mit seinem zugehörigen $K$ nur dann zusammen, wenn $P$ in $A$ liegt. Daher ist außer in dem angegebenen besonderen Falle $A$ der einzige Doppelpunkt der Reihen der $P$ und der $K$; und der Krümmungshalbmesser $PK$ wird Null, wenn $P$ in $A$ fällt.

3) Ist $AP \perp AM$, aber nicht $M$ in $M'$, so ergibt die Konstruktion zu jedem $P$ den Punkt $A$ als Krümmungsmittelpunkt $K$.

4) Ist $M$ in $M'$, aber nicht $AP \perp AM$, so fällt $K$ in $P$ und der Krümmungshalbmesser ist für jeden beschreibenden Punkt $= 0$.

5) Ist $AP \perp AM$ und $M$ in $M'$, so läßt die Konstruktion den Punkt $K$ unbestimmt. Der Krümmungshalbmesser der Rolllinie $c$ ist dann durch $r$ und $r'$ allein nicht bestimmt, sondern erst durch die Art der Änderung beider. $w$ und $f$, die sich in $A$ berühren, schneiden sich dann im allgemeinen auch in diesem Punkte, und man kann sich leicht vergegenwärtigen, daß die Rolllinie $c$ dann in $P$ einen Schnabelpunkt besitzt, welcher wirklich jede Größe des Krümmungshalbmessers zuläßt, die aber stets eine bestimmte ist.

6) Liegt $P$ auf $MM'$, z. B. in $P'$, so läßt die gegebene Konstruktion keine unmittelbare Anwendung zu.

Es muß aber für $K'$ nach Gleichung (2), da $\varphi = 0$, $p = AP'$, $q = K'A$ wird, gelten

$$\frac{1}{AP'} + \frac{1}{K'A} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Diese Bedingung erfüllt man mittelst irgend eines schon bestimmten solchen Paares $P$, $K$, welches auf einer schief zu $AM$ durch $A$ gehenden Geraden liegt, indem man $AN \perp AP$ zieht, $PP'$ mit $AN$ in $N'$ schneidet und $N'K$ zieht; diese trifft die $AM$ in $K'$. Denn weil $P$ und $K$ beschreibender und Krümmungsmittelpunkt sind, ist nach Gl. (2)

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{KA} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{\cos\varphi};$$

und nach dem Satze der vor. Nr. gilt im Winkel $PN'K$

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{KA} = \left(\frac{1}{AP'} + \frac{1}{K'A}\right)\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber die vorhergehende; dieselbe ist also durch die gegebene Konstruktion erfüllt.

7) Die Punktreihen der $P$ und der $K$ sind die senkrechten Projektionen der Punktreihen der $P'$ und der $K'$, was man einsieht, wenn man $N'$ auf $AN$ ins Unendliche rücken läßt.

8) Beschreibt man über $AM'$ und über $MA$ als Durchmessern Kreise, so schneidet jede durch $A$ gelegte Gerade den ersten Kreis

in einem beschreibenden Punkte $P''$ und den letzteren in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $K''$, weil $AP''M'$ und $AK''M$ rechte Winkel sind. Dasselbe gilt von den Kreisen mit den Durchmessern $AP'$, $K'A$.

9) Läßt man den Kreis der Krümmungsmittelpunkte (wie den $AK''M$ oder den $AK'$) unendlich groß werden, so rückt $K'$ auf $AM$ ins Unendliche; dann gelangt $P'$ auf $M'A$ nach $U$, wenn $U$ auf $PD$ liegt und $KD \parallel AM$ bis $D$ auf $AN$ gezogen wurde. Zu jenem unendlich großen Kreise der Krümmungsmittelpunkte gehört der Kreis $AU = u$ der beschreibenden Punkte. Dieser Kreis heißt der *Wendekreis,* weil jede von einem Punkte desselben beschriebene Kurve in diesem Punkte einen unendlich großen Krümmungshalbmesser, also im allgemeinen einen Wendepunkt besitzt.

**311.** Ist mit der Kurve $w$, welche auf der festen $f$ wälzt, eine beschreibende Kurve $b$ verbunden, so werden alle Lagen derselben von einer Kurve $k$ eingehüllt, welche ihre *Hüllbahnkurve* oder Enveloppe heißt. Ist $A$ der augenblickliche Berührungspunkt von $w$ und $f$, d. i. das Momentancentrum, und zieht man aus $A$ eine Normale $AP$ zu $b$, deren Fußpunkt $P$ sei, und ist der Punkt $M$ auf $AP$ der Krümmungsmittelpunkt der $b$ in $P$, sind ferner $b_1$, $P_1$, $M_1$ die folgenden Lagen von $b$, $P$, $M$ und ist $A_1$ das Momentancentrum dieser folgenden Lage, so sind $MA$, $M_1A_1$ Normalen der von $M$ beschriebenen Bahn (308), und ihr Schnittpunkt $K$ ist der Krümmungsmittelpunkt dieser Bahn. Schneidet $M_1A_1$ die $b_1$ in $Q$, so ist auch $A_1M_1Q$ eine Normale der $b_1$ in $Q$ (sie bildet mit ihr einen Winkel $= 0^2$, wie $MRM_1$ in I, 237, Fig. 115), und es ist $M_1P_1 = M_1Q + 0^3$ (wie in I, 237, Fig. 115 die $MR = MQ + 0^3$), daher auch $KP = KQ + 0^3$; oder der aus $K$ durch $P$ gezogene Kreis ist der Krümmungskreis der in $P$ und $Q$ bezw. die $b$ und $b_1$ berührenden Kurve (d. i. der $k$), weil sie mit ihr den Punkt $P$ und die Normalen in $P$ und $Q$ gemein hat (I, 231). Daher: *Die Hüllbahnkurve $k$ einer beschreibenden Kurve berührt eine Lage $b$ dieser Kurve in dem Fußpunkte $P$ der Normalen, welche aus dem zu $b$ gehörigen Momentancentrum $A$ auf $b$ gefällt wird; und der Krümmungsmittelpunkt $K$ der $k$ in $P$ fällt mit demjenigen der Kurve zusammen, welche von dem Krümmungsmittelpunkte $M$ der $b$ in $P$ beschrieben wird.*

**312.** In Bezug auf die *Gestalt der Rolllinien* bemerkt man, daß der beschreibende Punkt $P$, wenn er auf der wälzenden Kurve $w$ liegt, im allgemeinen auf die feste $f$ in einem Punkte $A$ der augenblicklichen Berührung auftreffen und sich dann wieder von ihr entfernen wird. Ein solcher Punkt heißt ein *Ursprungspunkt* der Rolllinie $c$, und in ihm ist der Krümmungshalbmesser der $c$ (310, 2)) $= 0$. In einem

Ursprungspunkte fällt die Normale der $c$ in die Tangente der $f$, und im allgemeinen ist ein solcher Punkt eine *Spitze.* Besitzen dagegen in diesem Punkte $w$ oder $f$ oder beide Kurven Rückkehrelemente, oder schneiden sich in ihm $w$ und $f$ (wozu eine 3-, oder 5-... punktige Berührung erforderlich), so kann dieser Punkt der $c$ auch ein gewöhnlicher Punkt, ein Wendepunkt, eine Spitze oder ein Schnabelpunkt sein, wie man sich am leichtesten bei der Evolvente einer Kurve $f$ überzeugen kann, die eine Rolllinie mit einer Geraden als $w$ darstellt (vergl. I, 243—246).

Ist $w$ eine geschlossene Kurve, so kehren die Ursprungspunkte auf $f$ in Bogenabständen gleich dem Umfange von $w$ wieder. Die Bogen der Rolllinie $c$ zwischen zwei auf einander folgenden Ursprungspunkten heißen *Gänge* derselben. Es gibt deren im allgemeinen unendlich viele; nur wenn $f$ ebenfalls geschlossen und die Umfänge von $w$ und $f$ kommensurabel sind, kehrt nach einer endlichen Anzahl von Gängen die Rolllinie $c$ in sich selbst zurück. Ist $w$ nicht geschlossen und erstreckt sich ins Unendliche, ist dagegen $f$ geschlossen, so kann sich $c$, z. B. dann wenn $f$ keine Rückkehrpunkte besitzt, als *Spirale* in unendlich vielen sich erweiternden vollen Windungen ins Unendliche erstrecken.

Gehört der beschreibende Punkt nicht der wälzenden Kurve an, so fallen die Ursprungspunkte weg, jedoch nicht immer der Begriff der Gänge, indem die begrenzenden Ursprungspunkte durch die Punkte der Rolllinie ersetzt werden können, welche den kleinsten Abstand von dem zugehörigen Berührungspunkte $A$ der $w$ und $f$ besitzen.

**313.** Sind die feste $f$ und die wälzende Kurve $w$ Kreise, einschließlich der geraden Linie, so heißen die erzeugten Rolllinien *cyklische Kurven* oder *Radlinien.* Dieselben werden unterschieden als eine *Cykloide,* wenn $f$ eine Gerade und $w$ ein Kreis, eine *Kreisevolvente,* wenn $f$ ein Kreis und $w$ eine Gerade, eine *Epicykloide,* wenn $f$ und $w$ Kreise und $w$ außerhalb $f$ liegt, eine *Hypocykloide,* wenn $f$ und $w$ Kreise und $w$ innerhalb $f$ liegt; und jede von diesen als *gemein, geschweift* (oder gestreckt) und *verschlungen,* je nachdem der beschreibende Punkt auf $w$, oder mit dem Mittelpunkte des $f$ auf entgegengesetzter oder auf übereinstimmender Seite von $w$ liegt*).

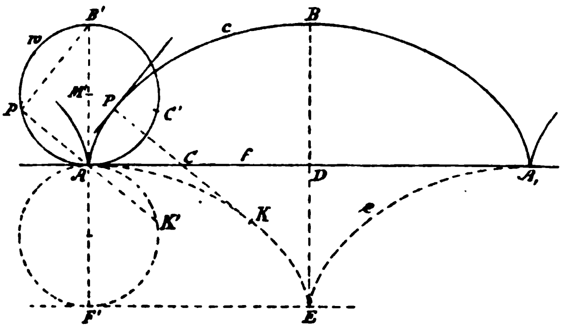
---

*) Diesen Begriff hat der Verf. in seinem Aufsatze „Doppelte Entsehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Kurven" (Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., B. 26, 1881, S. 257) aufgestellt, weil der gebräuchliche Begriff, wonach eine der Kurven geschw. oder verschl. heißt, je nachdem $P$ innerhalb oder außerhalb $w$ liegt, hinfällig wird, sobald man die bisher wenig beachtete doppelte Entstehungsweise dieser Kurven ins Auge

Man erhält dadurch 4 $\times$ 3 oder 12 Arten, wovon aber 4, nämlich die geschweifte und die verschlungene Epi- und Hypocykloide hier bei Seite gelassen werden sollen, weil sie in der Folge keine Anwendung finden*).

**314.** Die *gemeine Cykloide* oder kurzweg die *Cykloide.* Sei die Gerade $f$ die feste Kurve oder Bahnlinie, $w$ eine Lage des wälzenden Kreises, sei der Berührungspunkt $A$ von $f$ und $w$ der beschreibende Punkt, so ist $A$ ein Ursprungspunkt; ein benachbarter solcher $A_1$ hat den Abstand $AA_1$ = Umf. $w$. Um Fig. 136.

Fig. 136.




einen Punkt $P$ der Cykloide $c$ zu bestimmen, trage man von $A$ aus in demselben Sinne auf $w$ und $f$ die gleichen Längen $AC' = AC$ auf, versetze die $w$ so, daß sie mit ihrem Punkte $C'$ die $f$ in $C$ berührt, so nimmt der beschreibende Punkt $A$ den Ort $P$ ein. Man erreicht dies alles am zweckmäßigsten, wenn man zuerst $w$ um seinen Mittelpunkt $M'$ im Sinne der Drehung beim Rollen dreht, bis $C'$ nach $A$ und daher $A$ nach $P'$ gelangt, wobei Bog. $AP'$ = Bog. $C'A$ wird, und daß man dann eine Parallelverschiebung von $w$ vornimmt, bis $A$ nach $C$ gelangt; $P'$ kommt dann nach $P$, und $ACPP'$ ist ein Parallelogramm. $PC$ ist die Normale der $c$ in $P$, und die Tangente ist mit $P'B'$ parallel, wenn $AB'$ ein Durchmesser des $w$. Den Scheitel $B$ des Cykloidenganges erhält man, wenn man aus der Mitte $D$ von $AA_1$ die $DB \# AB'$, also $\perp AA_1$ macht.

**315.** Den *Krümmungsmittelpunkt* $K$ zu $P$ könnte man leicht aus der Gleichung (2) der Nr. 309 bestimmen; doch liefert folgende Betrachtung sogleich die Gestalt der Evolute.

---

faßt, da bei der zweiten Entstehungsweise der Begriff gegen den bei der ersten gerade umgekehrt werden müßte.

*) Verf. hat dieselben, insbesondere ihre Evoluten, in seinem Aufsatze „Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Kurven" (Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., B. 27, 1882, S. 129) behandelt. Eine eingehende Untersuchung der cyklischen Kurven mit Berücksichtigung ihrer mannigfaltigen Gestalten gibt *Burmester* in seinem Lehrbuche der Kinematik, B. 1, 1886.

Zeichnet man einen mit dem Kreise *w* gleichen und ihn in *A* berührenden Kreis *AF'* und läßt diesen auf der zu *f* parallelen Tangente *F'E* hinrollen, so beschreibt *A* *eine mit c kongruente Cykloide AKE, und diese ist die Evolute von c.* Denn schneidet man die Gerade *P'A* mit dem zweiten Kreise in *K'*, wobei Bog. *AK'* = Bog. *AP'*, läßt diesen Kreis sich um seinen Mittelpunkt drehen, bis *A* nach *K'* gelangt, und verschiebt ihn dann um *AC* = Bog. *AK'*, so kommt *AK'* nach *CK*, *K* ist der Punkt der beschriebenen Cykloide und *CK* ihre Tangente. Es liegen aber *CP* und *CK* in derselben Geraden, oder es ist die Normale der ersten Cykloide in *P* die Tangente der zweiten in *K*; also ist die letztere die Evolute der ersteren und *K* ist der *Krümmungsmittelpunkt* für *P*. Der *Krümmungshalbmesser PK* ist daher gleich der doppelten Normalen *PC*.

Zugleich bemerkt man, daß der Krümmungshalbmesser der *c* in ihrem Scheitel *B* gleich dem vierfachen Halbmesser des Kreises *w* ist. Derselbe hat aber auch die Länge des abgewickelten Bogens *EA* der Evolute (I, 237); daher ist *die Bogenlänge des halben Ganges einer Cykloide gleich dem vierfachen Halbmesser des wälzenden Kreises.* Ebenso ist Bog. *AK* = zweimal Sehne *AK'*, und entsprechend Bog. *BP* = zweimal Sehne *B'P'*.

Fig. 137.

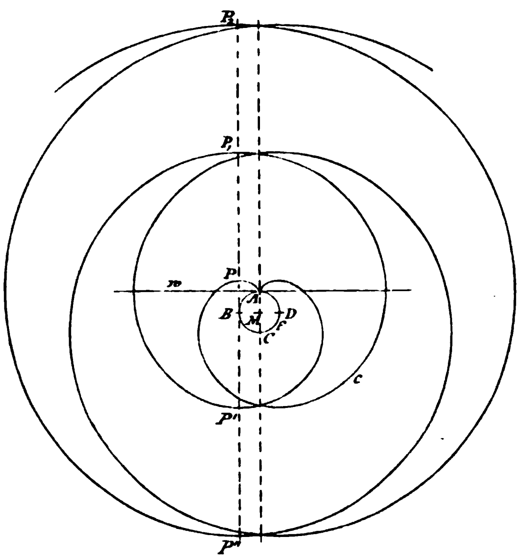


Fig. 137.

Benutzt man bei der Verzeichnung der Cykloide die Krümmungskreise, so reicht man mit zwei Zwischenpunkten *P'* auf dem Halbkreise *AB'* aus, welchen man von *A* aus zweckmäßig die Winkelabstände *AM'P'* von 45° und 90° gibt, oder mit einem einzigen im Abstande von 60°.

*Alle Gänge* dieser, wie einer jeden cyklischen Kurve sind offenbar unter einander *kongruent.*

**316.** Die *Kreisevolvente* entsteht, wenn die feste Linie *f* ein Kreis und die wälzende *w* eine Gerade ist. Der Berührungspunkt *A* beider Linien sei der beschreibende Punkt; er ist dann auch der Ursprungspunkt der Kurve *c*, und zwar ihr einziger. Dieselbe er-

streckt sich als Spirale in unendlich vielen Windungen ins Unendliche. Trägt man auf einer die $f$ in dem willkürlichen Punkte $B$ berührenden Geraden $w$ in übereinstimmendem Sinne $BP =$ Bog. $BA$, $BP' =$ Bog. $BDA$ auf, so sind $P$, $P'$ Punkte der $c$; trägt man dann ferner den Umfang von $f = u = PP'$ auf jener Tangente als $PP_1 = P_1 P_2 \ldots = P' P'' \ldots$ weiter, so erhält man neue Punkte $P_1, P_2 \ldots P'' \ldots$ der $c$. Für alle diese Punkte ist $B$ der Krümmungsmittelpunkt der $c$. In der Figur ist $f$ in vier gleiche Teile geteilt und aus den Teilungspunkten $A$, $B$, $C$, $D$ sind Krümmungskreise der $c$ mit Halbmessern $= 0$, $\frac{1}{4} u$, $\frac{2}{4} u$, $\frac{3}{4} u$ gezeichnet, und sodann solche mit deren Vergrößerungen um $u$, $2u$, $3u \ldots$ Der durch den Ursprungspunkt $A$ gezogene Durchmesser $MA$ der $f$ ist eine Symmetrielinie der Evolvente, welche die Spitze $A$ und alle Doppelpunkte der $c$ enthält.

**317.** Die *Epicykloide*. Liegt der wälzende Kreis $w$ außerhalb des festen $f$, so beschreibt jeder Punkt des $w$ eine Epicykloide $c$; dabei sei $MA = r$ der Halbmesser des $f$, $AM' = r'$ der des $w$. Es sei der Berührungspunkt $A$ beider Kreise der beschreibende Punkt, und es liege zunächst auch $f$ außerhalb $w$. Um einen Punkt $P$ der $c$ zu erhalten, denke man sich wieder zuerst $w$ um $M'$ in demselben Sinne wie beim Rollen gedreht, so daß $A$ den Bog. $AP'$ beschreibt, und dann denke man sich $w$ fest mit $MM'$ verbunden und um $M$ gedreht, bis der Berührungspunkt nach $C$ gelangt, derart, daß Bog. $AC =$ Bog. $AP'$ ist; dann gelangt $P'$ nach $P$. Man erhält $P$, wenn man die Sehne $P'A$ mit $f$ noch in $Q'$ schneidet und $CQ = AQ'$ in $f$ aufträgt, $QC$ zieht und auf ihr $CP = AP'$ macht. Man erhält auch die Gerade $PC$, wenn man aus $M$ einen berührenden Kreis an $P'A$ zieht und an diesen aus $C$ in dem Sinne von $P'A$ eine Tangente legt. — $PC$ ist die Normale der $c$ in $P$. Fig. 138.

Den nächsten Scheitel $B$ bestimmt man, indem man auf $f$ den Bog. $AD = \frac{1}{2}$ Umf. $w =$ Bog. $AB'$ aufträgt und auf $MD$ die $DB = AB'$ macht; den zweiten Ursprungspunkt $A_1$ durch Bog. $AA_1 =$ Umf. $w$.

**318.** Ein Kreis $w'$, der in $A$ von dem festen Kreise $f$ von innen berührt wird, und dessen Durchmesser gleich der Summe der Durchmesser von $f$ und $w$ ist, also $AB'' = AE + B'A$, erzeugt beim Rollen auf $f$ durch den Punkt $A$ dieselbe Epicykloide $c$, wie $w$. Schneidet man nämlich die Sehne $P'AQ'$ mit $w'$ in $Q''$, so ist Bog. $AQ'' =$ Bog. $AQ' +$ Bog. $AP' =$ Bog. $CQ +$ Bog. $AC$, und Sehne $AQ'' =$ Sehne $AQ' +$ Sehne $P'A$. Beim Rollen von $w'$ gelangt daher $Q''$ nach $Q$, $Q''A$ nach $QCP$, weil beide Sehnen mit den Kreistangenten in $A$, $Q'$, $Q''$, $Q$ gleiche Winkel bilden, und $A$ gelangt nach $P$. Da sich im Scheitelpunkte $B$ von $c$ zusammengehörige Lagen von $w$ und $w'$ berüh-

ren, so gilt der Satz, den wir zugleich für die Hypocykloide aussprechen, für die er als ebenfalls giltig bald bewiesen werden wird: *Teilt man den Durchmesser eines festen Kreises $f$ durch einen äußeren oder inneren Punkt $P$ in zwei Teile, zeichnet über jedem der Teile als Durchmesser einen Kreis $w$ und einen $w'$, und läßt beide auf $f$ rollen, so beschreibt $B$ mit jedem dieser Kreise bezw. dieselbe Epi- und Hypocykloide.*

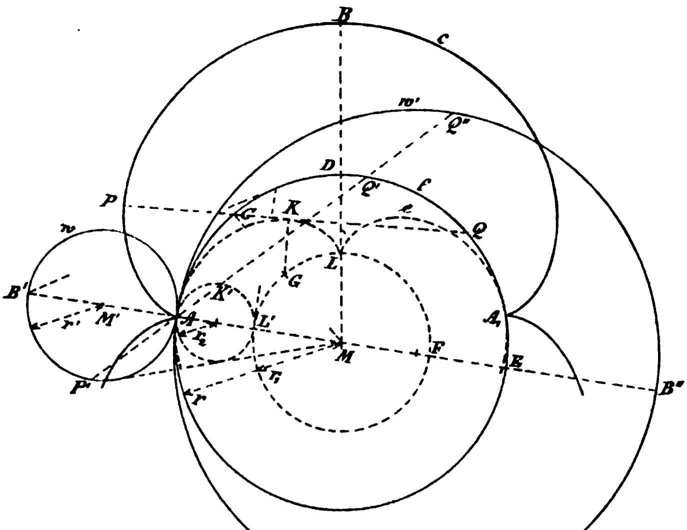
Bei der Epicykloide ist daher entweder $r' > 0$ oder $r' < -r$; im ersten Falle liegt $f$ außerhalb, im zweiten innerhalb $w$. Bei der Hypocykloide ist entweder $r' < 0$ und $\geqq -\frac{1}{2}r$ oder $r' < -\frac{1}{2}r$ und $> -r$; im ersten Falle liegt $M$ außerhalb oder auf $w$, im zweiten Falle innerhalb.

**319.** Die *Evolute e der Epicykloide* erhält man aus dem Kreise von dem Durchmesser $AL'$, welcher den $w$ in $A$ berührt, und außerdem mit ihm zwei nach $M$ laufende Tangenten gemein hat. Es gilt dann, weil $M$ der Ähnlichkeitspunkt beider Kreise ist,

$$AB' : L'A = MB' : MA = MA : ML'.$$

$MA$ ist daher die mittlere Proportionale von $MB'$ und $ML'$, und man erhält $L'$ am genauesten, wenn man aus $B'$ eine Tangente an $f$ legt, und den Berührungspunkt auf $MB'$ nach $L'$ projicirt.

Fig. 138.



Läßt man nun den Kreis $AL'$ auf dem aus $M$ durch $L'$ gezogenen Kreise $L'F$ rollen, so beschreibt der Punkt $A$ eine *Epicykloide e, welche die Evolute der Epicykloide c ist.* Die obige Pro-

portion zeigt, daß sich die Durchmesser der beiden wälzenden Kreise $w$ und $AL'$ wie die Durchmesser der zugehörigen festen $f$ und $L'F$ verhalten. Daher ist, wenn $P'A$ den Kreis $AL'$ in $K'$ und $CM$ den Kreis $L'F$ in $G$ schneidet, weil Bog. $AC =$ Bog. $AP'$, auch Bog. $L'G =$ Bog. $AK'$. Dreht man nun den Kreis $AL'$ um seinen Mittelpunkt, bis $A$ nach $K'$ kommt, dann denselben Kreis um $M$, bis $L'$ nach $G$ gelangt, so kommt das Dreieck $L'AK'$ in die Lage $GCK$; $K$ ist ein Punkt der entstehenden Epicykloide $e$, $KG$ ihre Normale, $KC$ ihre Tangente. Da zugleich bei jener Drehung $AP'$ nach $CP$ gelangt, so ist die Normale $PC$ der Epicykloide $c$ in $P$ zugleich Tangente der Epicykloide $e$ in $K$. Diese ist daher die *Evolute* von jener, $K$ der *Krümmungsmittelpunkt*, $PK = P'K'$ der *Krümmungshalbmesser*, wie behauptet war.

Für die Verzeichnung eines halben Ganges genügt häufig der Ursprungspunkt, der Scheitel, ein Zwischenpunkt, und der Krümmungskreis für die beiden letzteren.

**320.** *Die Epicykloide und ihre Stücke sind leicht zu rektificiren.* Man bemerkt, daß der abgewickelte Bog. $AK$ der Evolute $= PK$ ist. Setzt man nun die Halbmesser $ML' = r_1$, $\frac{1}{2} L'A = r_2$, so ist

$$\text{Bog. } AK = PK = P'K' = AK' \cdot \frac{r_2 + r'}{r_2}.$$

Sodann ergibt die Figur

$$r' : r = r_2 : r_1 \quad \text{und} \quad r = 2r_2 + r_1,$$

daher ist

$$r' = \frac{r r_2}{r_1} = \frac{r_2}{r_1}(2r_2 + r_1), \qquad \frac{r_2 + r'}{r_2} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1},$$

und

$$\text{Bog. } AK = 2 \cdot AK' \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

Ersetzt man nun in ähnlichen Figuren Bog. $AK$ durch Bog. $BP$, und entsprechend $r_1$, $r_2$, $AK'$ bezw. durch $r$, $r'$, $B'P'$, so findet man

$$\text{Bog. } BP = 2 \cdot \text{Sehne } B'P' \cdot \frac{r + r'}{r}.$$

Daraus der halbe Gang $BA$ oder

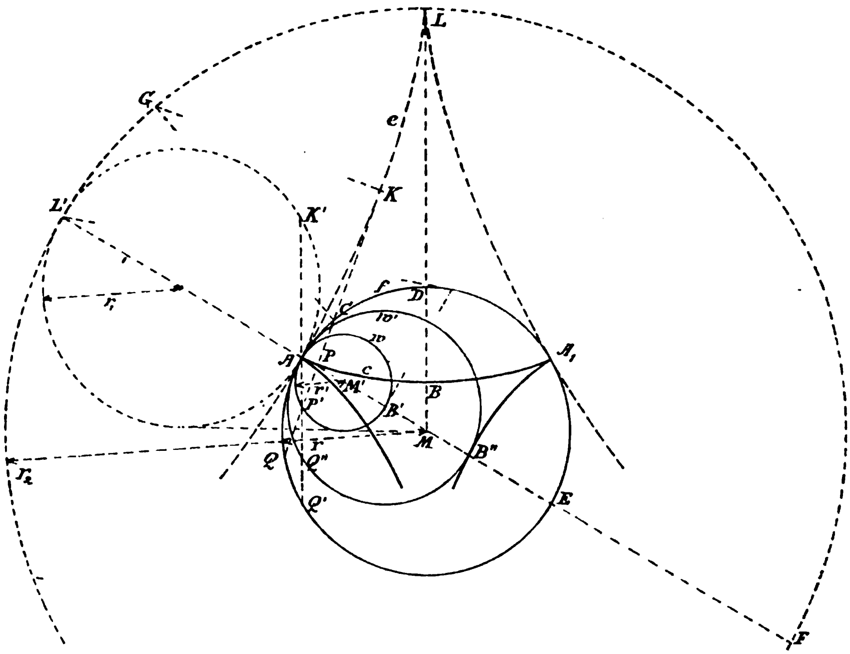
$$\text{Bog. } BA = 4 \frac{r'}{r}(r + r').$$

*Anm.* Ist $w = f$, so wird die $c$ geschlossen und heißt *Kardioide*.

**321.** Die *Hypocykloide* unterscheidet sich von der Epicykloide Fig. 139.
nur dadurch, daß $w$ innerhalb $f$ liegt. Da sich die Konstruktionen von den eben betrachteten nur durch den Sinn von $r'$ unterscheiden, so genügt es, sie anzuführen, wobei entsprechende Punkte durch dieselben Buchstaben bezeichnet sind, wie vorhin. Die Hypocykloide entsteht durch Rollen eines jeden der *beiden*

*Kreise* $w$ und $w'$ im Inneren eines Kreises $f$, dessen Durchmesser gleich der negativen Summe der Durchmesser jener Kreise ist $[EA = -(AB' + AB'')]$; derselbe Bogen der $c$ entsteht aber durch Rollen der Kreise in entgegengesetztem Sinne. Die *Evolute* $e$ der Hypocykloide $AB$ ist die Hypocykloide $AL$, für welche der wälzende Kreis $L'A$ und der feste $FL'$ sind. Die beiden wälzenden Kreise $w$ oder $AB'$ und $L'A$ berühren sich in $A$ und haben außer-

Fig. 139.




dem zwei gemeinschaftliche Tangenten, welche nach $M$ laufen. $L'$ kann dadurch konstruirt werden, daß man in $B'$ eine Senkrechte auf $MA$ errichtet, sie mit $f$ schneidet und im Schnittpunkte die Tangente an $f$ zieht; dieselbe geht dann durch $L'$.

$P$ und $K$ erhält man, wenn man Bog. $AC =$ Bog. $AP'$ macht, $K'AP'Q''Q'$ zieht, $CQ = AQ'$ oder $Q'Q = AC$ oder Bog. $AQ =$ Bog. $AQ''$ macht, $QC$ zieht und auf ihr $CP = AP'$, oder $QP = Q''A$, und ebenso $CK = AK'$ aufträgt. Zur Verzeichnung genügen gewöhnlich die Ursprungspunkte und der Krümmungskreis im Scheitel.

Für die *Rektifikation* gilt

$$\text{Bog. } BP = 2 \cdot \text{Sehne } B'P' \cdot \frac{r - r'}{r}$$

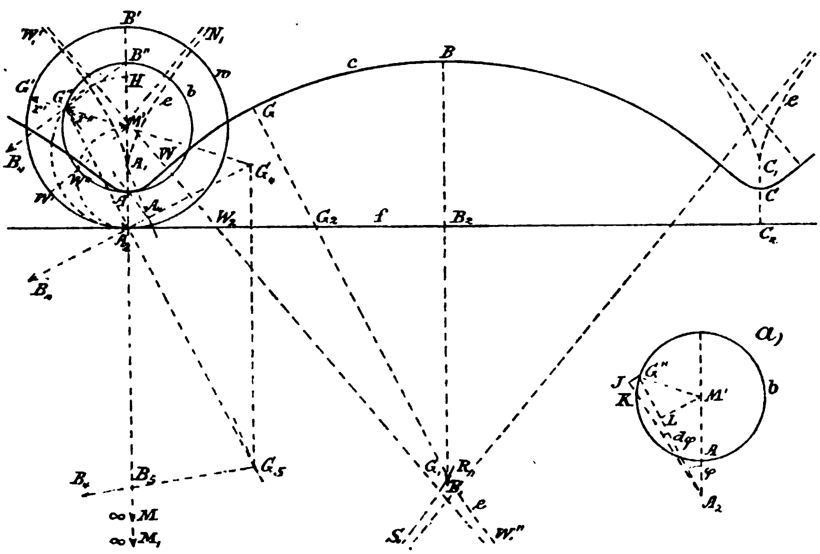
und

$$\text{Bog. } BA = 4\,\frac{r'}{r}\,(r - r').$$

*Zus.* Wird der wälzende Kreis halb so groß als der feste, so *wird die Hypocykloide zu einer Geraden,* nämlich zu dem Durchmesser $AE$ des $f$. Denn es ist dann Bog. $AP' = \frac{1}{2}$ Bog. $AQ'$, daher auch Bog. $CA = \frac{1}{2}$ Bog. $CQ$, oder $CQ \perp MA$; ferner Sehne $AP' = \frac{1}{2}$ Sehne $AQ'$, daher auch $CP = \frac{1}{2}$ Sehne $CQ$, oder $P$ ein Punkt der $MA$.

**322.** *Die geschweifte Cykloide.* Es sei die Gerade $f$ die Bahnlinie, $w$ der wälzende Kreis, $M'$ dessen Mittelpunkt und $A_2M' = r'$ dessen Halbmesser, $A_2$ der Berührungspunkt von $f$ und $w$, $A$ der Fig. 140.

Fig. 140.




beschreibende Punkt, welcher im Inneren von $w$, also auf entgegengesetzter Seite von $w$ liegt, wie der (unendlich ferne) Mittelpunkt von $f$. Durch $A$ legen wir aus $M'$ einen Kreis $b$, den s. g. *beschreibenden Kreis,* dessen Halbmesser $M'A = r''$ ist.

Um einen Punkt $G$ der Kurve $c$ zu erhalten, trage man auf $f$ und $w$ von $A_2$ aus in entgegengesetztem Sinne $A_2G_2 =$ Bog. $A_2G'$ auf, ziehe den Halbmesser $M'G'$ und schneide ihn mit $b$ in $G''$. Denkt man sich wieder das Rollen ersetzt durch eine Drehung um $M'$, bis $A_2$ nach $G'$, also $A$ nach $G''$ gelangt, und durch eine darauf folgende Parallelverschiebung in der Richtung von $f$, bis $A_2$ nach $G_2$ kommt, so gelangt $G''$ nach $G$. Man erhält $G$, wenn man $G_2G \;\#\; A_2G''$ macht.

Den *Krümmungsmittelpunkt* $G_1$ der $c$ in $G$ bestimmt man nach Nr. 309, indem man die $A_2G_4 \perp A_2G''$ zieht, sie mit $G''M'$ in $G_4$

schneidet, $G_4G_5 \perp f$ (nach dem unendlich fernen Mittelpunkte $M$ der $f$) zieht, mit $A_2G''$ in $G_5$ schneidet und auf $GG_2$ die $G_2G_1 = A_2G_5$ aufträgt.

**323.** *Die besonderen Punkte* der Kurve $c$ sind folgende:

1) Die *Scheitel* $A$, $C$ und $B$, welche aus den Punkten $A$ und $B''$ des Kreises $b$ entstehen, die auf $A_2M'$ liegen. Man macht auf $f$ die Strecke $A_2C_2 =$ Umf. $w$, zieht $C_2C \# A_2A$; ebenso $A_2B_2 = \frac{1}{2}$ Umf. $w$, $B_2B \# A_2B''$. Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $A_1$, $C_1$, $B_1$ erhält man nach Nr. 310, 6), wenn man die auf irgend einer schief gegen $A_2M'$ durch $A_2$ gelegten Geraden schon bestimmten Punkte, wie $G''$, $G_5$, benutzt (als welche auch die Fußpunkte der aus $M'$ und dem unendlich fernen $M$ auf $A_2G''$ gefällten Senkrechten dienen könnten, Nr. 310, 7)). Man zieht nämlich $AG''$ bis $A_4$ auf $A_2G_4$, dann $A_4G_5$ bis $A_1$ auf $AM'$ und macht $CC_1 \# AA_1$. Entsprechend $B''G''B_4$, $B_4G_5B_5$, $B_1$.

2) Der *Wendepunkt* $W$ der $c$, für welchen der Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt. $M'$ als beschreibender Punkt erzeugt eine zu $f$ parallele Gerade, welche im $M'$ einen unendlich großen Krümmungshalbmesser und einen Wendepunkt besitzt. Daher ist $M'$ ein Punkt des Wendekreises (310, 9)), $M'A_2$ ist derselbe, und sein Schnittpunkt $W''$ mit $b$ ist ein Wendepunkt der von $W''$ beschriebenen Kurve. Der Wendepunkt $W$ der von $A$ beschriebenen Kurve wird aus $W''$ in der angegebenen Weise gefunden ($M'W''W'$, $A_2W_2 =$ Bog. $A_2W'$, $W_2W \# A_2W''$).

$W$ läßt sich auch durch die Betrachtung bestimmen, daß in ihm als Wendepunkt die Tangente und daher auch die Normale eine größte oder kleinste Neigung gegen $f$ besitzt, daß dies auch von der Parallelen $A_2W''$ zur Normale gilt, und daß diese Eigenschaft unter den Linien, welche von $A_2$ nach einem Punkte des Kreises $b$ gehen, der Tangente zukommt. $A_2W''$ ist aber auch nach der ersten Konstruktion diese Tangente aus $A_2$ an $b$.

**324.** 3) Zwischen $B$ und $W$ könnte sich noch ein *Punkt größter Krümmung* der $c$ ergeben. Er entstehe aus $G''$, wozu der Krümmungsmittelpunkt $G_5$ gehört. $G''$ muß auf dem Kreise $b$ so bestimmt werden, daß der Krümmungshalbmesser $G_5G'' = G_1G = k$ ein größter ist. Finden wir, daß $G$ der einzige zwischen $W$ und $B$ liegende Punkt von größtem oder kleinstem Krümmungshalbmesser $G_1G$ ist, so folgt aus der Nachbarschaft zu $W$, worin $k$ unendlich, daß $G_1G$ ein kleinster, sodann daß $B_1B$ ein größter ist. Wir wollen die Untersuchung allgemein führen, ohne $r = \infty$ zu setzen, damit wir das Ergebnis nachher auch auf die geschweifte Kreisevolvente anwenden können. Setzt man, wie in Nr. 309, $A_2G''$

$= p$, $G_5 A_2 = q$, also $k = p + q$, ferner $\sphericalangle M' A_2 G'' = \varphi$, so gilt hier zufolge der dortigen Gleichung (2):

$$q = \frac{p r r' \cos\varphi}{p(r + r') - r r' \cos\varphi}.$$

Differenzirt man nach $\varphi$ und beachtet, daß $p$, $q$ und $\varphi$ veränderlich, so erhält man nach einer Vereinfachung

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{1}{(p(r+r') - rr' \cos\varphi)^2} \left\{ -r^2 r'^2 \cos^2\varphi \frac{dp}{d\varphi} - p^2 r r' (r + r') \sin\varphi \right\},$$

und daraus nach einer Vereinfachung

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{dp + dq}{d\varphi} = \frac{1}{(p(r+r') - rr' \cos\varphi)^2} \left\{ \frac{dp}{d\varphi} (p^2 (r+r')^2 - 2prr'(r+r')\cos\varphi) \right.$$
$$\left. - p^2 r r' (r + r') \sin\varphi \right\}.$$

Der Wert $dp : d\varphi$ ergibt sich am einfachsten geometrisch (Fig. $a$). Ist $\sphericalangle G'' A_2 K = d\varphi$, schneidet $A_2 K$ den Kreis $b$ in $K$ (benachbart dem $G''$), ist $G'' J \perp A_2 G''$ und $\perp A_2 K$, sowie $M' L \perp A_2 G''$, so sind die Dreiecke $KJG''$ und $M'LG''$ ähnlich, und es gilt

$$JK : JG'' = LM' : LG'',$$

oder, da $JK = dp$, $JG'' = -p d\varphi$, $LM' = r' \sin\varphi$, $LG'' = p - r' \cos\varphi$, auch

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{p r' \sin\varphi}{p - r' \cos\varphi}.$$

Führt man diesen Wert in dem Ausdrucke von $dk : d\varphi$ ein, setzt diesen dann gleich Null, so erhält man als Bedingung eines Maximums oder Minimums von $k$, nach Weglassung des Nenners,

$$0 = -pr' \sin\varphi \, [p^2 (r + r')^2 - 2prr' (r + r') \cos\varphi]$$
$$- (p - r' \cos\varphi) p^2 r r' (r + r') \sin\varphi.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch $\sin\varphi = 0$, d. i. für die Scheitel $A$ und $B$, und außerdem nur noch durch

$$p = \frac{3rr'}{2r + r'} \cos\varphi. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck wird für unsern Fall, d. i. für $r = \infty$,

$$p = \tfrac{3}{2} r' \cos\varphi.$$

Macht man nun $A_2 H = \frac{3}{2} r' = \frac{3}{2} A_2 M'$, und zieht über $A_2 H$ als Durchmesser einen Kreis, so gilt für jede aus $A_2$ gezogene Sehne $p$ desselben diese Gleichung; der Schnittpunkt dieses Kreises $A_2 H$ mit dem $b$ ist daher der gesuchte $G''$, aus welchem $G$ entsteht.

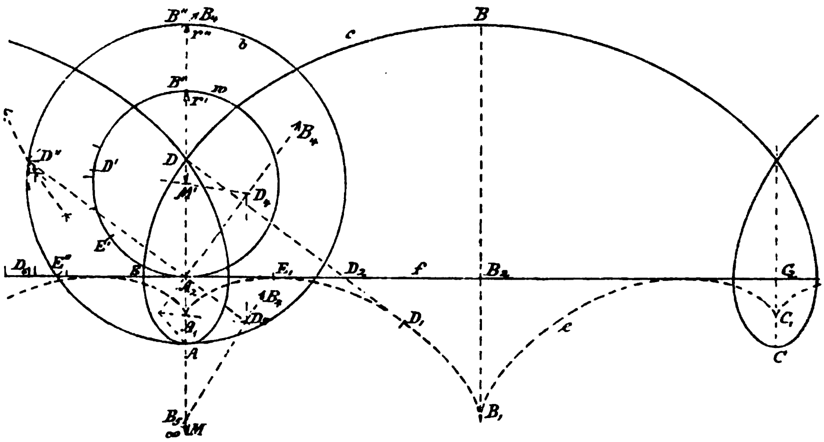
**325.** Die *Evolute e der geschweiften Cykloide* besteht für jeden

Gang der Kurve aus zwei ins Unendliche verlaufenden Ästen $N_1 A_1 W_1'$ und $W_1'' G_1 B_1 R_1 S_1$, die als im unendlich fernen Punkte $W_1$ zusammenhängend betrachtet werden können. Ein solcher Gang der Evolute besitzt *zwei unendlich ferne Punkte* $W_1$, $S_1$ und *vier Spitzen* $A_1$, $G_1$, $B_1$, $R_1$.

Zur *Verzeichnung* der $c$ mittelst Krümmungskreisen reicht die Konstruktion der besonderen Punkte gewöhnlich aus.

Fig. 141. **326.** *Die verschlungene Cykloide*, bei welcher der beschreibende Punkt $A$ im Äußeren von $w$ liegt, ist an entsprechenden Punkten mit übereinstimmenden Buchstaben wie die geschweifte bezeichnet. Bei

Fig. 141.



ihr ist, absolut genommen, $r'' > r'$, daher schneidet der Kreis $b$ die Hilfskreise $A_2 M'$, $A_2 H$ der Fig. 140 nicht, und die Punkte $W$ und $G$ kommen auf der Kurve $c$ nicht vor. Jeder Gang derselben besitzt einen *Scheitel* $A$ größter und einen $B$ kleinster Krümmung, und jeder Gang der *Evolute* zwei Spitzen $A_1$, $B_1$.

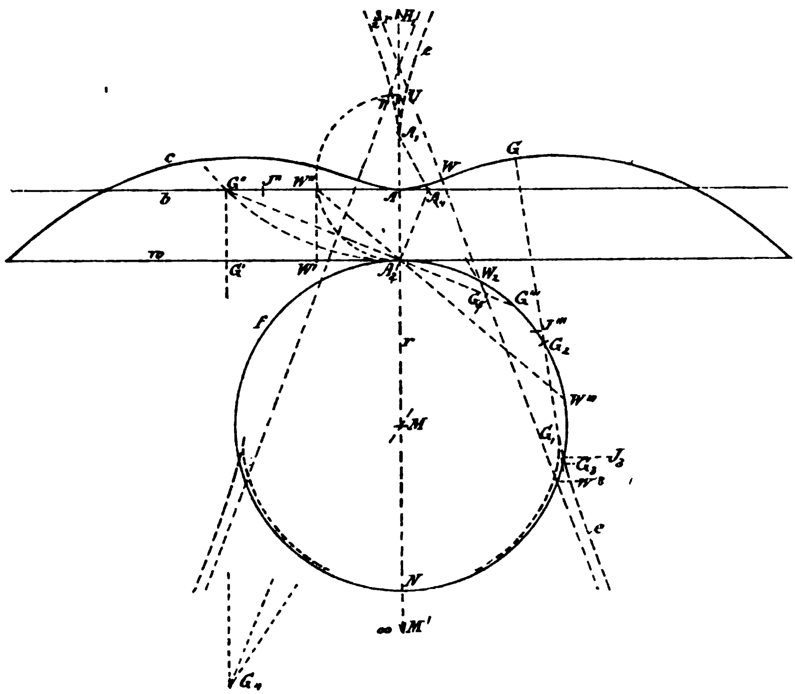
Ein *bemerkenswerter Punkt* der $c$ ist ihr Schnittpunkt $E$ mit der Bahnlinie $f$; er wird aus dem Schnittpunkte $E''$ des $b$ mit $f$ erhalten, wenn man $M'E''$ mit $w$ in $E'$ schneidet, auf $f$ die $A_2 E_1$ = Bog. $A_2 E'$ aufträgt, und dann aus $E_1$ mit $A_2 E''$ als Halbmesser den Krümmungskreis zieht, der auf $f$ den Punkt $E$ einschneidet. In $E_1$ berührt die Evolute die $f$.

Der *Doppelpunkt* $D$ der $c$ liegt auf deren Symmetrielinie $A_2 M'$. Er entsteht aus dem Punkte $D''$ des $b$, welcher so liegt, daß wenn man $D'' D_6 \perp f$ fällt und $M'D''$ mit $w$ in $D'$ schneidet, $A_2 D_6$ = Bog. $A_2 D'$ ist. Denn dreht man zuerst $w$ und $b$ um $M'$, bis $A_2$ nach $D'$ und $A$ nach $D''$ kommt, und verschiebt dann $w$ parallel zu $f$

um Bog. $A_2D'$, so gelangt, da $A_2D_6 =$ Bog. $A_2D'$, $D_6$ nach $A_2$ und $D''$ in die $A_2M'$ ($\parallel D_6D''$) nach $D$. Man kann $D''$ durch eine Fehlerkurve ermitteln, bestimmt durch die Schnittpunkte von Senkrechten auf $f$ und von Strahlen aus $M'$, welche bezw. auf $f$ und auf $w$ von $A_2$ aus in gleichem Sinne gleiche Strecken und Bogen abschneiden.

**327.** *Die geschweifte Kreisevolvente.* Die Bahnlinie $f$ ist ein Fig. 142.
Kreis, die wälzende Linie $w$ eine Tangente desselben, $A_2$ ihr Berührungspunkt, der beschreibende Punkt $A$ liegt mit $M$ auf entgegengesetzter Seite von $w$, der beschreibende Kreis $b$ wird zu der durch

Fig. 142.




$A$ gezogenen Parallelen zu $w$. Trägt man auf $f$ und $w$ von $A_2$ aus in entgegengesetztem Sinne $A_2G' =$ Bog. $A_2G_2$ auf, verschiebt $A_2$ in $w$ nach $G'$, wobei $A$ in $b$ nach $G''$ kommt, wenn $G'G'' \parallel A_2A$, und dreht dann $w$ und $b$ um $M$, bis $A_2$ nach $G_2$ kommt, so gelangt $G''$ nach einem Punkte $G$ der $c$. Man erhält $G$, wenn man $G''A_2$ mit $f$ noch in $G'''$ schneidet, Bog. $G_2G_3 =$ Bog. $A_2G'''$ macht, und auf der Geraden $G_3G_2$ die $G_2G = A_2G''$ aufträgt.

Den *Krümmungsmittelpunkt* $G_1$ der $c$ in $G$ bestimmt man auf ihrer Normalen $GG_2$ nach Nr. 309, indem man die $A_2G_4 \perp A_2G''$ zieht, sie mit $G''G'$ (gehend nach dem unendlich fernen Mittelpunkte

$M'$ des $w$) in $G_4$ schneidet, ebenso $G_4 M$ mit $A_2 G''$ in $G_5$, und auf $G G_2$ die $G_2 G_1 = A_2 G_5$ aufträgt.

**328.** *Die besonderen Punkte* der $c$ sind:

1) Der *Scheitel* $A$; den Krümmungsmittelpunkt $A_1$ erhält man nach Nr. 310, 6) aus $G''$ und $G_5$, wenn man die $A_2 G_4$ mit $A G''$ in $A_4$, und die $A_4 G_5$ mit $MA$ in $A_1$ schneidet.

2) Der *Wendepunkt* $W$ ergibt sich aus der Formel (2) der Nr. 309, worin $r' = \infty$ zu setzen ist, für $q = \infty$. Dann wird $p = r \cos \varphi$. Macht man daher auf $MA_2$ die $A_2 U = r$, so ist der Kreis vom Durchmesser $A_2 U$ der Wendekreis (310, 9)), und jeder seiner Schnittpunkte mit $b$, so $W''$, liefert einen Wendepunkt $W$ der $c$ ($W'' W' \perp b$, $W'' A_2 W'''$, Bog. $A_2 W_2 = A_2 W'$, $W_2 W_3 = A_2 W'''$, $W_3 W_2 W = W''' A_2 W''$).

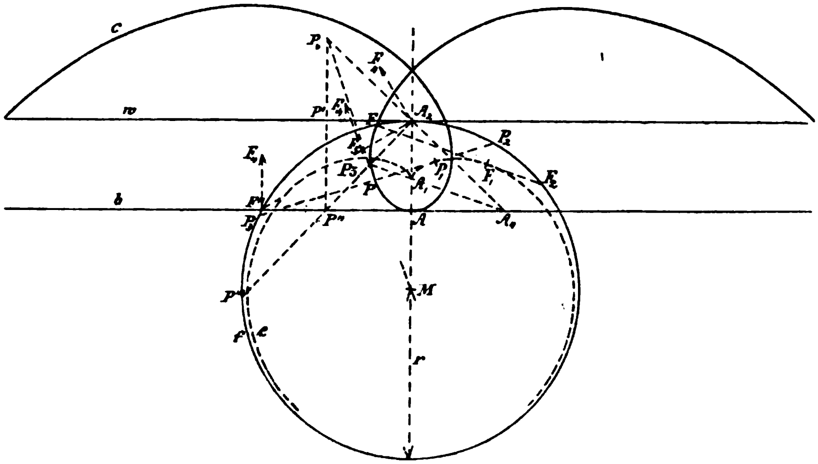
3) Ein *Punkt $G$ größter Krümmung* außer dem Scheitel $A$ wird nach Formel (1) der Nr. 324 gefunden, wenn man in derselben $r' = \infty$ setzt; dann wird $p = 3 r \cos \varphi$. Macht man daher auf $MA_2$ die $A_2 H = 3r$, oder, da $H$ nicht erreichbar, $A_2 H_1 = \frac{3}{2} r$, beschreibt über $A_2 H$ als Durchmesser, oder aus $H_1$ durch $A_2$, einen Kreis, schneidet denselben mit $b$ in $G''$, so ist $A_2 G'' = 3 r \cos \varphi$, und aus $G''$ entsteht in der angegebenen Weise der Punkt $G$ größter Krümmung der $c$ und die Spitze $G_1$ der Evolute $e$.

**329.** Liegt $J''$ auf $b$ so, daß auf der Geraden $J'' A_2 J'''$ die $A_2 J'' = A_2 J'''$ (wodurch Abst. $J''' w = A_2 A$), so wird $J''' J'' J_4$ (nicht verzeichnet) ein gleichschenkliges mit $J''' A_2 M$ ähnliches Dreieck; $J_4 J'''$ geht dann durch $M$, $J_5$ fällt in $J'''$ auf $f$ und man erhält daraus einen *Schnittpunkt* $J_3$ der $e$ mit $f$. Entfernt sich dann $J''$ auf $b$ von $A$, so fällt $J_5$ ins Innere des Kreises $f$, und nähert sich samt der Sehne $A_2 J'''$ dem $f$ bis auf jeden Grad der Annäherung. Daher nähert sich die Evolute $e$ dem Kreise $f$ asymptotisch, und zwar in unendlich vielen Windungen. — $e$ besteht aus einem Aste mit der Spitze $A_1$, und aus zweien zu $f$ asymptotischen Ästen mit je einer Spitze, wie $G_1$. Rückt $A$ von $A_2$ weg über $U$ hinaus, so verschwinden die Wendepunkte und der erste Ast der Evolute.

Zeichnet man aus $M$ einen Kreis durch $A$, so wird derselbe stets von der beweglichen $b$ berührt. Der Abstand des auf $b$ bleibenden beschreibenden Punktes von dem Berührungspunkte ist dann offenbar gleich dem von diesem beschriebenen Kreisbogen, *vervielfacht mit dem Verhältnisse* $MA_2 : MA$. Die Kurve kann daher als eine Kreisevolvente angesehen werden, bei welcher die Tangentenlänge gleich dem abgewickelten Kreisbogen ist, dieser multiplicirt mit einer Verhältniszahl, welche bei der geschweiften Evolvente kleiner, bei der verschlungenen größer als Eins ist.

**330.** *Die verschlungene Kreisevolvente.* Ein allgemeiner Punkt $P$ mit $P_1$, und der Scheitel $A$ der $c$ mit der Spitze $A_1$ der $e$ sind, wie bei der geschweiften, bestimmt; der Doppelpunkt kann durch eine Fehlerkurve, wie bei der verschlungenen Cykloide, erhalten werden. Fig. 143.

Fig. 143.



Der Schnittpunkt $F$ der $c$ mit $f$ entsteht aus dem Schnittpunkte $F''$ der $b$ mit $f$. Die Evolute schließt sich wieder dem Kreise $f$ asymptotisch von innen an. — Rückt $A$ in $M$, so geht $b$ stets durch $M$ und es wird, da $AP'' = A_2P_2$ ist, die Bewegung des $P''$ auf $b$ gegen $M$ mit der Drehungsbewegung des $b$ proportional. Die Kurve $c$ wird dann zu einer *Archimedischen Spirale*, welche daher als besonderer Fall der verschlungenen Kreisevolvente angesehen werden kann. Betrachten wir sie aber auch in ihrer einfachsten Entstehungsweise.

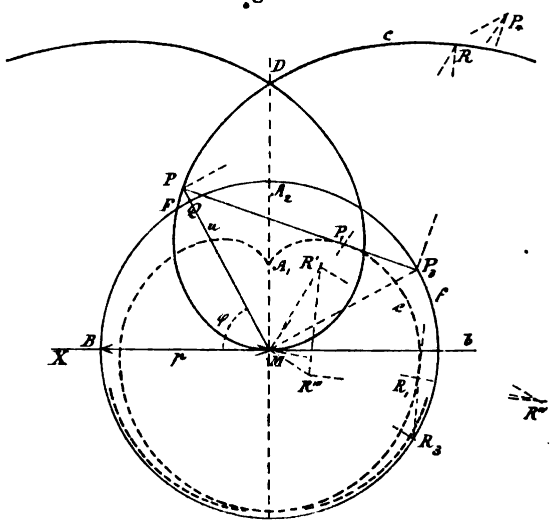
**331.** *Die Archimedische Spirale.* Dreht sich eine Gerade in einer Ebene um einen Punkt $M$ und bewegt sich gleichzeitig ein Punkt $P$ auf der Geraden, so beschreibt $P$ eine Kurve, und man nennt $M$ den *Pol* der Kurve, $MP = u$ den *Leitstrahl* (radius vector) von $P$, den Winkel $XMP = \varphi$ des Leitstrahles mit einer festen Geraden $MX$, gemessen durch den Bogen vom Halbmesser 1, den *Polarwinkel* von $P$, $MX$ die *Polaraxe*. $u$ und $\varphi$ heißen die *Polarkoordinaten* von $P$. Die entstehende Kurve ist bestimmt, wenn die Abhängigkeit des $u$ von $\varphi$ gegeben ist, und sie heißt die *Archimedische Spirale*, wenn $u$ in einem unveränderlichen Verhältnisse zu $\varphi$ steht, oder wenn gilt Fig. 144.

$$u = p\varphi,$$

wobei $p$ eine Unveränderliche und der *Parameter* der Spirale ge-

nannt wird. Für $\varphi = 0$ ist auch $u = 0$, so daß die Kurve $c$ durch $M$ geht; und man erhält für irgend einen Strahl $MP$ den Punkt $P$ der Kurve, wenn man aus $M$ mit $MB = p$ als Halbmesser den *Parameterkreis* $f$ zieht und dessen zwischen $MX$ und $MP$ liegenden Bogen $BQ = p\varphi$ als $MP = u$ aufträgt. Für $\varphi = 1$ (entsprechend $57^0\ 18'$) ist $u = p$, oder es schneidet die $c$ jenen Kreis in $F$, wenn Bog. $BF = p$; für $\varphi = \pm 2\pi$ ist $u = \pm p 2\pi$, und um diese Länge nimmt der Leitstrahl bei jedem Umgange zu, d. h. bei jedem Kurvenbogen, bei welchem sich $\varphi$ um $2\pi$ ändert.

Fig. 144.



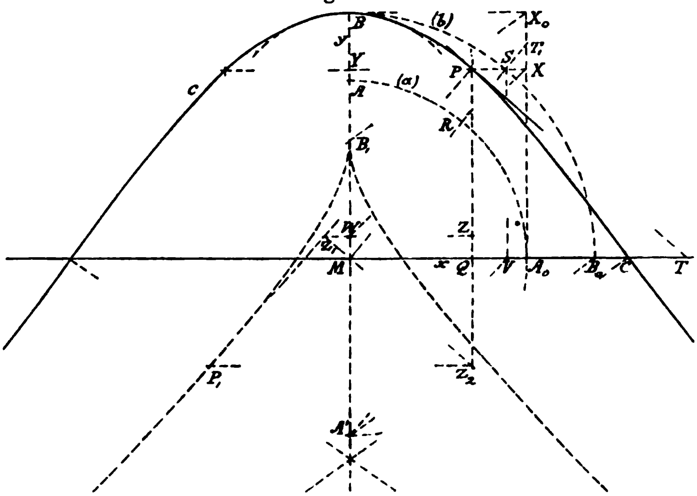
**332.** Um die *Tangente* und die *Evolute* der $c$ zu bestimmen, gehen wir auf ihre Entstehung als verschlungene Kreisevolvente zurück. Da nach Nr. 330, Fig. 143, auf dem Bahnkreise $f$ durch den Berührungspunkt $A_2$ der $w$ und dann auch durch seine Schnittpunkte mit $b$ Bogen gleich der Zunahme von $AP''$ durchlaufen werden, auf jedem anderen Kreise aber nicht, und da dies in Fig. 144 für den Parameterkreis $f$ gilt, so ist dieser der Bahnkreis. Betrachtet man in Fig. 143 $P''$ als beschreibenden Punkt, so ist $A_2$ der Berührungspunkt der $w$, $P''A_2$ die Normale und $P_5$ der Krümmungsmittelpunkt der $c$. Danach geht die *Normale* $PP_3$ (Fig. 144) der Spirale durch den Punkt $P_3$ des $f$, wenn $MP_3 \perp MP$ im Sinne der Öffnung der Spirale gezogen ist ($P''AA_2 = 90^0$ in Fig. 143). Der *Krümmungsmittelpunkt* $P_1$ ist, entsprechend der Fig. 143, der Schnittpunkt von $PP_3$ mit $MP_4$, wenn $PP_4 \perp MP$ und $P_3P_4 \perp PP_3$ gezogen wurde. Fällt für einen Punkt $R$ der $c$ der Punkt $R_4$ über die Zeichenfläche hinaus, so bildet man eine zur ursprünglichen ähnliche Figur aus $M$ als Ähnlichkeitspunkt. Man bestimmt daher, wie vorher, $R_3$ auf $f$ mittelst $MR_3 \perp MR$, zieht $R'R''' \parallel RR_3$, schneidet sie mit $MR$ und $MR_3$ bezw. in $R'$ und $R'''$, bestimmt $R^{IV}$ durch $R'R^{IV} \perp MR$, $R'''R^{IV} \perp RR_3$, so liegt $R_1$ auf $MR^{IV}$.

$M$ ist der *Scheitel* der Kurve und der Krümmungshalbmesser $MA_1$ ist $= \frac{1}{2} p$, da in Formel (2) der Nr. 309 jenes $p = -r$, $r' = \infty$, $\varphi = 0$, daher $q = \frac{1}{2} r$, also in unserer Figur $A_2 A_1 = \frac{1}{2} A_2 M$ wird. — Doch läßt sich auch leicht unmittelbar einsehen, daß der Krümmungshalbmesser in $M$ oder $MA_1 = k = \frac{1}{2} p$ ist, weil nämlich, wenn $\varphi$ der Winkel des Strahles $MB$ und seines benachbarten Strahles ist, das Bogenelement der Kurve als Leitstrahl und als Element des Krümmungskreises ausgedrückt wird durch $\varphi p = 2 \varphi k$.

Alle *Doppelpunkte* der $c$ liegen auf der Symmetrielinie $MA_2$; der nächste bei $M$ liegt in $D$ mit $MD = p \frac{\pi}{2} =$ Bog. $BA_2$. — Mit $M$, $F$, $D$ und weiteren Punkten in Zwischenräumen von $\frac{1}{4}$ Umgang, sowie den zugehörigen Krümmungskreisen, deren Mittelpunkte sich dem Parameterkreise immer mehr nähern, läßt sich die Kurve verzeichnen. Dabei würde man erhalten $FF_1 = \frac{3}{2} FF_3$.

**333.** Läßt man bei der geschweiften Cykloide $c$ (322) den wälzenden Kreis unendlich werden und bildet dann die affine Figur der $c$ durch Verkleinerung der unendlichen Ganglänge $A_2 C_2$ zu einer endlichen, so wird $c$ zu einer *Sinus- oder Cosinuslinie.* Wir wollen

Fig. 145.




diese beiden Linien, welche sich nur durch den Ursprung ihrer Koordinaten unterscheiden und schon in Nr. 48 und 165 betrachtet wurden, einer späteren Benutzung halber untersuchen. Ihre Gleichung für rechtwinklige Koordinaten ist

$$y = b \cos \frac{x}{a} .$$

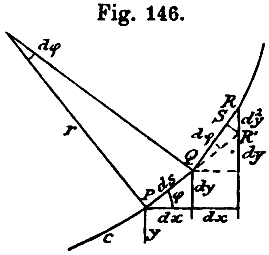
Fig. 145. Sind $MC$ und $MA$ die $x$- und $y$Axe, und zieht man aus $M$ als Mittelpunkt die Kreise $(a)$ und $(b)$ mit den Halbmessern $a$ und $b$, schneidet sie mit der $+x$- und $+y$Axe bezw. in $A_0$, $B_0$ und $A$, $B$, zieht aus $M$ einseitig einen Strahl, welcher $(a)$ und $(b)$ in $R$ und $S$ trifft, so erhält man einen Punkt $P$ der Cosinuslinie $c$ durch seine Koordinaten $x = MQ$, $y = QP$, wenn man $MQ =$ Bog. $AR$, $QP = VS$ macht, wobei $V$ die Projektion von $S$ auf $x$ ist ($SP \parallel x$); denn es ist $VS = b \cos(AR : a) = b \cos(x : a) = y$. Schneidet die Tangente der $c$ in $P$ die $x$Axe in $T$, so ist $TQ$ die Subtangente; man erhält aber durch Differentiation der obigen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\sin\frac{x}{a}; \qquad TQ = y\frac{dx}{dy} = -a\cot\frac{x}{a}.$$

Daher bestimmt man die Tangente entweder durch $QT = A_0T_1$, wenn $A_0T_1 \perp x$ und $T_1$ auf $MR$, weil $A_0T_1 = a\cot(AR : a) = a\cot(x : a)$, oder (wenn $A'$ der Schnittpunkt von $(a)$ mit $-y$) durch $PT \perp A'V$, weil $QP : TQ = y : TQ = MV : A'M = b\sin(x : a) : -a = dy : dx$. Dabei wurde $-a$ gesetzt, weil bei der Drehung um $M$ die $+y$ in $+x$, aber die $+x$ in $-y$ fällt. Letztere Konstruktion wird nie unbestimmt und enthält keine unerreichbaren Punkte. Die Normale $PP_1$ ist dann $\parallel VA'$.

Fig. 146. Zur Bestimmung des *Krümmungshalbmessers* $r$ der $c$ in $P$ benutzt man hier zweckmäßig die *Formel der Analysis*, die wir herleiten wollen. Sind $P$, $Q$, $R$ drei aufeinander folgende Punkte der Kurve $c$, deren Abscissen je um $dx$ verschieden sind, so gilt für die Tangenten der $c$ in $P$ und $Q$ bezw.

Fig. 146.




$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \frac{d(y+dy)}{dx} = \frac{dy + d^2y}{dx}.$$

Daraus folgt aber nach der Figur, wenn $R'S \perp QR$,

$$d\varphi = R'S : ds = R'R\frac{dx}{ds} : ds = \frac{dx\,d^2y}{ds^2}.$$

Hieraus ergibt sich, da $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

$$r = -\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = \mp\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},$$

wobei $-$ vorgesetzt wird, um die Krümmungshalbmesser für negative $d\varphi$, oder für Kurven, die gegen $+Y$ erhaben sind, positiv zu bezeichnen.

In unserem Falle ist

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{a^2}\left(a^2 + b^2 \sin^2 \frac{x}{a}\right),$$

und durch Differentiation von $(dy : dx)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2} \cos \frac{x}{a};$$

daher

$$r = \pm \frac{\left(a^2 + b^2 \sin^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{ab \cos \frac{x}{a}}.$$

Nun ist aber Fig. 145.

$$\left(a^2 + b^2 \sin^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = A'V = v, \qquad b \cos \frac{x}{a} = y,$$

daher auch

$$r = \frac{v^3}{ay} = a \frac{a}{y} \frac{v^3}{a^3}.$$

Man konstruirt diesen Ausdruck auf eine stets anwendbare Weise unter Benutzung der letzteren Form. Zu dem Ende schneidet man $PS$ mit $MA$ in $Y$ und mit $A_0T_1$ in $X$, zieht $XW \perp A_0Y$ bis $W$ auf $MA$, so ist $YW = YX(MA_0 : MY) = a(a:y)$. Dann zieht man die $WZZ_1 \parallel x$, und schneidet sie mit $PQ$ und $PP_1$ bezw. in $Z$ und $Z_1$, zieht $Z_1Z_2 \perp PP_1$ bis $Z_2$ auf $PQ$, und $Z_2P_1 \perp PQ$ bis $P_1$ auf $PP_1$, so ist $P_1$ der Krümmungsmittelpunkt. Denn es sind die Dreiecke $PZZ_1$, $PZ_1Z_2$, $PZ_2P_1$ ähnlich dem Dreiecke $A'MV$ (mit den Seiten $a$ und $v$), daher ist $PP_1 = PZ_2\,(v:a) = PZ_1\,(v:a)^2 = PZ\,(v:a)^3 = YW(v:a)^3 = a\,(a:y)\,(v:a)^3 = r$.

Für den *Scheitel* $B$ rückt $X$ in $X_0$ und $X_0B_1 \perp A_0B$ bestimmt sogleich den Krümmungsmittelpunkt $B_1$ auf $MA$, weil der ganze Linienzug $WZ_1Z_2P_1$ zu einem Punkte wird. Für den *Wendepunkt* $C$ wird $y = 0$, $r = \infty$; die Normale der $c$ in $C$ ist eine Asymptote der Evolute und läuft $\parallel B_0A'$.

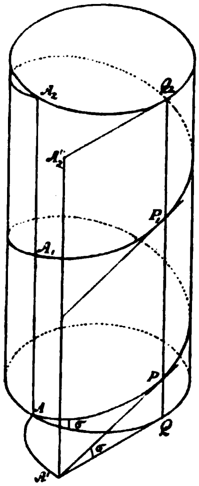
Für $a = b$ könnte man die *Cosinuslinie* als die *gemeine*, im Gegensatze zur *allgemeinen*, bezeichnen. Bei ihr wird für den Scheitel $B$: $v = a$, $y = b = a$, $r = a$, $B_1$ fällt in $M$; die Asymptoten bilden $45^0$ mit der $x$Axe. — Ist $b \gtrless a$, so fällt $B_1$ bezw. auf dieselbe oder auf die entgegengesetzte Seite von $M$, wie $B$.

### II. Die Schraubenlinie.

**334.** Eine kürzeste oder geodätische Linie eines Cylinders Fig. 147. heißt eine *Schraubenlinie*; der Cylinder heißt dann der Schraubencylinder. Die bei der Abwickelung des Cylinders entstehende Verwandelte der Schraubenlinie ist daher eine Gerade, und umgekehrt wird jede Gerade einer Ebene, welche man mit dieser auf einen Cylinder aufwickelt, zu einer Schraubenlinie. So wird die Gerade $A'P$ der Ebene $A'QQ_2A_2'$, welche einen Cylinder entlang $QQ_2$ be-

rührt, beim Aufwickeln der Ebene zur der Schraubenlinie $APA_1P_1A_2$, und $A'P$ und $AP$ berühren sich in $P$. Da die Verwandelte $A'P$ als Gerade gleiche Winkel mit allen Verwandelten der Erzeugenden des Cylinders bildet, so schneidet auch die Schraubenlinie selbst die Erzeugenden des Cylinders unter demselben unveränderlichen Winkel, und jede zu den Erzeugenden senkrechte Ebene unter einem Winkel $\sigma$, welcher jenen Winkel zu $90^0$ ergänzt und die *Neigung der Schraubenlinie* heißt.

Fig. 147.




Schneidet eine solche zu den Cylindererzeugenden senkrechte Ebene den Cylinder in der Kurve $QA$, die genannte Berührungsebene in der Tangente $QA'$ der $QA$, die Schraubenlinie und ihre Tangente $PA'$ bezw. in $A$ und $A'$, so ist das geradlinige Dreieck $PQA'$ die Abwickelung des teilweise krummlinigen $PQA$, und es ist $QA' = \text{Bog.}\, QA$, $PA' = \text{Bog.}\, PA$. Man nennt auch für den Punkt $P$ und die Ebene $QAA'$ die Strecken $PA'$ und $QA'$ bezw. die *Tangente* und die *Subtangente* der Schraubenlinie, und bemerkt, daß bei fester Ebene $QAA'$, aber bei wechselndem Punkte $P$ der Ort $AA'$ des Punktes $A'$ die *Evolvente* sowohl des senkrechten Cylinderschnittes ist, als auch aller Schraubenlinien des Cylinders, welche durch die Spitze $A$ der Evolvente gehen. Da andererseits jede Erzeugende des Cylinders die Schnittlinie je zweier auf einander folgenden Normalebenen der Kurve $AA'$ ist, so ist umgekehrt der Cylinder die *Evolutenfläche* der Kurve $AA'$ und alle durch $A$ gehenden Schraubenlinien des Cylinders sind die *Evoluten* der ebenen Kurve $AA'$ (44).

In dem bei $Q$ rechtwinkligen Dreiecke $A'QP$ ist der Winkel bei $A'$ gleich der Neigung $\sigma$ der Schraubenlinie. Bezeichnet man nun die $QP$ mit $z$, die $A'Q = \text{Bog.}\, AQ$ mit $s$, so ist

$$z = s \operatorname{tg} \sigma;$$

oder die auf einem senkrechten Schnitte des Cylinders von einem Punkte der Schraubenlinie aus gezählte krummlinige *Abscisse* $AQ = s$ und die auf der Erzeugenden gemessene *Ordinate* $QP = z$ stehen in unveränderlichem Verhältnisse; sie wachsen daher auch proportional mit einander.

**335.** Ist der *Cylinder geschlossen*, so wird jede Erzeugende unendlich oft von der Schraubenlinie geschnitten. Ein Stück derselben zwischen zwei auf einander folgenden Schnittpunkten heißt ein Schraubengang, das eingeschlossene Stück der Erzeugenden

$AA_1$ oder $A_1A_2$ oder $PP_1$ die *Höhe des Schraubenganges oder die Ganghöhe h.* Sie ist überall dieselbe; denn ist $p$ der Umfang der senkrechten Schnittkurve ($= AQA$), so gilt ($z = h$, $s = p$) $h = p \operatorname{tg} \sigma$. Der wichtigste und in der Technik allein vorkommende Fall, der auch ausschließlich in der Folge betrachtet werden soll, ist der, in welchem der Schraubencylinder ein Umdrehungscylinder, also der senkrechte Schnitt ein Kreis ist; die Cylinderaxe heißt dann auch die *Schraubenaxe*, der Grundkreis des Cylinders auch der *Grundkreis der Schraubenlinie*, und der Halbmesser dieses Kreises auch der *Halbmesser der Schraubenlinie.* Sei derselbe $r$, so ist

$$p = 2\pi r \quad \text{und} \quad h = 2\pi r \operatorname{tg} \sigma .$$

Setzt man

$$h_0 = \frac{h}{2\pi} = r \operatorname{tg} \sigma ,$$

so heißt $h_0$ die *reducirte Ganghöhe* oder der *Parameter der Schraubenlinie.* Sie ist die Ordinate $z$, welche zu $s = r$, also zu einem Bogen des Grundkreises von $57^0\ 18'$ gehört.

*Die Schraubenlinie des Umdrehungscylinders ist in sich selbst verschiebbar,* oder zwei gleich lange Stücke derselben sind unter einander kongruent. Denn die durch die Anfangspunkte beider gehenden senkrechten Cylinderschnitte sind gleiche Kreise, können also samt den Anfangspunkten zur Deckung gebracht werden; dann fallen auch alle Erzeugenden beider Cylinderstücke paarweise der Richtung und der Länge der Ordinaten nach ($z = s \operatorname{tg} \sigma$) in einander; demnach auch die Schraubenlinien. — Diese Eigenschaft der Verschiebbarkeit in sich selbst besitzt nur noch der Kreis und die Gerade, die beide aber als besondere Arten der Schraubenlinie angesehen werden können.

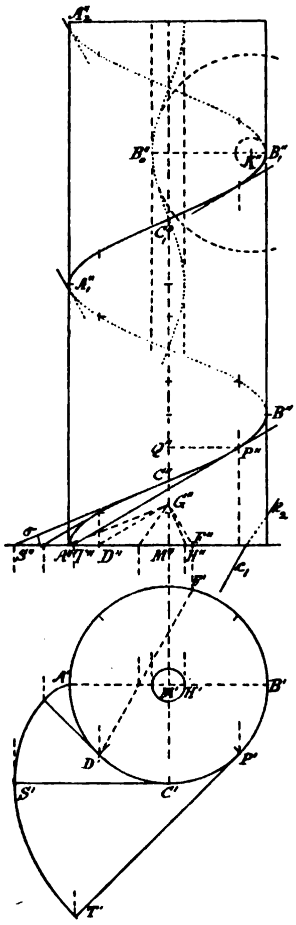
Man kann die Schraubenlinie auch durch die Bewegung eines Punktes entstehen lassen, der sich um eine Axe dreht und zugleich parallel zur Axe verschiebt, derart daß der Winkel einer *Drehung* mit der Länge der gleichzeitigen *Schiebung* in unveränderlichem Verhältnisse steht. Eine solche Bewegung nennt man eine *Schraubenbewegung.*

*Rechts gewunden* oder *rechtsgängig* nennt man eine Schraubenlinie, wenn sie, betrachtet von einer in der Schraubenaxe aufgestellten menschlichen Figur, gegen rechts abwärts geht; sonst *links gewunden* oder *linksgängig.* Dabei ist es gleichgültig, ob die Figur in dem einen oder in dem entgegengesetzten Sinne in die Axe gestellt ist.

**336.** *Aufg. Eine auf einem Umdrehungscylinder gelegene Schraubenlinie darzustellen, deren Axe senkrecht auf der* $\mathbf{P}_1$ *steht.*

Fig. 148. *Aufl.* Sei der Kreis $A'C'B'$ die erste Spur des Schraubencylinders, $A$ in $\mathbf{P}_1$ der Anfangspunkt und $h = A''A_1''$ die Ganghöhe einer rechts gewundenen Schraubenlinie, so teile man von $A'$ aus den Kreis in eine Anzahl $n (= 8)$ gleicher Teile, und in ebenso viele die Ganghöhe $A''A_1''$, lege durch die Kreisteilungspunkte die Erzeugenden des Cylinders und zeichne deren zweite Projektionen, trage auf der ersten nach $A$ von der $\mathbf{P}_1$ aus $\frac{1}{n}h$, auf der zweiten $\frac{2}{n}h$, auf der $m^{\text{ten}}$ $\frac{m}{n}h$ auf, so erhält man Punkte der zweiten Projektion der Schraubenlinie, deren erste Projektion der Grundkreis ist. Aus einem Gange $A''B''A_1''$ lassen sich die folgenden Gänge durch Weitertragen von $h$, $2h$, $3h$ ... von allen Punkten aus auf den Cylindererzeugenden bestimmen.

Fig. 148.



Die *Tangente an die Schraubenlinie* in einem Punkte $P$ findet man, wenn man auf der Tangente $P'T'$ an den Grundkreis die Länge $P'T' = \text{Bog.}\, P'A'$ zwischen $P'$ und der ersten Spur $A'$ der Schraubenlinie aufträgt. $T'$ ist dann die erste Spur der gesuchten Tangente, woraus sich $P''T''$ ergibt.

**337.** Die zweite Projektion der Schraubenlinie ist eine *Sinuslinie*; denn nimmt man die mittlere Erzeugende $C''C_1''$ der zweiten Projektion des Cylinders zur $x$Axe, den Kurvenpunkt $C''$ zum Koordinatenursprung, die $y$Axe senkrecht zur $x$Axe, so hat der Punkt $P''$ die Koordinaten $C''Q'' = x$, $Q''P'' = y$. Ist $r$ der Halbmesser des Grundkreises, so ist

$$x : \text{Bog.}\, C'P' = h : 2r\pi = h_0 : r$$

und
$$y = r \sin \frac{\text{Bog.}\, C'P'}{r},$$

woraus
$$y = r \sin \frac{x}{h} 2\pi = r \sin \frac{x}{h_0},$$

was die Gleichung der Sinuslinie bildet (333). Die $x$Axe enthält die *Wendepunkte* $C''$, $C_1''$ ... der Kurve.

**338.** *Aufg. An eine gegebene Schraubenlinie parallel einer gegebenen Ebene* **E** $(e_1 e_2)$ *eine Tangente zu legen.*

*Aufl.* Die parallel zu den Tangenten der Schraubenlinie durch einen Punkt gelegten Geraden bilden den Richtkegel ihrer Fläche. Derselbe ist hier ein Umdrehungskegel mit einer auf $\mathbf{P}_1$ senkrechten Axe; und macht man den Grundkreis $A'C'B'$ zu seiner ersten Spur, so erhält man seine Spitze $G$ $(M', G'')$ auf der Schraubenaxe etwa durch die parallel zu $SC$ durch $A$ gelegte Gerade $(A'M', A''G'')$. Die Höhe des Kegels ist

$$M''G'' = r \operatorname{tg} \sigma = h_0,$$

gleich der reducirten Ganghöhe (335). Sucht man nun vermittelst einer parallel zu **E** durch die Spitze $G$ des Kegels gelegten Ebene seine Erzeugenden $(M'D', G''D''$ und $M'F', G''F'')$, so sind diese zu **E** parallel, und man hat nur noch die zu diesen Erzeugenden parallelen Tangenten der Schraubenlinie zu ziehen, das sind zweimal unendlich viele Geraden, deren Berührungspunkte auf zwei (nicht vier) Erzeugenden des Schraubencylinders liegen. Parallel zu der ersten Projektion $M'D'$ (und $M'F'$) darf man nämlich nur diejenige Kreistangente $P'T'$ ziehen, welche als Tangente der Schraubenlinie gleichen Sinn der Neigung, wie $MD$ (bezw. $MF$) besitzt.

**339.** *Der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie.* Die *Schmiegungsebene* der Schraubenlinie in jedem ihrer Punkte steht senkrecht auf der Cylinderfläche (42), ihre Hauptnormale ist daher die Normale der Fläche, d. i. auch die Senkrechte, welche aus dem fraglichen Punkte der Kurve auf die Schraubenaxe gefällt wird. In ihr liegt der *Krümmungshalbmesser* $r_1$ der Kurve, den man erhält, wenn man beachtet, daß die Schmiegungsebene den Cylinder in einer Ellipse schneidet, deren Halbaxen $r : \cos \sigma$ und $r$ sind, und deren Krümmungshalbmesser im Scheitel der Axe $2r$ mit dem gesuchten übereinstimmt und ausgedrückt wird durch

$$r_1 = \frac{r^2}{\cos^2 \sigma} : r = \frac{r}{\cos^2 \sigma}.$$

Zieht man daher $G''H'' \perp A''G''$ bis $H''$ auf $A''M''$, so ist $A''M'' = r$, $A''G'' = r : \cos \sigma$, $A''H'' = r : \cos^2 \sigma = r_1$.

Dieselbe Formel besteht auch zwischen dem Krümmungshalbmesser $r_1$ irgend einer Kurve in einem ihrer Punkte und demjenigen $r$ ihrer senkrechten Projektion auf eine zu $r_1$ parallele Ebene, wenn $\sigma$ der Neigungswinkel ihrer Tangente gegen diese Ebene. Sie gilt daher auch für die zweite Projektion der Schraubenlinie in ihren Scheiteln $A''$, $B''$ ..., wobei der Neigungswinkel $90^0 - \sigma$ ist; dieser Krümmungshalbmesser ist daher (335)

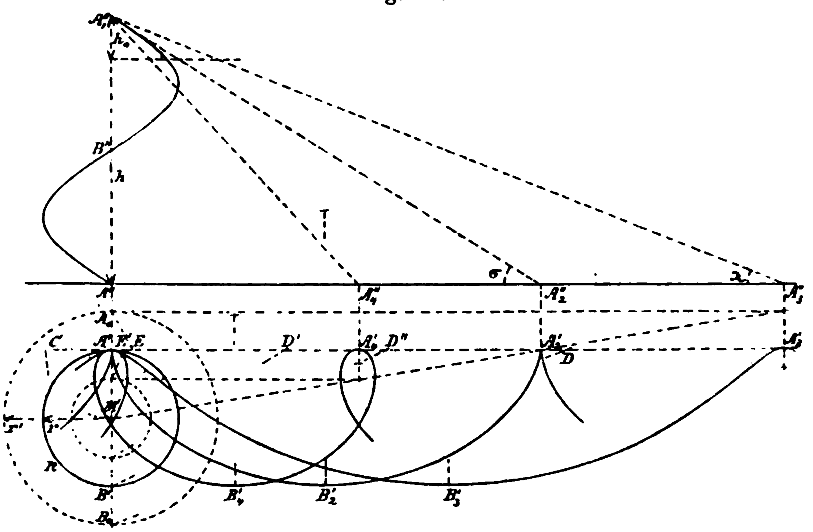
$$r_2 = r_1 \cos^2(90^0 - \sigma) = r_1 \sin^2 \sigma = r \operatorname{tg}^2 \sigma = \frac{h_0^2}{r} = M''H''.$$

Man bemerkt, daß diese Konstruktion des Scheitelkrümmungshalbmessers der Sinuslinie im wesentlichen mit derjenigen der Nr. 333 übereinstimmt.

**340.** Bewegt sich ein Punkt $A$ auf einer Schraubenlinie, so beschreibt der zu dem Punkte gehörige *Krümmungsmittelpunkt* $H$ der Kurve ($A''H'' = r_1$) ebenfalls eine Schraubenlinie ($C_1''B_0''$), welche mit jener gleiche Ganghöhe und gleichen Sinn besitzt, aber zum Halbmesser die $M''H'' = r_2$ hat; es ist daher $r r_2 = h_0^2$. $B_0$ ist der zu $B_1$ gehörige Scheitel derselben. *Die ursprüngliche Schraubenlinie und diejenige ihrer Krümmungsmittelpunkte sind reciprok*, oder die erste enthält auch die Krümmungsmittelpunkte der zweiten, wie die reciproke Formel $r r_2 = h_0^2$, oder das reciproke Konstruktionsdreieck $A''G''H''$ zeigt. Dabei ist die Neigung der zweiten $\sigma_1 = \sphericalangle M''H''G'' = 90^0 - \sigma$, und es gilt $\operatorname{tg}\sigma \,.\, \operatorname{tg}\sigma_1 = 1$. Endlich ist $K''$ der gemeinschaftliche Krümmungsmittelpunkt der zusammengehörigen Scheitel $B_1'$ und $B_0'$ der zweiten Projektionen beider Kurven. Denn für die erste ist der Krümmungshalbmesser $= H''M'' = B_1''K''$, für die zweite $= A''M'' = B_0''K''$.

Fig. 149. **341.** *Die schiefe Projektion der Schraubenlinie oder ihr Schatten bei Parallelbeleuchtung auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene* $\mathbf{P}_1$

Fig. 149.



*ist eine gemeine, eine geschweifte oder eine verschlungene Cykloide, je nachdem die Neigung $\lambda$ der Projicirenden gleich der Neigung $\sigma$ der Schraubenlinie, oder kleiner oder größer, als sie ist.*

Denkt man sich nämlich die Schraubenlinie durch Bewegung eines Punktes auf einem Kreise erzeugt, dessen Mittelpunkt zugleich auf einer zu seiner Ebene senkrechten Geraden fortschreitet, während das Verhältnis der beiden in derselben Zeit beschriebenen Wege unveränderlich ist, so kann man sich jene schiefe Projektion entstanden denken durch die Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, der stets in der Projektionsebene bleibt und mit seinem Mittelpunkte eine Gerade beschreibt, unter unveränderlichem Verhältnisse der beiden in derselben Zeit beschriebenen Wege. Dies ist aber das Entstehungsgesetz jener drei Rolllinien (322). Ist dabei die Bahn des Mittelpunktes während eines Umganges des Punktes auf dem beweglichen Kreise gleich dessen Umfang $k$ ($A'A_2' = k$), so ist die Cykloide $A'B_2'A_2'$ die gemeine und die Projicirende $A_1''A_2''$ eine Tangente der Schraubenlinie in $A_1$. In den andern Fällen entsteht eine geschweifte Cykloide $A'B_3'A_3'$, oder eine verschlungene $A'B_4'A_4'$, wobei die Längen $A'A_3'$ und $A'A_4'$ willkürlich angenommen werden können. Aus ihnen sind die in der Figur gezeichneten Halbmesser der in $\mathrm{P}_1$ auf einer Geraden rollenden Kreise durch Proportionalität bestimmt. Ist $r'$ der Halbmesser des rollenden Kreises, so ist

$$A''A_3'' = 2r'\pi = h \cot \lambda, \quad \text{oder} \quad r' = h_0 \cot \lambda.$$

Aus der schiefen Projektion kann man folgern: *Die senkrechte Projektion der Schraubenlinie auf irgend eine Ebene ist eine affine Figur einer gemeinen, einer geschweiften oder einer verschlungenen Cykloide*, wobei die Richtung der Affinitätsstrahlen parallel der geraden Bahnlinie läuft. Denn die senkrechte Projektion ist affin mit dem Schnitte des die Schraubenlinie projicirenden Cylinders mit einer zur Schraubenaxe senkrechten Ebene.

Die *Sinuslinie* (s. Fig. 148) erscheint dabei als besonderer Fall einer Affinen der geschweiften Cykloide, wenn das Verhältnis der Halbmesser des rollenden und des beschreibendes Kreises $r' : r = \infty$, das Affinitätsverhältnis aber $= 0$ ist (333). Oder die Sinuslinie wird von einem Punkte $P$ beschrieben, wenn sich ein Punkt $Q$ auf einem Kreise bewegt, dessen Mittelpunkt eine Gerade $g$ beschreibt, wenn bei beiden Bewegungen ein unveränderliches Verhältnis ihrer gleichzeitigen Wege besteht, und wenn $P$ die Projektion des $Q$ auf den zu $g$ senkrechten (sich parallel verschiebenden) Kreisdurchmesser ist.

**342.** Es sollen zunächst noch *die Krümmungshalbmesser $r_1$ der gemeinen, geschweiften und verschlungenen Cykloide in ihren Scheiteln $A$ und $B$* aus den Halbmessern $r$ und $r'$ bezw. des beschreibenden und des wälzenden Kreises unmittelbar abgeleitet werden, und daraus die ihrer affinen Kurven. Dreht sich der Kreis $k$ um seinen

Mittelpunkt $M'$ um einen unendlich kleinen Winkel, so daß $A'$ in der Richtung von $A'M'$ den unendlich kleinen Weg $x$ ($= 0^2$), in der darauf senkrechten Richtung den Weg $y$ ($= 0^1$) zurücklegt, so beschreiben $B_3'$ und $A_3'$ wegen der gleichzeitigen Verschiebung in der Richtung von $A'A_3'$ um $\pm y(r':r)$ bezw. die Wege $x$ und $y \pm y(r':r)$. Daher gilt für die Krümmungshalbmesser $r_1$ der Kurve in $B_3'$ und $A_3'$ (208)

$$r_1 : r = y^2 \left(\frac{r \pm r'}{r}\right)^2 : y^2, \qquad r_1 = \frac{(r \pm r')^2}{r}.$$

Macht man daher auf $A'A_3'$ die $A'C = A'M' = r$, so ist wegen $A'B_0 = r + r'$ und $A'A_0 = r - r'$, $r_1 = A'D$ oder $= A'E$, wenn $D$ und $E$ auf $A'A_3'$ so bestimmt werden, daß $CB_0D = CA_0E = 90^0$ sind. Entsprechend $r_1 = A'D'$ und $= A'E'$ für $B_4'$ und $A_4'$, und $r_1 = A'D''$ und $= 0$ für $B_2'$ und $A_2'$; da aber offenbar $A'D' = 4r$, so stimmt dies mit den früheren Ergebnissen für die gemeine Cykloide überein (315). Da $r = h_0 \cot \sigma$, $r' = h_0 \cot \lambda$, so ist auch

$$r_1 = \frac{(h_0 \cot \sigma \pm h_0 \cot \lambda)^2}{h_0 \cot \sigma} = \frac{(r \pm r \operatorname{tg} \sigma \cot \lambda)^2}{r},$$

was zweckmäßig in der letzten Form konstruirt wird.

*Für die affinen Kurven* dieser Cykloiden sei $\alpha$ die *Affinitätscharakteristik*, so daß die Längen $A'A_2'$, ... der Cykloiden mit $\alpha$ vervielfacht werden; dann wird $y$ ebenfalls mit $\alpha$ vervielfacht und der Krümmungshalbmesser $r_2$ wird

$$r_2 = \alpha^2 r_1 = \frac{(\alpha (r \pm r'))^2}{r}.$$

Hiernach muß man auch in der vorigen Konstruktion $A'B_0$ und $A'A_0$ mit $\alpha$ vervielfachen.

Sind unsere affinen Kurven durch andere Elemente gegeben, so kann man aus diesen die Krümmungshalbmesser bestimmen. So findet man für die verschlungene Kurve in der axonometrischen Abbildung der Fig. 147 die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln $r_2 = (b \pm h_0)^2 : a$, wenn $a$ und $b$ die Halbaxen der Grundellipse, und $h_0 = h : 2\pi = AA_1 : 2\pi$ die Projektion der reducirten Ganghöhe bedeuten, indem die zu demselben $x$ gehörigen Elemente des Kreises vom Halbmesser $a$ und unserer Kurve sind:

$$y \text{ und } y\,(b : a) \pm y \,.\, h : (2a\pi) = y\,(b \pm h_0) : a.$$

# IX. Abschnitt.

## Die abwickelbaren Flächen (zweiter Teil), die gemeinschaftlichen Berührungsebenen mehrerer Flächen, die topographische, die Umhüllungsfläche; Beleuchtung solcher Flächen.

### I. Die abwickelbare Schraubenfläche.

**343.** *Die abwickelbare Schraubenfläche ist die Fläche der Tangenten einer Schraubenlinie;* diese Linie ist ihre Rückkehrkante.

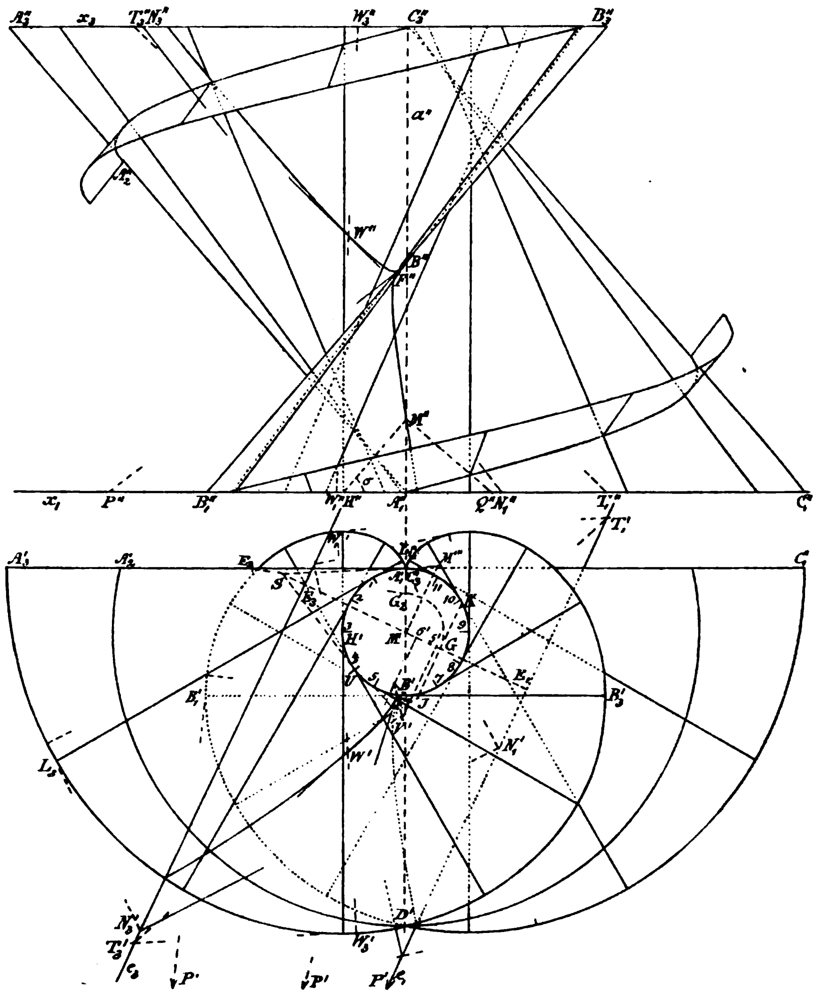
Die Axe $a$ der Schraubenlinie, die auch die Axe der Fläche Fig. 150. heißt, stehe in $M'$ senkrecht auf $\mathbf{P}_1$; $A_1 B C_3$ sei ein Gang der Schraubenlinie, $A_1$ soll in $\mathbf{P}_1$ und $A_1''$ auf $a''$ liegen, und die Flächenerzeugenden sollen durch $\mathbf{P}_1$ und durch die $\parallel \mathbf{P}_1$ durch $C_3$ gelegte Ebene $\mathbf{P}_3$ begrenzt werden; $x_1$, $x_3$ sind die Spuren von $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3$ in $\mathbf{P}_2$. Die erste und dritte Spur (in $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3$) der Fläche bilden dann die Evolventen der Grundkreise (334) $A_1' B_1' D' C_1'$ und $C_3' B_3' D' A_3'$, welche im Grundriß zusammen die beiden Zweige derselben Kreisevolvente bilden. Projicirt man die Punkte beider Evolventen bezw. auf $x_1$ und $x_3$ und verbindet die zusammengehörigen Punkte, wie $B_1''$ und $B_3''$, so erhält man die Projektionen der Erzeugenden, welche von der zweiten Projektion der Schraubenlinie eingehüllt werden.

Die Erzeugenden $A_1 A_3$, $B_1 B_3$, $C_1 C_3$ sind $\parallel \mathbf{P}_2$ und Umrisse der zweiten Projektion der Fläche; denn die Berührungsebenen entlang derselben sind $\perp \mathbf{P}_2$, weil dies für die Tangenten der Kreisevolventen in $A_1$, $B_1$, $C_1$ gilt. — $B_1 B_2$ liegt vor den beiden anderen Umrissen, und dementsprechend ist die Punktirung vorgenommen.

**344.** Eine *Schraubenbewegung* um eine gegebene Axe ist durch ihren Sinn und ihren *Parameter* $h_0$, d. i. die zum Drehungswinkel Eins gehörige Schiebung (reducirte Ganghöhe) ganz bestimmt (335). Bei dieser Bewegung beschreiben alle Punkte eines mit der Linie der Axe starr verbundenen Raumgebildes koaxiale *Schraubenlinien* von gleichem Sinne und gleicher Ganghöhe; jede Linie des Gebildes beschreibt eine Fläche, welche *Schraubenfläche* heißt, jede Fläche beschreibt einen *Schraubenkörper*. *Jede Schraubenlinie, jede Schrauben-*

*fläche und jeder Schraubenkörper* bewegen sich in sich selbst weiter, oder sie *sind in sich selbst verschiebbar.* Eine Tangente einer der beschriebenen Schraubenlinien, indem sie stets Tangente derselben bleibt, beschreibt eine *abwickelbare Schraubenfläche.* Läßt man auf der Schraubenlinie die Tangente *hingleiten*, wobei sich der Berührungspunkt auf der Tangente nicht verschiebt, so beschreibt jeder

Fig. 150.

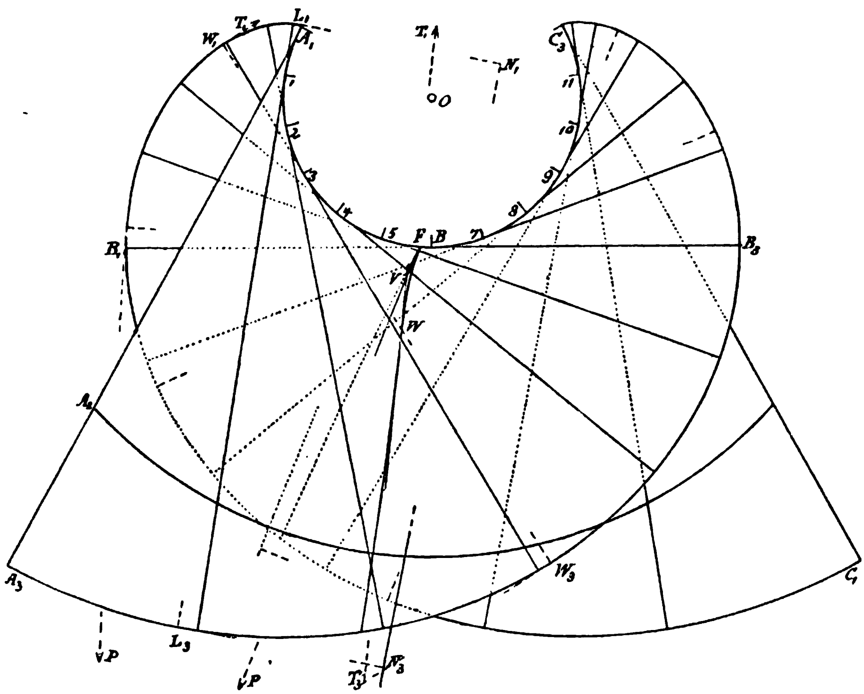


Punkt der Tangente eine Schraubenlinie. Läßt man dagegen die Tangente auf der Schraubenlinie (ohne Gleiten) *hinrollen*, wobei der Berührungspunkt auf beiden Linien um gleiche Längen fortschreitet, so beschreibt jeder Punkt der Tangente eine *Kreisevolvente* in einer zur Schraubenaxe senkrechten Ebene (334).

Die Schraubenfläche hat unendlich viele *Windungen* und erstreckt sich nach allen Seiten ins Unendliche. Die Rückkehrkurve trennt die Fläche in zwei Äste, bei der gegebenen Stellung in den oberen und den unteren.

Jede der Kreisevolventen, so die in $\mathbf{P}_1$, hat unendlich viele, auf demselben Durchmesser des Kreises liegende *Doppelpunkte*, von denen $D'$ verzeichnet ist. In ihm schneidet sich eine Erzeugende des oberen und eine des unteren Flächenastes. Denkt man sich die Fläche durch die Schraubenbewegung jener Kreisevolvente erzeugt, so beschreibt jeder Doppelpunkt derselben eine Schraubenlinie, eine

Fig. 151.



*Doppellinie der Fläche*, in welcher sich die beiden Flächenäste schneiden. In der Figur ist die durch $D$ gehende Doppellinie teilweise gezeichnet, und es ist auch noch ein Stück des anderen durch sie gehenden Flächenastes, begrenzt durch einen koaxialen Cylinder, in der zweiten Projektion zugefügt. Die Erzeugenden dieses zweiten Astes werden leicht im Grundriß als zweite Tangenten an den Grundkreis gezeichnet und vermittelst ihrer auf der zugehörigen Evolvente liegenden Spuren in $\mathbf{P}_1$ und in $\mathbf{P}_3$ in den Aufriß übertragen.

Fig. 150. Eine *Berührungsebene der Fläche* berührt entlang einer Erzeugenden, z. B. entlang $W_1 W_3$, und ihre erste und dritte Spur sind die (auf $W_1' W_3'$ senkrechten) Tangenten der Kreisevolventen in $W_1$ und $W_3$.

**345.** Um die *Schnittlinie der Schraubenfläche mit einer Ebene* E zu bestimmen, benutzen wir zweckmäßig die parallelen Ebenen $P_1$ und $P_3$ als Spurebenen (I, 112); ihre Schnitte mit E projiciren sich in die Parallelen $e_1$ und $e_3$. Es ergibt sich dann der Grundriß der Schnittkurve allein aus dem Grundrisse; er ist unabhängig von der Höhe des Schraubenganges. Um den Schnittpunkt $W$ irgend einer Erzeugenden $W_1 W_3$ mit E zu finden, legt man durch die Erzeugende irgend eine Hilfsebene, zweckmäßig die Berührungsebene der Fläche; ihre Spuren sind die auf $W_1' W_3'$ senkrechten $W_1' T_1'$, $W_3' T_3'$; man schneidet diese bezw. mit $e_1$, $e_3$ in $T_1'$, $T_3'$, so bestimmt $T_1 T_3$ auf $W_1 W_3$ den Schnittpunkt $W$ und ist zugleich die *Tangente* der Schnittkurve. Als ausgezeichnete Punkte erhält man:

1) Die *Spitzen*, wie $F$; sie sind die Schnittpunkte der E mit der Rückkehrkante. Teilt man die (durch $M'$ gelegte) Falllinie $E_1 E_3$ der E in 12 gleiche Teile, entsprechend der 12 Teilung des Schraubenganges und des Kreises, und denkt sich die in gleicher Höhe über $P_1$ liegenden Teilungspunkte mit denselben Zahlen bezeichnet (0 bei $A_1$ und $E_1$, 12 bei $C_3$ und $E_3$), und durch die Teilungspunkte der $E_1 E_3$ Parallele zu $e_1$, durch die des Kreises Parallele in irgend einer passenden Richtung gezogen, so stellen erstere die Ebene E, letztere einen die Schraubenlinie horizontal projicirenden Cylinder dar; die Schnittpunkte gleichbezifferter Geraden geben die Schnittlinie beider Flächen an, deren Schnitt mit dem Kreise den Punkt $F$ bildet. Von allen jenen Parallelen sind aber in der Ausführung meist zwei Paare, hier 5 5′, 6 6′, hinreichend, deren Schnittpunkte durch eine Gerade verbunden werden.

2) Die *unendlich fernen Punkte* der Schnittkurve werden einerseits durch Erzeugende, die mit E parallel sind und andererseits durch unendlich ferne Erzeugende geliefert. Die mit der E parallelen Erzeugenden findet man mittelst des Richtkegels, als dessen erste Spur man den Grundkreis $A_1' H' B'$ ansehen kann. Die Höhe seiner Spitze $M$ über $P_1$ $(= h_0)$ verhält sich dann zu der Höhe des Schraubenganges $h$, wie $1 : 2\pi = M'A_1' : A_3'A_1'$. Denkt man durch $M$ eine zu E parallele Ebene gelegt, so findet man deren mit $e_1$ parallele erste Spur $JK$ mittelst ihres Schnittpunktes $G$ mit $E_1 E_3$, indem man beachtet, daß sein muß $M'G : E_3 E_1 = h_0 : h = 1 : 2\pi$ $= M'A_1' : A_3' A_1'$. Bestimmt man daher $E_2$ auf $A_3' A_1'$ und $G_2$ auf

$M'A_1'$ so, daß $A_3'E_2 = E_3E_1$, $E_2G_2 \parallel A_3'M'$, so ist $MG = MG_2$. Schneidet die $JK$ den Grundkreis in $J$ und $K$, so sind $MJ$, $MK$ die mit **E** parallelen Erzeugenden des Richtkegels. Parallel mit diesen zieht man die beiden Erzeugenden unseres Astes der Fläche, so $L_1L_3 \parallel M'K$. Die Berührungsebene der Fläche entlang $L_1L_3$ schneidet dann die **E** in einer *Asymptote* $N_1N_3$ ($\parallel L_1L_3$) der Schnittkurve. — Andererseits liefern die unendlich fernen Erzeugenden der Fläche Zweige der Schnittkurve, die ganz im Unendlichen liegen.

Hat die durch $M$ parallel zu **E** gelegte Ebene 2, 1, 0 Erzeugende mit dem Richtkegel gemein, so besitzt die Schnittkurve auf jedem Gange der Fläche zwei unendlich ferne Punkte mit Asymptoten, d. i. zwei *hyperbolische Zweige* (einen hyperbolischen Ast), oder einen unendlich fernen Punkt mit einer unendlich fernen Tangente, d. i. einen *parabolischen Ast*, oder keinen unendlich fernen Punkt, und ist dann *spiralförmig*.

3) *Doppelpunkte* besitzt die vollständige Schnittkurve auf der Doppellinie der Fläche.

**346.** *Abwickelung der Schraubenfläche.* Die Rückkehrkante besitzt den unveränderlichen Krümmungshalbmesser $r_1 = r : \cos^2 \sigma$ (339) und ändert denselben durch die Abwickelung nicht; sie wird demnach zu einem Kreise von dem Halbmesser $r_1$. Zieht man daher $H''M'' \parallel B_1''B_3''$ bis $M''$ auf $a''$ ($A_1''M'' = h_0$), und dann $M''Q''$ $\perp H''M''$ bis $Q''$ auf $x_1$, so ist $H''Q'' = r_1$. Beschreibt man nun Fig. 151.
einen Kreis mit dem Halbmesser $OA_1 = r_1$, trägt auf demselben die Länge $A_1''A_3''$ (Fig. 150) eines Ganges der Rückkehrkante von $A_1$ bis $C_3$ auf, teilt dieselbe in ebenso viele (zwölf) gleiche Teile wie die Rückkehrkante, zieht in den Teilungspunkten die Tangenten, so sind diese die Verwandelten der Flächenerzeugenden. Trägt man auf jeder derselben vom Berührungspunkte aus die wahre Länge der Erzeugenden bis zur Spur mit der $\mathbf{P}_1$ bezw. $\mathbf{P}_3$ auf, d. h. auch die Bogenlänge bis $A_1$ und $C_3$, z. B. $BB_1$ = Bog. $BA_1$, $BB_3$ = Bog. $BC_3$, so erhält man durch die Endpunkte $B_1$, $B_3$ ... die Verwandelten der Kreisevolventen in $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$; dieselben sind demnach *Evolventen* des Kreises $A_1BC_3$.

Um die Verwandelte einer koaxialen Schraubenlinie der Fläche zu erhalten, z. B. der durch $D'$ gehenden Doppellinie, übertrage man die unveränderliche wahre Länge des Stückes der Erzeugenden zwischen jener Schraubenlinie und der Rückkehrkante, nämlich $A_1''A_2''$ der Fig. 150, auf die Tangenten der Verwandelten der Rückkehrkante, so bilden die Endpunkte einen koncentrischen Kreis mit jener Verwandelten; also sind *die Verwandelten aller Schraubenlinien der Fläche koncentrische Kreise.*

**347.** Die *Verwandelte der Schnittkurve* mit **E** erhält man zweckmäßig durch gleichzeitiges Übertragen eines Punktes der Erzeugenden und der Tangente in demselben. Zu dem Ende überträgt man z. B. $W_1$, $W_3$ durch Bogenstücke aus Fig. 150 auf die Evolventen der Fig. 151, zieht $W_1 W_3$ und die zu $W_1 W_3$ senkrechten $W_1 T_1$, $W_3 T_3$, überträgt deren Längen aus Fig. 150, so ist $T_1 T_3$ die Tangente der Verwandelten in ihrem Schnittpunkte $W$ mit $W_1 W_3$. Entsprechend überträgt man die Spitze $F$ mit ihrer Tangente $FP$ und die Asymptoten (z. B. $N_1 N_3 \parallel L_1 L_3$).

Die *Wendepunkte der Verwandelten* der Schnittkurve liegen auf denjenigen Erzeugenden, deren Berührungsebenen senkrecht auf der Schnittebene **E** stehen (38). Man bestimmt diese vermittelst des Richtkegels (Fig. 150), indem man durch dessen Spitze $M$ eine Senkrechte $MS$ zu **E** zieht und deren erste Spur $S$ auf $E_1 M' E_3$ bestimmt. Es geschieht dies durch Umlegung in $\mathbf{P}_1$, indem man $M' M''' \perp E_1 M'$ und $= A_1'' M''$ macht und $M''' S \perp E_1 M'''$ zieht. Die Berührungspunkte der aus $S$ an den Grundkreis gelegten Tangenten, so $U$, bestimmen die gesuchten Erzeugenden des Kegels, so $MU$. Die mit ihnen parallelen Erzeugenden der Fläche liefern auf der Schnittkurve zwei Punkte $V$ und $W$, welche in der Abwickelung zu Wendepunkten werden. Für $W$ ist auch die Tangente $WT_3$ ermittelt. $V$ liegt sehr nahe an der Spitze $F$. Wäre dies genau der Fall, so würde $F$ ein Schnabelpunkt der Verwandelten sein; in der Figur ist die Abweichung davon nicht bemerkbar.

**348.** *Aufg. An eine abwickelbare Schraubenfläche durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt P eine Berührungsebene zu legen.*

*Aufl.* 1. Man schneide die Fläche mit einer durch $P$ senkrecht zur Flächenaxe gelegten Ebene, was in einer Kreisevolvente geschieht, lege an diese aus $P$ alle möglichen Tangenten, so bestimmt jede derselben eine der gesuchten Berührungsebenen.

2) Sind für eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene, z. B. für $\mathbf{P}_1$ in Fig. 150, der Grundkreis des Cylinders der Rückkehrkante, dessen Evolvente als erste Spur der Fläche und eine Erzeugende der Fläche schon verzeichnet, so erspart man sich die Verzeichnung einer neuen Kreisevolvente, indem man aus $P$ als Spitze mittelst einer Parallelen zu einer Flächenerzeugenden einen Richtkegel bestimmt, seine erste Spur verzeichnet, und an diese (Kreis) und an die erste Spur der Fläche (Evolvente) die gemeinschaftlichen Tangenten zieht. Von diesen sind diejenigen die ersten Spuren der gesuchten Ebenen, von deren Berührungspunkten räumlich parallele Erzeugende beider Flächen ausgehen.

Ist $P$ ein unendlich ferner Punkt, d. h. soll die Berührungs-

ebene parallel einer gegebenen Geraden $p$ geführt werden, so löst man die Aufgabe für den Richtkegel und überträgt die Berührungserzeugenden parallel auf die Schraubenfläche.

**349.** *Übungsaufgaben.*

1) Eine abwickelbare Schraubenfläche durch eine zu ihrer Axe parallele Ebene zu schneiden, wenn diese von dem Cylinder ihrer Rückkehrkante zwei, eine oder keine Erzeugende enthält.

2) Gegeben sind in einer Ebene zwei koncentrische Kreise, welche die Projektionen zweier koaxialen Schraubenlinien von gleichem Sinne und gleicher Ganghöhe auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene bilden, und auf jedem Kreise ein Punkt als Spur der Schraubenlinie; man soll eine abwickelbare Schraubenfläche bestimmen, welche beide Kurven enthält. — Zeichnet man die Evolvente von jedem Kreise mit der auf dem Kreise liegenden Spur als Anfangspunkt, zieht aus einem der Schnittpunkte $P$ beider Kurven deren Normalen, so berührt jede derselben einen der gegebenen Kreise, und es ist die Verbindungsgerade der Berührungspunkte die Projektion einer Erzeugenden $e$, und der sie berührende, mit den gegebenen Kreisen koncentrische Kreis die Projektion der Rückkehrkante einer der unendlich vielen möglichen Flächen. Die Kreistangenten stellen nämlich die Tangenten der Schraubenlinien dar, welche sich in $P$ schneiden; die Ebene derselben berührt daher die Schraubenfläche, welche durch die Schraubenbewegung der $e$ auf den beiden Schraubenlinien hin erzeugt wird, entlang $e$, und die Schraubenfläche ist deswegen abwickelbar. Man bemerkt, daß die Ganghöhe und der Sinn der beiden Schraubenlinien unbestimmt bleiben.*)

3) Auf einem gegebenen Umdrehungscylinder vom Halbmesser $r$ eine Schraubenlinie anzugeben, welche als Rückkehrkante einer Schraubenfläche einen Kreis von gegebenem Halbmesser $r_1$ zur Verwandelten hat. Welche Grenze darf $r_1$ nicht überschreiten?

**350.** *Die Licht- und Schattengrenzen und die Lichtgleichen einer abwickelbaren Fläche sind Erzeugende.* Um sie zu bestimmen, konstruirt man sie zuerst für den Richtkegel der Fläche, und zieht mit diesen Kegelerzeugenden die parallelen Erzeugenden der Fläche als Tangenten ihrer Rückkehrkante; sie sind die gesuchten Lichtgleichen.

*Aufg. Die Lichtgleichen einer abwickelbaren Schraubenfläche zu bestimmen.*

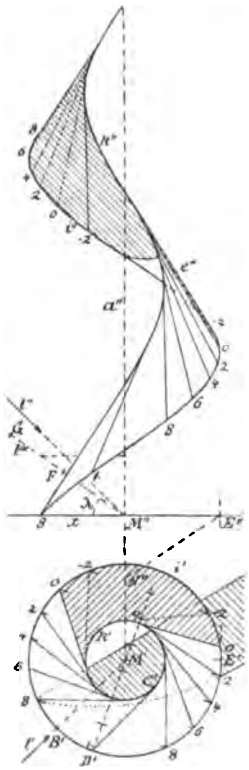
*Aufl.* Es sei die Axe $a$ der Fläche $\perp \mathbf{P}_1$, $M'$ ihr Grundriß, der Fig. 152.

*) Diese Aufgabe und Auflösung wurde von *Olivier* in seinen Développements de Géométrie descriptive, 1843, S. 7 ff. gegeben.

aus $M'$ gezogene Kreis $k'$ der Grundriß derjenigen Schraubenlinie $k$ der Fläche, welche die Rückkehrkante bildet, $e''$ der Aufriß einer mit $\mathrm{P}_2$ parallelen Erzeugenden.

Man zeichne den Grundriß einer von der Rückkehrkante verschiedenen Schraubenlinie $i$ der Fläche, als Kreis $i'$ aus $M'$. Der Leitkegel der Fläche ist ein Umdrehungskegel, als dessen Axe, die mit $a$ parallel ist, wir $a$ selbst, und als dessen erste Spur wir $i'$ wählen wollen; der eine Umriß desselben im Aufriß ist mit $e''$ parallel und geht durch den Punkt $E''$ der Projektionsaxe $x$. Sind nun $M'B'$ und $C'D'$ die (parallelen) Grundrisse zweier parallelen Erzeugenden des Kegels und der Schraubenfläche, so haben in ihnen beide Flächen dieselbe Helligkeit. Der zwischen ihnen liegende Bogen $B'D'$ des $i'$ ist aber für alle Paare von parallelen Erzeugenden, d. i. von Linien derselben Helligkeit auf beiden Flächen dieselbe. Man erhält daher die Punkte des Kreises $i'$ von bestimmter Helligkeit der Schraubenfläche, wenn man die Punkte derselben Helligkeit des Kegels auf $i'$ um den Bogen $B'D'$ dreht, oder unmittelbar, wenn man den Stärkemaßstab $M'B' = l'$ nach $M'D'$ dreht und mit dem gedrehten die Konstruktion, wie für den Kegel, vornimmt.

Fig. 152.



Hat man daher die erste Neigung $\lambda = x\,l'''$ des Lichtstrahles $l$ bestimmt, so zieht man (202) $E''N'' \perp e''$ bis $N''$ auf $a''$, und macht auf $D'M'$ die $M'0 = M''N''\ \mathrm{tg}\ \lambda =$ Abst. $Fx$, wenn $F$ auf $l'''$ und Abst. $Fa'' = M''N''$; und $01. = E''N'' \sec \lambda = M''G$, wenn $G$ auf $l'''$ und Abst. $Ga'' = E''N''$. Teilt man dann für den fünfstufigen Stärkemaßstab die 0 1. in fünf gleiche Teile, zieht durch die Teilungspunkte Senkrechte zu 0 1., so schneiden diese auf $i'$ die verlangten Punkte ein. Die aus ihnen an $k'$ in dem Sinne von $D'C'$ gezogenen Tangenten sind die gesuchten Lichtgleichen der Fläche. Hätte man $k'$ als $i'$ gewählt, so hätte man die Berührungspunkte der Lichtgleichen mit $i'$ erhalten, und der Stärkemaßstab wäre $\perp l'$ geworden.

Im Aufriß ist ein Gang angegeben, beiderseits begrenzt durch Erzeugende $\parallel \mathrm{P}_2$. Die Schlagschatten auf $\mathrm{P}_1$ und auf die untere

Seite der Fläche sind zugefügt; der letztere kann mittelst der Schlagschatten der schattenwerfenden und beschatteten Linien auf eine (zu $P_1$ parallele) Ebene bestimmt werden.

## II. Die gemeinschaftlichen Berührungsebenen mehrerer Flächen und die abwickelbare Umhüllungsfläche zweier.

**351.** Um an zwei gegebene Flächen $F$ und $F_1$, von denen keine abwickelbar ist, eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen, führe man aus einem beliebigen Punkte $P$ als Spitze einen berührenden Kegel an jede der Flächen, schneide beide Kegel mit einer nicht durch $P$ gehenden Ebene und ziehe an beide Schnittkurven die gemeinschaftlichen Tangenten. Die durch $P$ und durch je eine der Tangenten gelegten Ebenen sind gemeinschaftliche Berührungsebenen der beiden Kegel und daher auch der beiden gegebenen Flächen. Läßt man sich $P$ auf einer Geraden hin bewegen, wobei für den unendlich fernen Punkt die Hilfskegel zu Cylindern werden, so erhält man alle Lagen der gemeinschaftlichen Berührungsebenen, weil jede der Ebenen die Geraden schneiden muß. Alle Ebenen werden von einer *abwickelbaren Fläche* eingehüllt (43), deren Erzeugende die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte derselben Ebene sind. Die abwickelbare Fläche hat die gegebenen Flächen zu *Leitflächen* oder ist ihnen *umschrieben.* Sie besteht im allgemeinen aus *mehreren getrennten Ästen,* welche man als *äußere* und *innere Äste* unterscheiden kann, wenn beide Leitflächen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

Ist *eine* von den beiden gegebenen *Flächen abwickelbar,* so ist die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen, bestimmt, d. h. es gibt deren im allgemeinen nur eine endliche Anzahl, da eine Ebene, welche eine abwickelbare Fläche berühren soll, außerdem nur noch eine Bedingung erfüllen kann (163). *Sind beide Flächen abwickelbar,* so haben sie im allgemeinen keine gemeinschaftlichen Berührungsebenen.

**352.** Eine Ebene ist bestimmt, wenn sie *drei gegebene Flächen* $F$, $F_1$, $F_2$ *berühren* soll, von denen keine abwickelbar ist. Um sie zu erhalten, beschreibe man eine abwickelbare Fläche um $F$ und $F_1$; dieselbe berühre die $F$ entlang der Kurve $k$; sodann eine um $F$ und $F_2$; dieselbe berühre die $F$ entlang $k'$. In jedem Schnittpunkte $P$ von $k$ und $k'$ lege man die Berührungsebene an $F$; dieselbe berührt auch die $F_1$ und $F_2$, bezw. weil $P$ auf $k$ und auf $k'$ liegt. In gleicher Weise kann man auch die Berührungspunkte auf $F_1$ und $F_2$ finden.

An die Stelle einer Fläche $\mathbf{F}_2$ kann ein Punkt $P$ treten, durch welchen die Berührungsebene gehen soll. Dieselbe ist die gemeinschaftliche Berührungsebene der aus $P$ der $\mathbf{F}$ bezw. der $\mathbf{F}_1$ umschriebenen Kegel.

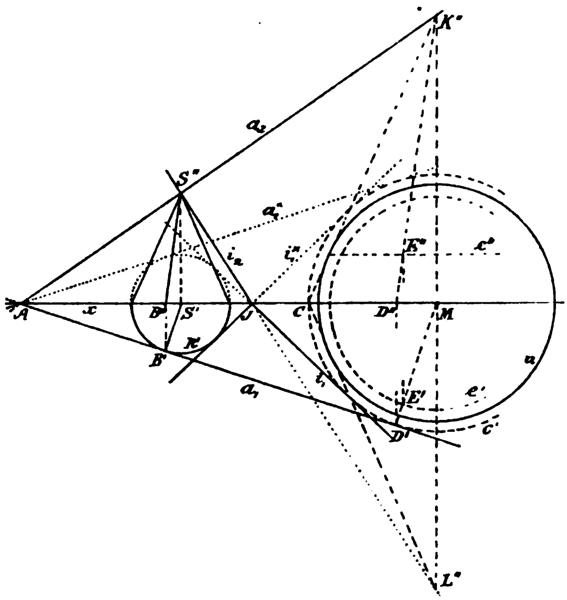
**353.** Um die *gemeinschaftlichen Berührungsebenen zweier Flächen* $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ zu bestimmen, von denen die *eine* $\mathbf{F}_1$ *abwickelbar* ist, lege man an $\mathbf{F}$ Berührungsebenen bezw. parallel zu allen denen von $\mathbf{F}_1$; sie bilden eine der $\mathbf{F}$ umschriebene abwickelbare Fläche $\mathbf{F}'$, deren Erzeugende mit denen von $\mathbf{F}_1$ parallel sind. $\mathbf{F}'$ und $\mathbf{F}_1$ haben denselben Richtkegel. Die gemeinschaftlichen Berührungsebenen von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_1$ berühren auch die $\mathbf{F}'$, und ihre Spuren in irgend einer Ebene $\mathbf{P}$ sind gemeinschaftliche Tangenten an die Spuren der $\mathbf{F}'$ und $\mathbf{F}_1$ in $\mathbf{P}$. Man schneide daher $\mathbf{F}'$ und $\mathbf{F}_1$ mit einer Ebene $\mathbf{P}$ in den Kurven $k'$ und $k_1$, lege an sie die gemeinschaftlichen Tangenten, und suche unter diesen diejenigen aus, von deren Berührungspunkten parallele Erzeugende von $\mathbf{F}'$ und $\mathbf{F}_1$ ausgehen, so bestimmen diese Erzeugenden die gemeinschaftlichen Berührungsebenen von $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}$. Mit jeder von jenen gemeinschaftlichen Tangenten kann man nämlich im allgemeinen mehrere parallele Tangenten an die Spur des gemeinschaftlichen Richtkegels in $\mathbf{P}$ legen; eine der gemeinschaftlichen Tangenten ist zuzulassen, wenn sie für $\mathbf{F}'$ und für $\mathbf{F}$ derselben Tangente am Richtkegel entspricht; dann sind die zugehörigen Erzeugenden parallel. Hierbei hat man die abwickelbare Hilfsfläche $\mathbf{F}'$ der $\mathbf{F}$ und der unendlich fernen Kurve der $\mathbf{F}_1$ umschrieben. Man kann das Verfahren verallgemeinern, indem man eine beliebige Kurve der $\mathbf{F}_1$ wählt. Ist $\mathbf{F}_1$ ein Kegel (oder Cylinder), so ist als diese Kurve die Spitze vorteilhaft; die $\mathbf{F}'$ wird dann der aus der Spitze von $\mathbf{F}_1$ der $\mathbf{F}$ umschriebene Kegel.

**354.** *Aufg. An einen Umdrehungskegel und eine Kugel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.*

Fig. 153. *Aufl.* Man lege $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ durch den Mittelpunkt $M$ der Kugel, $\mathbf{P}_1$ senkrecht zur Axe des Kegels, $\mathbf{P}_2$ durch dieselbe, so ist die Kugel durch einen aus $M$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis $u$ bestimmt, welcher ihren ersten und zweiten Umriß darstellt, und der Kegel durch die Projektionen $S'$ (auf $x$) und $S''$ der Spitze, und den in $\mathbf{P}_1$ liegenden, aus $S'$ beschriebenen Grundkreis $k'$. Die abwickelbare Fläche, welche wir nach der vor. Nr. vermittelst Ebenen parallel zu den Berührungsebenen des Kegels $S$ um die Kugel beschreiben, besteht aus zweien mit dem Kegel $S$ kongruenten und parallelen Kegeln, deren Spitzen $K$ und $L$ sich auf der durch $M$ gehenden Vertikalen oberhalb und unterhalb $M$ durch Gerade $CK''$, $CL''$ ergeben, welche berührend an $u$ und parallel zu den Umrißerzeugen-

den des Kegels $S$ gezogen sind und sich in $C$ auf $x$ treffen. Die gemeinschaftliche erste Spur beider Kegel ist der Kreis $c'$, welcher aus $M$ durch $C$ beschrieben ist. Man lege nun an die ersten Spuren $k'$ und $c'$ der Kegel die vier gemeinschaftlichen Tangenten und zwar die äußeren $a_1$ und $a_1^*$, die im Punkte $A$ der Projektionsaxe $x$ zusammenlaufen, und die inneren $i_1$, $i_1^*$, die sich in $J$ treffen. Durch jede derselben geht eine gemeinschaftliche Berührungsebene beider Kegel; durch die äußeren solche an dem oberen Kegel

Fig. 153.



$K$ mit der gemeinschaftlichen zweiten Spur $K''S''A = a_2$, durch die inneren solche an den unteren Kegel $L$ mit der gemeinschaftlichen zweiten Spur $L''S''J = i_2$. Die vier Berührungsebenen sind also $a_1 a_2$, $a_1^* a_2$, $i_1 i_2$, $i_1^* i_2$. Sie berühren zugleich die Kugel.

Um noch von einer dieser Ebenen, etwa von der ersten, die Berührungserzeugende auf dem Kegel $S$ und den Berührungspunkt auf der Kugel zu bestimmen, ziehe man zu $a_1$ die Senkrechten $S'B'$ und $MD'$; sie sind die ersten Projektionen der Berührungserzeugenden auf den Kegeln $S$ und $K$. Bestimmt man dann den Berührungskreis $e$ des Kegels $K$ mit der Kugel, so ist der Schnittpunkt $E$ von $KD$ und $e$ der Berührungspunkt der Kugel. — Der aus $S$ der Kugel umschriebene Hilfskegel wäre weniger vorteilhaft gewesen.

*Anm.* Die vier Auflösungen werden zu 3, 2, 1, 0, wenn der Kegel $S$ die Kugel von außen berührt, sie schneidet, sie in sich schließt und berührt, sie in sich schließt und nicht berührt.

**355.** *Übungsaufgaben.*

Die gemeinschaftlichen Berührungsebenen zu legen

1) an einen Umdrehungskegel und ein Umdrehungsellipsoid, deren Umdrehungsaxen parallel sind;

2) an einen Kegel mit der Spitze $S$ und an eine Fläche zweiten Grades **F** (etwa mittelst eines aus $S$ der **F** umschriebenen Hilfskegels);

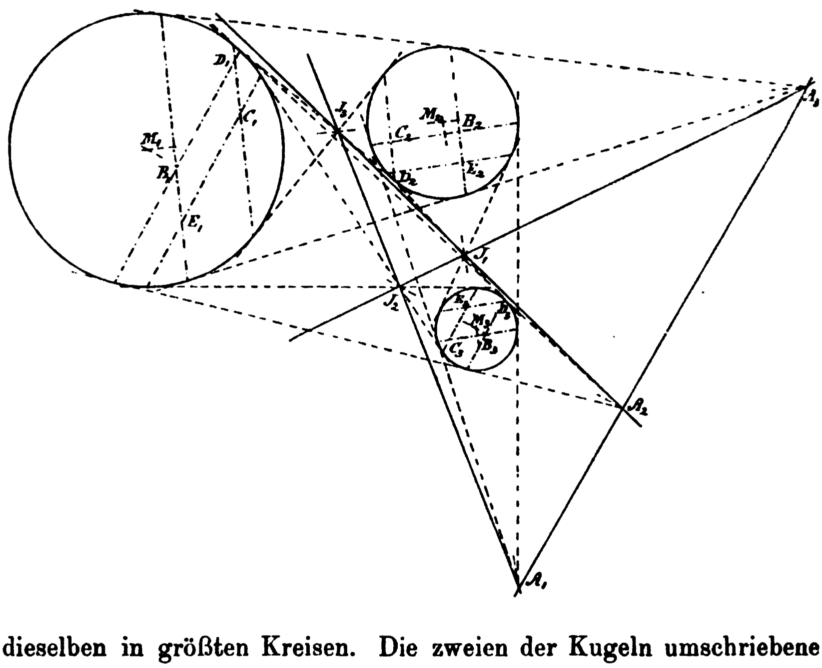
3) an einen Kegel und eine Fläche zweiten Grades, wenn beide einen Kegelschnitt gemein haben;

4) an die abwickelbare Schraubenfläche (gegeben durch die Schraubenlinie der Rückkehrkante) und eine Kugel.

**356.** *Aufg. An drei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.*

Fig. 154. *Aufl.* Man lege die Projektionsebene, welche dann allein genügt, durch die Mittelpunkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ der Kugeln; sie schneidet

Fig. 154.




dieselben in größten Kreisen. Die zweien der Kugeln umschriebene abwickelbare Fläche besteht aus zwei Kegeln, dem äußeren und dem inneren, deren Spitzen auf der Mittelpunktslinie liegen. Für die Kugeln $M_2$ und $M_3$ erhält man $A_1$ und $J_1$ als Spitzen des äußeren und des inneren Kegels, für $M_3$ und $M_1$ die Spitzen $A_2$ und $J_2$, für $M_1$ und $M_2$ die $A_3$ und $J_3$.

Eine Ebene, welche die Kugeln $M_2$ und $M_3$ zugleich berühren soll, muß einen der umschriebenen Kegel berühren, also durch $A_1$ oder $J_1$ gehen, soll sie auch noch $M_1$ berühren, so muß sie noch einen der Punkte $A_2$ und $J_2$, und einen der beiden $A_3$ und $J_3$ enthalten. Berührt sie mit derselben Seite die drei Kugeln, so berührt

sie alle drei äußeren Kegel und enthält die drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$; und da diese alle in der Projektionsebene liegen, so bestimmen sie die Spur der Berührungsebene und müssen daher auf einer Geraden liegen. $A_1$, $A_2$, $A_3$ ist die Spur von zwei gemeinschaftlichen Berührungsebenen. Liegen dagegen die Kugeln auf verschiedenen Seiten der Berührungsebene, so kann entweder $M_1$, oder $M_2$, oder $M_3$ allein auf einer Seite liegen. Dann sind bezw. die Geraden $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_3 J_1$, $A_3 J_1 J_2$ die Spuren, jede wieder von zwei Berührungsebenen.

Es gibt also im allgemeinen acht gemeinschaftliche Berührungsebenen für drei Kugeln. Dieselben vermindern sich aber, wenn eine der Kugeln den um die beiden anderen beschriebenen Kegel oder eine der anderen Kugeln selbst berührt, oder schneidet, oder im Inneren des Kegels oder der Kugel liegt.

Die Berührungspunkte findet man, wenn man auf jeder Kugel die Berührungskreise der umschriebenen Kegel sucht, welche durch die Berührungssehnen der zu demselben Kegel gehörigen Umrißtangenten dargestellt werden. Ihre vier Schnittpunkte auf jeder Kugel sind die Projektionen der acht Berührungspunkte zu zweien. Zu je einem der vier Paare von Berührungsebenen gehören der Reihe nach auf den drei Kugeln die Berührungspunkte $B$, $C$, $D$, $E$, wobei immer zwei mit einer Kegelspitze auf einer Geraden liegen, wie $B_1$, $B_2$ mit $A_3$, oder $C_1$, $C_2$ mit $J_3$.

*Anm.* Durch die räumliche Bedeutung der Figur ist folgender Satz der ebenen Geometrie bewiesen. Sind drei Kreise in einer Ebene gegeben und man zieht alle gemeinschaftliche Tangenten je zweier derselben, so liegen die sechs Schnittpunkte je zweier dieser Tangenten, welche sich auf einer Mittelpunktslinie befinden (die Ähnlichkeitspunkte je zweier Kreise), zu drei auf vier Geraden.

## III. Die Fläche des Schattens und des Halbschattens.

**357.** Ist die Oberfläche F eines nicht leuchtenden undurchsichtigen Körpers den Strahlen einer leuchtenden Fläche L ausgesetzt, so erhält ein Punkt $P$ der F *volles Licht* oder *vollen Schatten* (Kernschatten), oder *Halbschatten*, je nachdem die Berührungsebene der F in $P$ die ganze Fläche L und die Körpermasse bei $P$ auf entgegengesetzten, oder auf derselben Seite liegen hat, oder die L schneidet. Daher ist ein Punkt der F ein Grenzpunkt zwischen vollem Licht und Halbschatten, oder zwischen Halb- und vollem Schatten, wenn die Berührungsebene der F in diesem Punkte auch die L berührt, und je nachdem die ganze L und die Körpermasse bei dem Punkte $P$ auf entgegengesetzten Seiten, oder auf derselben

Seite der Berührungsebene liegen, vorausgesetzt noch, daß im ersteren Falle der Körper keinen Schlagschatten auf den Punkt wirft. Rollt eine solche gemeinschaftliche Berührungsebene, die man je nach ihrer Lage eine äußere oder eine innere (wechselnde) nennt, auf beiden Flächen ab, so beschreibt sie eine abwickelbare Fläche, welche in einen äußeren und einen inneren Ast zerfällt, so daß gilt:

*Auf einer Fläche* F, *welche von einer leuchtenden Fläche* L *beleuchtet wird, sind die Grenzen des vollen Lichtes und des Halbschattens, und des Halb- und des vollen Schattens die Berührungslinien der Fläche* F *bezw. mit dem äußeren und dem inneren Aste der den beiden Flächen* F *und* L *umschriebenen abwickelbaren Fläche.*

Diese Flächenäste begrenzen auch bei dem Schlagschatten auf eine dritte Fläche das volle Licht, den Halb- und den vollen Schatten gegeneinander. Die Flächen F und L, oder eine derselben, können auch durch scheibenartige Flächenstücke ersetzt werden, welche von (ebenen oder unebenen) Linien begrenzt sind; dann sind diese Grenzlinien die Leitlinien der abwickelbaren Flächen, wobei vorausgesetzt ist, daß die abwickelbaren Flächen der Grenzlinien jene Flächenstücke nicht schneiden. Tritt dieser Fall ein, so müssen zweierlei abwickelbare Flächen benutzt werden.

**358.** *Sind die Leitflächen* (F *und* L), *bezw. Leitlinien, vom zweiten Grade, so ist die ihnen umschriebene abwickelbare Fläche von der vierten Klasse* (300). Dabei denkt man sich den Kegelschnitt als Ausartung der Fläche zweiten Grades, wobei ein Polartetraeder der Fläche durch ein Polardreieck des Kegelschnittes und einen beliebigen Punkt des Raumes gebildet wird (oder auch, was aber hier nicht weiter in Betracht kommt, durch vier Punkte der Ebene des Kegelschnittes, von denen drei willkürlich sein dürfen). Die umschriebene Fläche besitzt eine *Doppelkurve*, die aus *vier Kegelschnitten* besteht, welche in den Ebenen des gemeinschaftlichen Polartetraeders der beiden Flächen liegen (300).

*Übungsaufg.* Die Fläche des Schattens und des Halbschattens mit ihren Doppelkurven und ihrer Rückkehrkante darzustellen, wenn F und L eine Ellipse und ein Kreis sind, deren Ebenen auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht stehen*). — Das gemeinsame Polartetraeder hat zu Ecken die Mittelpunkte der beiden Kurven und die unendlich fernen Punkte der Axen der Ellipse. Die Doppelkurven sind die beiden Leitlinien und Kegelschnitte in den Ebenen, welche durch den Kreismittelpunkt und je eine Axe der Ellipse gehen.

---

*) In *de la Gournerie's* Géométrie descriptive, B. 2, 1862, S. 64 ff., ist diese Aufgabe behandelt.

### IV. Die Fläche von gleichförmiger Neigung.

**359.** *Eine Fläche von gleichförmiger Neigung ist eine solche Fläche, deren Berührungsebenen alle gleich geneigt sind gegen eine feste Ebene, die man als horizontal annimmt.* Daraus ergibt sich:

1) *Diese Fläche* F *ist abwickelbar und hat einen Umdrehungskegel* K *von übereinstimmender gleichförmiger Neigung zum Richtkegel.* Denn alle Berührungsebenen der Fläche sind mit denen des bezeichneten Kegels parallel, sie haben daher nur eine einzige Art des Ablaufs, woraus folgt, daß die Fläche abwickelbar (163), und jener Kegel ihr Richtkegel ist.

2) Die Erzeugenden der Fläche sind parallel mit denen des Richtkegels, also Linien von gleicher Neigung und Falllinien der Berührungsebenen; *daher sind die Erzeugenden und ihre Horizontalprojektionen Normalen jeder Horizontalspur der Fläche* und werden von der *Evolute* dieser Spur eingehüllt; diese Evolute bildet daher einen *Umriß der Fläche.*

3) Die Erzeugenden berühren den vertikalen Cylinder, dessen Horizontalspur jene Evolute ist, und bilden wegen ihrer gleichförmigen Neigung auf diesem Cylinder die Tangenten einer *Schraubenlinie*; dieselbe ist die *Rückkehrkante* der Fläche F, und diese kann als eine *allgemeine abwickelbare Schraubenfläche* bezeichnet werden.

4) Jede Horizontalspur der Fläche ist eine *Evolute* der Horizontalprojektion der Rückkehrkante und der Rückkehrkante selbst (44). Die Horizontalprojektionen aller *Horizontalspuren* der Fläche sind daher *äquidistante* oder *parallele Kurven.*

5) Eine Fläche von gleichförmiger *Neigung* ist durch ihre Neigung und eine *Leitlinie $l$ bestimmt,* der sie umschrieben ist; die Leitlinie ist eine Doppelkurve der Fläche. Die Leitlinie kann auch durch eine Leitfläche L ersetzt werden, welche von jeder Lage der beweglichen Ebene berührt wird.

**360.** *Ist die Leitlinie $l$ oder die Leitfläche* L *vom zweiten Grade, so ist die Fläche von gleichförmiger Neigung* F *von der vierten Klasse* (300). Denn als die andere Leitfläche dieser abwickelbaren Fläche F ist der Richtkegel K, oder als ihre andere Leitlinie dessen unendlich ferner Kegelschnitt $k$ anzusehen; und diese sind ebenfalls vom zweiten Grade. Daher besitzt die Fläche *vier Doppelkegelschnitte,* welche in den Ebenen des *gemeinsamen Polartetraeders* T beider Leitgebilde liegen, und zu welchen Doppelkegelschnitten jener unendlich ferne $k$ gehört (358). Die ihm gegenüberliegende Ecke des T ist der Mittelpunkt des zweiten Leitgebildes. Ist dieses eine Linie zweiten Grades $l$, so ist dieselbe die zweite Doppellinie; und die

ihr gegenüberliegende Ecke des **T** ist der unendlich ferne Punkt des zu der Ebene der $l$ konjugirten Durchmessers des Richtkegels **K**. Die beiden anderen Ecken des **T** sind die Punkte der unendlich fernen Geraden der Ebene von $l$, welche sowohl in Bezug auf $l$, als auf $k$ (oder **K**) zu einander konjugirt sind, und welche etwa mittelst zweier Strahleninvolutionen aus dem Mittelpunkte und in der Ebene von $l$ nach I, 350 konstruirt werden.

Ist dagegen das zweite Leitgebilde eine Fläche zweiten Grades **L**, so sind neben dem Mittelpunkte von **L** die drei anderen Eckpunkte des **T** die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der unendlich fernen Kegelschnitte von **K** und von **L**. Sie werden mittelst einer im Endlichen, zweckmäßig horizontal gelegten Ebene **E** gefunden, indem man etwa aus dem Mittelpunkte von **L** als Spitze den Kegel nach dem unendlich fernen reellen oder imaginären Kegelschnitte der **L**, und den Richtkegel legt, beide mit **E** schneidet, wobei die erstere Schnittkurve, wenn sie imaginär ist, durch einen ideellen Kegelschnitt dargestellt wird, während die zweite ein Kreis ist, zu beiden Schnittkurven nach I, 398, oder nach II, 23 ff., das gemeinschaftliche Polardreieck sucht, und dessen Eckpunkte aus der Kegelspitze ins Unendliche projicirt.

*Übungsaufgaben.* Man konstruire die Fläche von gleichförmiger Neigung, insbesondere ihre Doppelkurven, ihre Rückkehrkante und mehrere Horizontalschnitte in ihren wechselnden Formen,

1) wenn die Leitlinie $l$ eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel ist, von welcher a) beide, b) eine, c) keine Axe horizotal liegen *);

2) wenn die Leitfläche **L** ein Ellipsoid oder eine andere Fläche zweiten Grades ist, von welcher a) zwei, b) eine, c) keine Axe horizontal liegen.

### V. Die topographische Fläche.

**361.** *Die topographische* oder *Terrainfläche* ist die Fläche des Erdbodens und wird durch *kotirte Projektionen* dargestellt. Man kann mittelst dieser Projektionen auch jede andere Fläche darstellen und Aufgaben über dieselbe lösen; aber vorteilhaft sind sie nur bei der topographischen Fläche und wurden auch für sie erfunden (I, 21).

Nach diesem Verfahren legt man *Niveauflächen* (Flächen des Wasserspiegels), das sind Flächen, welche die Lotlinien senkrecht durchschneiden. Man kann diese Flächen nicht in gleichförmigen

---

*) Diese Aufgaben wurden eingehend behandelt von Herrn *de la Gournerie* in seiner Géométrie descriptive, B. 2, 1862, S. 104—126, und dabei die Doppelkurven analytisch bestimmt.

Abständen legen, weil sich die Abstände zweier unendlich nahen Niveauflächen an zwei verschiedenen Punkten umgekehrt wie die Schwerkräfte an diesen Punkten verhalten, da unter dieser Bedingung die Stärke des Drucks der Schicht auf die untere Fläche an jeder Stelle dieselbe ist. Für eine kleinere Ausdehnung der topographischen Fläche dagegen ist dies möglich, indem man die zugehörigen Stücke der Niveauflächen als Teile von koncentrischen Kugeln oder gar von horizontalen Ebenen ansehen darf, wie wir es thun werden. Man wählt dann als Abstand zweier solchen benachbarten Niveauflächen, oder als *Schichthöhe* ein Meter oder ein ganzzahliges Vielfaches oder einen ganzzahligen (aliquoten) Teil des Meters, und als Vergleichsebene die Meeresfläche (I, 116). Diese bestimmten Niveauflächen, von welchen die Vergleichsebene eine sein muß, nennt man die *Schichtflächen*, insbesondere die *Schichtebenen*. Man schneidet sie mit der topographischen Fläche in Linien, welche *Niveaulinien* oder *Horizontallinien* heißen, und projicirt alle auf eine Niveaufläche, im besonderen auf eine horizontale Ebene; dann ist durch diese Projektionen und durch die Höhenzahlen oder Koten der Linien die Fläche bestimmt, und zwar um so genauer, je kleiner die Schichthöhe gewählt wurde. In der Figur sind die Horizontallinien Fig. 155. ausgezogen, und die beigesetzten Zahlen bedeuten ihre Höhen über der Meeresfläche in Metern. Man erkennt nun im einzelnen:

1) *Der Schnitt der topographischen Fläche mit einer vertikalen Ebene* wird leicht bestimmt. Die Gerade $AB$ sei der Grundriß des Schnittes, die krumme Linie $A'B'$ ist dann sein Aufriß. Dabei werden gewöhnlich, um die Höhenverhältnisse kenntlicher zu machen, die Höhenmaße in einem größeren Maßstabe, als die Horizontalmaße aufgetragen; in der Figur sei es im doppelten.

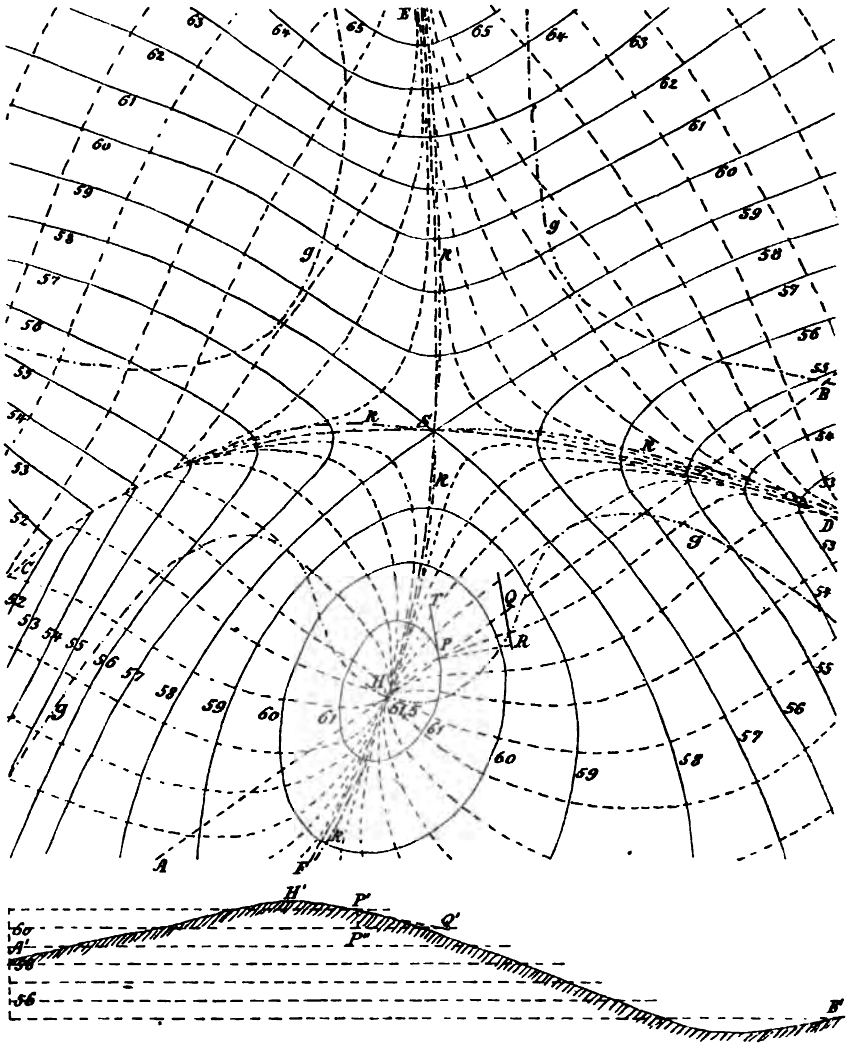
2) Die *Berührungsebene* der Fläche in einem Punkte $P$ ist die Ebene der Tangenten der durch $P$ gehenden Horizontallinie und der Schnittkurve mit einer durch $P$ gelegten Ebene, zweckmäßig einer vertikalen. Dadurch ergeben sich in der Figur ihre Schnitte mit den Schichtebenen 61 und 60 als $PT$ und ihre Parallele $QR$, wenn man $P''Q'$ nach $PQ$ in $AB$ überträgt.

3) *Das Gefälle* oder *die Böschung der Fläche* (I, 118) in einem Punkte $P$ ergibt sich gleich der Schichthöhe, geteilt durch den Abstand der Spuren der Berührungsebene der Fläche in $P$ in zwei benachbarten Schichtebenen; in der Figur ist er $= \frac{1}{2}\, P'P'' : PR = 0{,}13$, wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ von der angenommenen Verdoppelung der Höhenmaße herrührt. Bei gleichförmigem Gefälle ist $PR$ gleich dem Abstande zweier Horizontallinien. Die Fläche ist daher an

einer Stelle um so steiler, je näher daselbst die Horizontallinien beieinander liegen.

**362.** Die Linien der größten Neigung oder die *Falllinien* sind diejenigen Linien der topographischen Fläche, welche in jedem ihrer

Fig. 155.




Punkte stärker geneigt sind, als jede andere durch diesen Punkt gehende Linie der Fläche; sie selbst und ihre Horizontalprojektionen schneiden daher die Horizontallinien senkrecht. In der Figur sind Falllinien gestrichelt angegeben. Die Falllinien und ihre Horizontalprojektionen sind im allgemeinen krumm und die letzteren nur dann

sämtlich gerade, wenn die Horizontallinien äquidistante (parallele) Linien bilden (I, 238), z. B. parallele Gerade oder koncentrische Kreise. In den Falllinien bewegt sich das Wasser zu Beginn seiner Bewegung oder nahezu das langsam fließende Wasser, das nicht viel durch die Trägheit abgelenkt wird.

*Die Eigentümlichkeiten der Horizontallinien und die der Falllinien sind wesesentlich von einander verschieden.* Die *Horizontallinien* sind, wie das Meeresufer, geschlossene Linien. Sie werden zu Punkten in einem höchsten oder *Gipfelpunkte*, und in einem tiefsten (auf dem Grunde des Meeres oder einer Bodenvertiefung oder Mulde), den man *Muldenpunkt* nennen könnte. Wenn zwei Horizontallinien, welche verschiedenen Bergen angehören, beim Abwärtssteigen in einem Punkte mit horizontaler Berührungsebene der Fläche zusammentreffen, so bilden sie hier einen Doppelpunkt, und dieser Punkt heißt ein *Sattelpunkt* ($S$). Die Horizontallinien sind im allgemeinen stetig; eine Ecke kommt vor in einer *Bodenkante*, d. i. entweder in einer *scharfkantigen Rinne* oder in einem *Grate*, wie sie meist nur bei nacktem Felsen auftreten.

Die *Falllinien* verlaufen im allgemeinen getrennt von einander, da im allgemeinen durch einen Punkt der Fläche nur eine solche geht. Nur durch einen höchsten oder tiefsten Punkt $H$ (Gipfel- oder Muldenpunkt) gehen unendlich viele, nämlich in jeder horizontalen Richtung eine; und durch jeden Punkt einer Bodenkante gehen drei, nämlich diese Linie selbst und eine in jedem Abhange, welcher in ihr endet. Die Bodenkante schneidet die Horizontallinien in ihren Ecken, und dies stimmt mit dem senkrechten Schneiden der Horizontallinien mit den gewöhnlichen Falllinien überein (I, 194). Daher gehen alle Falllinien, welche auf eine Bodenkante treffen, in dieselbe über. Jede Falllinie steigt bis zu einem höchsten Punkte (einem Gipfel) und sinkt bis zu einem tiefsten (des Meeresgrundes oder einer Mulde). Läßt man sie diese Punkte gerade überschreiten, so ist sie unbegrenzt und im allgemeinen ungeschlossen, da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt. Endlich ist jede Linie der Fläche, auf welche außer in einem höchsten oder tiefsten Punkte eine Falllinie nirgends auftrifft, selbst eine Falllinie; außerdem sind nur noch Bodenkanten Falllinien.

Die Falllinien einer *Umdrehungsfläche mit lotrechter Axe* bilden deren Meridianlinien; ihre Grundrisse sind Gerade.

Horizontallinien und Falllinien sind im Grundriß *zwei Schaaren von gegenseitigen senkrechten Trajektorien*, also reciprok. Nicht aber dürfen sie vertauscht werden, wenn sie die kotirte Projektion einer krummen Fläche, und gar einer Bodenfläche, bilden sollen; dem

Fig. 155. widerspricht durchaus die Verschiedenheit ihrer Eigentümlichkeiten, wonach die einen geschlossene Linien im allgemeinen mit einfachem Verlaufe, oder höchstens mit Doppelpunkten, die anderen im allgemeinen ungeschlossene Linien mit unendlich vielfachen Punkten sind.

**363.** Zwei Linien der topographischen Fläche sind von besonderer Wichtigkeit, die *Rinnelinie* oder der *Thalweg* ($CSD$ der Figur), und die *Rückenlinie* oder die *Wasserscheide* ($ESHF$). Beide sind Linien, über welche das langsam fließende Wasser nicht quer hinüberfließt, sie sind also *Falllinien*. Die *Rinnelinie* insbesondere ist eine solche Falllinie, zu welcher das abfließende Wasser zu beiden Seiten von verschiedenen Abhängen zuströmt und entlang welcher es bei hinreichender Menge einen Bach oder einen Fluß bildet; die *Rückenlinie* ist eine solche, von welcher das beiderseits fließende Wasser sich entfernt und verschiedenen Rinnelinien zufließt. Rasch fließendes Wasser kann durch seine Trägheit eine Rücken- oder eine Rinnelinie überschreiten, oder sie verlassen, wenn es in derselben floß; in die Rückenlinie kehrt es dann nicht zurück, wohl aber im allgemeinen in die Rinnelinie. Die erstere ist daher eine *Linie des labilen*, die letztere eine *des stabilen Fließens.*

Bei der geometrischen Auffassung wird das fließende Wasser durch Falllinien ersetzt. *Daher sind die Rücken- und Rinnelinien in besonderen Fällen die in den Bodenkanten liegenden Falllinien, und auf diese stoßen die benachbarten Falllinien auf; im allgemeinen aber sind es solche Falllinien, in deren Nähe die anderen Falllinien weit kleinere gegenseitige Abstände besitzen, als an entfernteren Stellen, an welche sich die benachbarten Falllinien in asymptotenähnlicher Weise annähern, und zwar im Steigen oder Fallen, je nachdem die Linien Rücken- oder Rinnelinien sind, und von denen aus, wenn sie Rückenlinien sind, die auf verschiedenen Seiten liegenden Falllinien nach verschiedenen Rinnelinien hin, und wenn sie Rinnelinien sind, nach verschiedenen Rückenlinien hin laufen*)*. Hieraus folgt auch, *daß der obere Endpunkt einer Rinnelinie und der untere einer Rückenlinie, wenn nicht in einem Sattelpunkte der Fläche, in einem Flachpunkte einer Horizontallinie liegt*, d. i. in einem Punkte, in dem die Horizontallinie von ihrer Tangente vierpunktig berührt wird (I, 246). Es ist die Annäherung als „asymptotenähnlich" bezeichnet worden, weil sich die Falllinien (in einem höchsten oder tiefsten Punkte) schneiden, während „asymptotische" Linien im Endlichen nicht zusammentreffen.

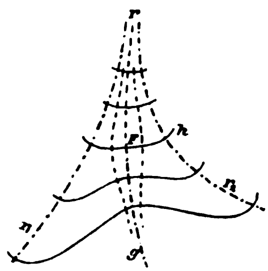
---

*) *Boussinesq* (Comptes rendus, B. 75, 1872, S. 198 f.) stellte einen Begriff dieser Linien (lignes de faîte et de thalweg) auf, den ich nicht für zutreffend halten kann.

Die Rücken- und Rinnelinien unterscheiden sich daher nur durch das Auf- und Absteigen der sich annähernden anderen Gefällelinien, was im Grundriß nur durch die beigeschriebenen Höhenzahlen zu entscheiden ist. Ohne diese Zahlen besitzen sie im Grundriß keinen Unterschied, und durch *Umkehrung des Sinnes des Zunehmens der Höhenzahlen werden die Rücken- zu Rinnelinien und umgekehrt.* Die Horizontallinien haben ihre hohle Seite in Punkten einer Rückenlinie im Inneren, in Punkten einer Rinnelinie im Äußeren der Erdmasse.

Geht man von einem höchsten Punkte abwärts, so durchschreitet man zunächst Horizontallinien, deren hohle Seite in jedem ihrer Punkte in der Erdmasse liegt. Es kann dann an einer Stelle eine Umstülpung eintreten, so daß sich die hohle Seite nach außen kehrt. Die Grenze zwischen beiderlei Horizontallinien bildet eine solche $h$, welche einen Flachpunkt $F$ besitzt. Die Falllinie dieses Punktes in ihrem abwärts gehenden Teile $g$ ist aber eine Rinnelinie. Denn die benachbarten Falllinien, abwärts gezogen, nähern sich ihr, während sie aufwärts gezogen sich den beiderseits liegenden Rückenlinien $r_1$ $r_2$ nähern, wie dies aus der Gestalt der Horizontallinien hervorgeht. Der aufwärts gezogene Teil der Falllinie des Flachpunktes ist keine Rinnelinie, weil sich ihr die aufwärts gezogenen Falllinien nähern; sie ist aber auch keine Rückenlinie, weil die Falllinien, nach unten gezogen, sich nicht verschiedenen, sondern derselben Rinnelinie anschließen. Bei dem *Flachpunkte* findet die *stärkste Aufbauschung* des Bündels von Falllinien statt. Fig. 156.

Fig. 156.



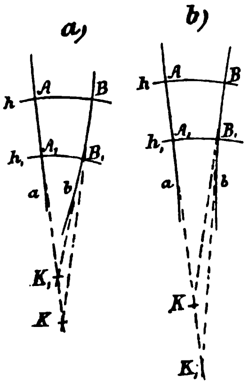

Es kommt häufig vor, daß sich ein abwärts gehender *Bergrücken in zwei Rücken teilt*, und daß unterhalb der Teilungsstelle zwischen beiden Rücken *ein Thal entspringt*; oder daß zwei abwärts gehende Thäler sich vereinigen, und daß ein zwischen ihnen verlaufender Rücken oberhalb der Vereinigungsstelle endet. In dem ersten Falle, dem der zweite reciprok gegenübersteht, lösen sich aus dem Bündel der nahe benachbarten Falllinien des noch ungeteilten Rückens $r$ zwei absteigende Falllinien los, die sich weiter unten deutlich als Rückenlinien $r_1$, $r_2$ erweisen, und eine dritte, welche zu einer Rinnelinie $g$ wird. Es laufen dann auf dem noch ungeteilten Rücken zwei Rückenlinien nahe nebeneinander her, welche einen Streifen einschließen, der zu dem Gebiete des erst weiter unten entstehenden Thales gehört. In gleicher Weise läuft auf einem

hochliegenden Rücken im allgemeinen eine größere Anzahl von Rückenlinien hin, welche den Rücken zugehören, die in größerer Tiefe aus dem ersteren Rücken entspringen.

**364.** *Das Gefälle einer topographischen Fläche ist entlang einer Horizontallinie derselben in demjenigen Punkte ein größtes oder ein kleinstes, in welchem der Grundriß einer Falllinie einen Wendepunkt besitzt. Es ist ein größtes, wenn die beiderseits benachbarten Falllinien jenem Punkte beide ihre hohlen, ein kleinstes, wenn sie ihm beide ihre erhabenen Seiten zukehren. Die Verbindungslinie dieser Wendepunkte heißt eine Linie des größten oder kleinsten Gefälles der Fläche*).*

Fig. 157. Es seien nämlich $h$ und $h_1$ zwei benachbarte Horizontallinien, $a$ und $b$ zwei benachbarte Falllinien; dieselben schneiden die ersteren Linien bezw. in den Punkten $A$, $B$ und $A_1$, $B_1$; es habe die $a$ in $A$ einen Wendepunkt und es kehre die $b$ dem $A$ in Fig. $a$) ihre hohle, in Fig. $b$) ihre erhabene Seite zu. Die $a$ hat, weil $A$ ein Wendepunkt derselben, in $A$ und $A_1$ dieselbe Tangente $AA_1KK_1$, die $b$ habe in $B$ und $B_1$ bezw. die Tangenten $BK$, $B_1K_1$. Diese Linien sind zugleich die Normalen der $h$ und $h_1$; daher sind $K$ und $K_1$ bezw. die Krümmungsmittelpunkte von $h$ und $h_1$ in $A$ und $A_1$. Nun liegt offenbar in $a$) $K_1$ innerhalb, in $b$) außerhalb $AK$; daher schneidet der Kreis, welcher aus $K_1$, oder koncentrisch mit dem Kreisbogen $A_1B_1$, durch $B$ gelegt wird, die $AA_1$ in $a$) außerhalb $AA_1$, in $b$) innerhalb $AA_1$; oder es ist in $a$) $AA_1 < BB_1$, in $b$) $AA_1 > BB_1$. Daher ist das Gefälle der Fläche in $a$) bei $A$ größer als bei $B$, in $b$) kleiner. Es ist also in einem Punkte $A$ einer Horizontallinie $h$, in welchem die Falllinie $a$ einen Wendepunkt hat, das Gefälle der Fläche größer oder kleiner, als in einem benachbarten Punkte $B$ der $h$, je nachdem die Falllinie $b$ von $B$ dem Punkte $A$ ihre hohle oder ihre erhabene Seite zukehrt. Hieraus folgt aber der Satz.

Fig. 157.




*Eine Linie des kleinsten Gefälles k* (Fig. 155) *liegt in einer Rücken- oder Rinnelinie, wenn die fragliche der letzteren Linien eine Bodenkante oder wenn ihr Grundriß eine Gerade ist. In den anderen Fällen weicht*

*) Der erste Teil dieses Satzes wurde analytisch schon von *Boussinesq* (Comptes rendus, B. 73, 1871, S. 1368 f.) nachgewiesen, und der Verlauf der Linien gegen die Rücken- und Rinnelinien von ihm bezeichnet. Die Kennzeichen des Maximums und Minimums gibt er nicht an.

*sie von dieser Linie ab; es liegt aber eine Linie des kleinsten Gefälles ganz nahe bei einer krummen Rücken- oder Rinnelinie, und zwar auf ihrer erhabenen Seite.* Denn indem die auf ihrer erhabenen Seite liegenden benachbarten Falllinien, welche ihr bei der asymptotenähnlichen Annäherung ihre hohle Seite zukehrten, sich rasch bei ihrer Entfernung abwenden, kehren sie ihr dann ihre erhabenen Seiten zu, so daß auf ihnen ein Wendepunkt durchlaufen wird. Die Linie dieser Wendepunkte ist aber eine solche *kleinsten* Gefälles, weil sie solche Wendepunkte der Falllinien enthält, denen die beiderseits benachbarten Falllinien ihre erhabenen Seiten zukehren. Eine Linie des kleinsten Gefälles schneidet die Rücken- und Rinnelinien in deren Wendepunkten.

*Andererseits liegt eine Linie des größten Gefälles g* (Fig. 153) *im allgemeinen in Mitten eines Abhanges, der eine Rücken- mit einer Rinnelinie verbindet,* indem der Übergang entlang einer Falllinie von der einen zur anderen jener Linien meist mit Umkehr des Sinnes der Krümmung, d. i. mit Durchschreitung eines Wendepunktes geschieht, denen die beiderseits benachbarten Falllinien ihre hohlen Seiten zukehren. Doch ist auch der Fall denkbar, daß zwischen einer Rücken- und einer benachbarten Rinnelinie eine Falllinie keinen oder nur einen nahe bei einer dieser Linien liegenden Wendepunkt besitzt, so daß hier keine Linie des größten Gefälles auftritt. Wenn z. B. die Horizontalprojektionen jener beiden Linien koncentrische Kreise sind, so ist es möglich, daß die Falllinien zwischen ihnen gar keinen Wendepunkt besitzen. Dann besteht auf dem zwischenliegenden Abhange keine Linie größten Gefälles, aber auch in der Nähe der durch den kleineren Kreis dargestellten Linie keine Linie kleinsten Gefälles. Es nimmt vielmehr das Gefälle entlang seiner Horizontallinie von einem auf den größeren Kreis projicirten Punkte gegen einen auf den kleineren Kreis projicirten und über diesen hinaus beständig zu, so daß erst jenseits derselben, wenn sich hier die Umstände ändern, eine Linie des größten und dann erst bei der folgenden Rücken- oder Rinnelinie eine Linie des kleinsten Gefälles auftritt.

**365.** Die Linien, welche die Punkte der größten oder der kleinsten Krümmung der Horizontallinien verbinden und die *Linien der größten oder kleinsten Horizontalkrümmung* heißen mögen, weichen meistens nicht viel von den Rücken- und Rinnelinien und von den Linien des kleinsten Gefälles ab. Daß sie aber im allgemeinen von ihnen verschieden sind, erkennt man deutlich an einem schiefen elliptischen Kegel. Bei demselben ist im Grundriß eine größte Normale, von der Spitze auf die Grundellipse gefällt, von denen eine oder zwei bestehen, eine Rückenlinie und

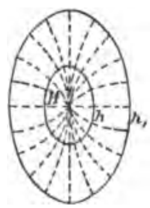
zugleich eine Linie kleinsten Gefälles; eine kleinste Normale, deren ebenso viele wie größte bestehen, eine Linie des größten Gefälles, während es eine Rinnelinie nicht gibt; die Geraden von der Spitze nach den Scheiteln der großen und kleinen Axe der Ellipse sind die Linien bezw. der größten und kleinsten Horizontalkrümmung.

**366.** *Die Gestalt der Bodenfläche wird durch geologische und meteorologische Vorgänge gebildet*, so durch das Erstarren feuerflüssiger Massen, durch Faltungen und Brüche der Erdrinde, durch das Ab- und Anschwemmen durch Meteorwasser, durch das langsame Niedersinken fester Körperteilchen auf den tiefen Meeresgrund. Einige dieser Vorgänge sind unstetig, wie die Brüche, und haben unstetige Formen zur Folge, wie die Felsgrate und die scharfen Rinnen in nacktem Gestein. Andere sind mehr oder weniger stetig, wie das Verwittern, das Ab- und Anschwemmen, und haben mehr oder weniger stetige Formen zur Folge. Aus der *Stetigkeit*, wo dieselbe bei der topographischen Fläche besteht, können durch geometrische Folgerungen Eigenschaften der verschiedenen Linien der Fläche hergeleitet werden, welche *geometrische Eigenschaften* derselben heißen mögen. Als solche führen wir folgende an:

1) *Im Grundrisse hat in einem höchsten oder tiefsten Punkte H einer stetigen topographischen Fläche eine Falllinie, wenn sie in ungeänderter Richtung über denselben fortgesetzt wird, im allgemeinen einen Wendepunkt.* Denn jede stetige Fläche schmiegt sich nach der später zu gebenden Lehre der Krümmung in jedem elliptischen Punkte derselben, also auch in einem höchsten oder tiefsten (Gipfel- oder Muldenpunkte) einem Ellipsoide an, das im besonderen auch eine Kugel sein kann, so daß im Grundrisse die benachbarten Horizontallinien $h$, $h_1$, weil sie beiden Flächen gemeinsam sind, ähnliche und ähnlich gelegene koncentrische Ellipsen (indicatrix) bilden, woraus folgt, daß deren Mittelpunkt $H$ ein Punkt jeder Trajektorie und zugleich ein Symmetrie-, daher ein Wendepunkt derselben ist. Die Axen dieser Ellipsen sind Tangenten der Projektionen der Linien des größten und kleinsten Gefälles der Fläche im Punkte $H$, weil das Gefälle der Fläche in den Scheiteln einer solchen Ellipse ein größtes oder kleinstes ist, da dies für den Kegel gilt, der das Ellipsoid entlang der Ellipse berührt. Daher gilt:

Fig. 158.

Fig. 158.

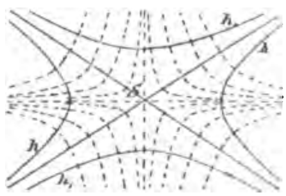


*In einem höchsten oder tiefsten Punkte einer topographischen Fläche schneiden sich im allgemeinen eine Linie des größten und eine des kleinsten Gefälles rechtwinklig; die erstere Linie berührt in jenem Punkte eine Rücken- bezw. Rinnelinie.* (Vergl. Fig. 155.) Ist aber die Fläche

in einem höchsten oder tiefsten Punkte kugelartig, so werden die Ellipsen zu Kreisen, und es gehen von jenem Punkte die genannten Linien nicht aus, bilden sich vielmehr erst in einem Abstande von jenem Punkte, und möglicher Weise auch mehr wie zwei von jeder Art der Linien.

2) *In einem Sattelpunkte S* (Fig. 155) *schneiden sich zwei Linien kleinsten Gefälles k rechtwinklig unter Halbirung der beiden Winkel der durch S gehenden Zweige der Horizontallinie. Außerdem gehen durch S eine Rücken- und eine Rinnelinie, welche die Linien des kleinsten Gefälles berühren. Eine weitere Falllinie geht nicht durch S.* Eine anschmiegende Fläche in einem Sattelpunkte ist ein einschaliges Hyperboloid; dasselbe wird von der Horizontalebene von $S$ in Fig. 159. zwei Erzeugenden, und von zweien beiderseits von $S$ in gleichen, unendlich kleinen Abständen liegenden horizontalen Ebenen in Hyperbeln geschnitten, deren Projektionen $h, h_1$ auf die durch $S$ gelegte Horizontalebene konjugirt sind und jene Erzeugenden zu Asymptoten haben. Die aufeinander senkrechten Axen der Hyperbeln sind ebensowohl Elemente der Linien kleinsten Gefälles der Fläche, weil dies für jeden Kegel gilt, welcher die Fläche entlang einer der Hyperbeln berührt, als auch Elemente bezw. von einer Rücken- und einer Rinnelinie, wie aus dem Verlaufe der (punktirten) Falllinien hervorgeht. Die Asymptoten endlich sind Tangenten der Horizontallinie der topographischen Fläche. Aus allem diesem folgt der Satz.

Fig. 159.



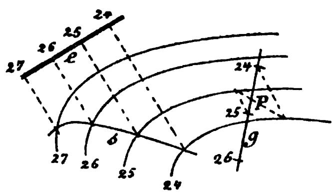

**367.** *Meteorologischer Natur* sind die Vorgänge, daß in dem Gebiete des Abschwemmens, dem Hochlande, die Meteorwasser Gerinne auswaschen, daß daher gegen abwärts sich vermehrende Rinnelinien auftreten, daß dadurch eine Verzweigung der Rückenlinien eintritt, daß sich Rinnelinien vereinigen und dadurch Rückenlinien abschließen; daß dagegen in dem Gebiete des Anschwemmens, der Tiefebene, insbesondere in einem Flußdelta, die herbeigeschwemmten Erdmassen wegen des zu geringen Gefälles nicht mehr weitergeführt werden können, daß sie sich niedersetzen und neue Rücken bilden, die zu einer Teilung der abwärts gehenden Rinnen führen. — Der *Charakter der Linien* wechselt mit der Entstehungsweise des Bodens. Wurde er durch Abschwemmen geformt, so sind die Horizontalkurven in der Nähe der Rücken- und Gerinnelinien am stärksten gekrümmt infolge des geringsten Abschwemmens an den ersteren und des stärksten an den letzteren. Ist der Boden durch einen Lavastrom gebildet, so verlaufen an dessen (steilen) Rändern Linien

der *stärksten Horizontalkrümmung.* — Im tiefen *Meeresgrunde* mögen die langsam niedersinkenden festen Körperteilchen ein vorherrschendes Ausfüllen der Tiefen bewirken.

**368.** *Grundaufgaben über die topographische Fläche.*

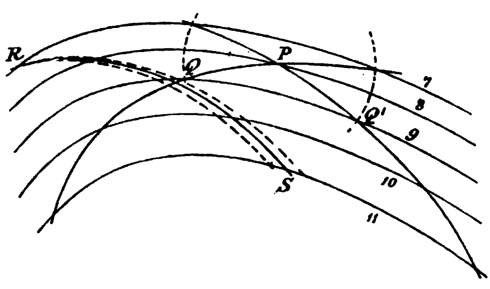
Fig. 160. 1) *Die Schnittlinie der Fläche mit einer Ebene zu ermitteln.* Die Ebene ist durch ihren Gefällemaßstab $e$ (I, 119) gegeben. Man lege durch dessen Teilpunkte die (zu $e$ senkrechten) Hauptlinien der Ebene; der Schnittpunkt einer jeden mit der Horizontallinie der Fläche von der gleichen Höhenzahl ist ein Punkt der Schnittlinie $s$.

Fig. 160.




2) *Den Schnittpunkt P der Fläche mit einer Geraden g zu bestimmen.* Man lege durch die Gerade eine Ebene, schneide sie mit der Fläche, so ist der Schnittpunkt der Schnittlinie mit $g$ der gesuchte Punkt $P$. — Sucht man zuerst diejenige Stelle der Geraden, welche zugleich zwischen zwei Punkten dieser Geraden und zwischen zwei Horizontallinien der Fläche liegt, die bezw. dieselben auf einander folgenden Höhenzahlen besitzen (in der Figur 24 und 25), so erhält man mittelst der durch jene Punkte der Geraden in passender Richtung gelegten Hauptlinien einer Hilfsebene zwei Punkte von deren Schnittlinie mit der Fläche, und zeichnet man dieselbe zwischen diesen Punkten als gerade Linie, so liefert deren Schnitt mit $g$ den Punkt $P$. Ist die Gerade nicht genau genug, so ermittelt man noch einen dritten Punkt der Schnittlinie.

Fig. 161.




3) *Auf einer stetigen Fläche von einem gegebenen Punkte P aus eine stetige Linie von gegebenem Gefälle* $\gamma$ *zu legen.*

Fig. 161. Ist die Schichthöhe $a$, so ist die Länge der Linie zwischen zwei aufeinander folgenden Horizontallinien (Kurven), oder das Intervall $i = a : \gamma$. Ist $P$ ein Punkt einer Kurve, so beschreibe man aus $P$ mit dem Halbmesser $i$ einen Kreis und schneide mit ihm die beiden benachbarten Kurven in vier Punkten; dann gehören je zwei derselben einer der beiden möglichen Kurven an. Von den zweien auf derselben Horizontallinie liegenden Schnittpunkten $Q$ und $Q'$ fährt man in gleicher Weise fort, behält aber dabei der

Stetigkeit der zu bestimmenden Kurve halber nur den dem $P$ gegenüberliegenden Schnittpunkt bei; u. s. w. Liegt $P$ nicht auf einer der Kurven, so beachtet man, daß sich die Linienstücke von $P$ bis zu den benachbarten Kurven verhalten wie die senkrechten Abstände des $P$ von diesen Kurven, und daß ihre Summe $= i$ ist.

4) *Zwischen zwei Punkte $R$ und $S$ der Fläche eine Linie von gleichförmigem Gefälle zu legen.* Man verbindet $R$ und $S$ durch eine Kurve, welche nach dem Augenmaße gleiche Stücke zwischen den aufeinander folgenden Kurven besitzt, trage die ungefähre mittlere Länge dieses Stückes in der Weise wie bei der vorigen Aufgabe von $R$ aus weiter, bilde zwei derartige Probelinien, die im allgemeinen beide nicht nach $S$ führen werden, und füge dann durch verhältnismäßige Einschaltungen auf den Horizontallinien eine weitere Kurve zu, deren Stücke zwischen den Horizontallinien man auf ihre Gleichheit prüfe und etwa verbessere.

**369.** *Aufg. Über einen geneigten Boden soll auf einem Damme eine ansteigende Eisenbahn in einer gegebenen kreisförmigen Kurve geführt werden; der Erddamm soll eine gegebene gleichförmige Böschung erhalten, an einer Stelle durch eine ebenfalls geböschte Mauer gestützt werden, und an diese soll sich der Erddamm kegelförmig anschließen. Es sind die Schnittlinien der verschiedenen Flächen zu verzeichnen*).*

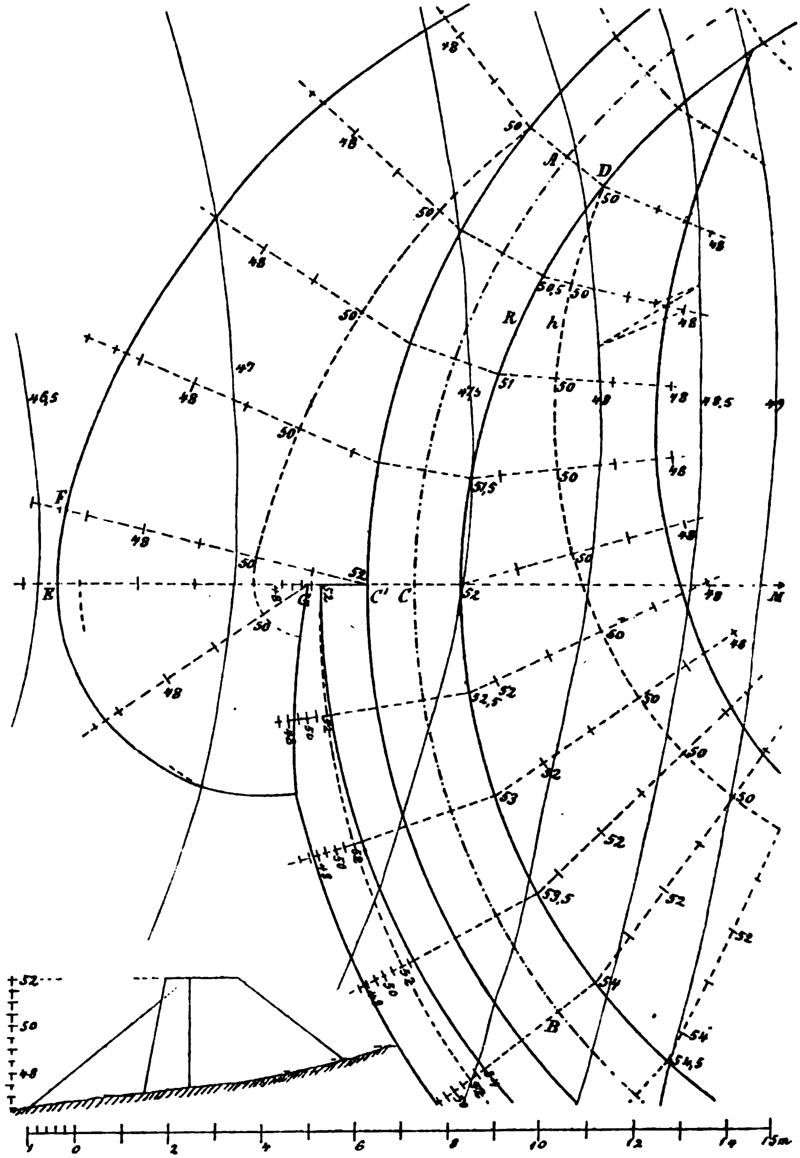
*Aufl.* Von der 2 m breiten Bahnkrone seien im Grundrisse die Axe durch den Bogen $AB$ eines Kreises von 15 m Halbmesser, die Randlinien daher durch Kreise von 14 und 16 m Halbmesser gebildet; der Mittelpunkt $M$ dieser Kreise liegt außerhalb der Zeichnung. Ferner sei die Höhe des Punktes $A$ über dem Meeresspiegel = 50 m, das Gefälle der gegen $B$ steigenden Mittellinie der (Zahnrad-)Bahn $\beta = 1:5$; dann beträgt, wenn die Schichthöhe $a = \frac{1}{2}$ m ist, das Intervall auf der Kronaxe $i = a : \beta = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ m. Entlang des Stückes $CB$ der Bahn sei der Damm gegen das Thal durch eine Mauer von 1 m Kronbreite gestützt. Auf der Kronfläche sind durch die Kotenpunkte Gerade durch $M$ gelegt, und diese horizontalen Linien bilden die Kronfläche. Die räumliche Mittellinie und die Kanten der Krone sind Schraubenlinien, die Kronfläche eine windschiefe geschlossene senkrechte Schraubenfläche (Wendelfläche), die wir später näher kennen lernen werden. Fig. 162.

Soll nun jede Seitenfläche des *Dammes* eine gleichförmige Böschung $\delta = 4:5$ besitzen, so muß die *Böschungsfläche* eine Fläche

*) Diese Aufgabe ist dem schon früher angeführten (I, 21) Buche „Kotirte Projektionsmethode“ von *Peschka* (1882, S. 187) entnommen; die Böschungsflächen des Dammes mußten wegen des hier angenommenen größeren Gefälles der Bahn anders, wie dort, behandelt werden.

von gleichförmiger Neigung, also eine *abwickelbare Schraubenfläche* (359, 3)) sein. Durch einen Punkt $D$ (50) einer schraubenförmigen Kronkante $s$ denke man eine horizontale Ebene gelegt; dieselbe schnei-

Fig. 162.




det den Schraubencylinder in einem Kreise $k$ vom Halbmesser $r'$ = 14 m, und die Böschungsfläche in einer Kreisevolvente $h$ (343); die Tangenten dieser Linien in $D$ seien bezw. $s'$, $k'$, $h'$; sie bilden

ein bei $k'$ rechtwinkliges Dreikant, in welchem $\operatorname{tg}(k's') = \beta(r:r')$ das Gefälle von $s$ ausdrückt, $\operatorname{tg}(h') = \delta$ ist, und daher die Seite $(k'h')$ bestimmt wird durch

$$\sin(k'h') = \frac{\operatorname{tg}(k's')}{\operatorname{tg}(h')} = \frac{\beta r}{\delta r'}.$$

Die Normalen von $k$ und $h$ bilden ebenfalls den Winkel $k'h'$; daher berührt die Normale der $h$ einen mit $k$ koncentrischen Kreis vom Halbmesser

$$r' \sin(k'h') = \frac{\beta}{\delta} r = \frac{1 \, . \, 5}{5 \, . \, 4} \cdot 15 \text{ m} = 3{,}75 \text{ m}.$$

Dieser Kreis ist die Projektion derjenigen Schraubenlinie, welche die Rückkehrkante der Böschungsfläche bildet, und $h$ ist die *Evolvente* des Kreises. Der Kreis ist unabhängig von $r'$; er gilt also auch für die durch die äußere Kronkante ($r'' = 16$ m) gehende Böschungsfläche, was sich auch dadurch begreifen läßt, daß Schnitte der Böschungsfläche der einen Kronkante mit koaxialen Cylindern Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe bilden, welche daher auch solche enthalten, die mit der andern Kronkante kongruent sind.

Es wurden nun die Falllinien der Böschungsflächen als Tangenten an jenen Kreis in zweierlei Sinn für beide Kronkanten gezogen und graduirt mit dem Intervalle $i = 1 : \delta = 1{,}25$ m. Ihre Schnittpunkte mit der Bodenfläche sind dann nach der vor. Nr. bestimmt, wie es an der von 50,5 ausgehenden Falllinie bemerklich gemacht ist.

Die *Stützmauer* habe eine Böschung $\mu = 5$. Dann ist für die Mauerfläche die Horizontalprojektion der (schraubenförmigen) Rückkehrkante ein Kreis mit dem Mittelpunkte $M$ und dem Halbmesser $\beta r : \mu = \frac{1 \, . \, 15}{5 \, . \, 5} = 0{,}6$ m, und ihre Horizontalschnitte sind Evolventen dieses Kreises. Das Intervall der Falllinien ist $i = 1 : 5 = 0{,}2$ m, und der Schnittpunkt einer jeden mit der Bodenfläche kann wegen ihrer Steilheit durch Schätzung im Grundriß genau genug als derjenige Punkt angegeben werden, welchem auf der Linie und auf der Fläche dieselbe Höhenzahl zugehört.

Die Stützmauer werde gegen den Damm durch eine durch $M$ gehende vertikale Ebene $CC'E$ abgegrenzt. Zwischen diese und die Falllinie $C'F$ des Dammes werde die Kegelfläche von der Böschung $\delta$ ($= 0{,}8$) und mit der Spitze $C'$ gelegt; dann erhält $C'E$ dieselbe Graduirung wie $C'F$, und es können ihre Schnittpunkte $E$ mit der Bodenfläche und $G$ mit der geböschten Mauerfläche bestimmt werden. Dann schließt man in $GE$ eine gleich geneigte Kegelfläche mit der Spitze $G$ an, deren Schnitt mit der Bodenfläche und mit der

geböschten Mauerfläche durch Erzeugende oder durch Horizontallinien der Flächen ermittelt werden.

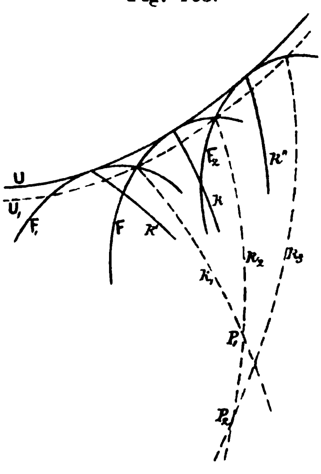
Der Schnitt mit der Vertikalebene $ECM$ ist in halber Größe des Grundrisses zugefügt.

### VI. Die Umhüllungsflächen.

**370.** Bewegt sich eine stetige Fläche **F** in stetiger Weise unter stetiger (oder ohne) Änderung ihrer Gestalt, so werden alle Lagen derselben von einer Fläche **U**, der *Umhüllungsfläche*, eingehüllt. Dieselbe berührt jede Lage der beweglichen oder *umhüllten Fläche* **F** nach einer Linie $k$, welche die Schnittlinie zweier benachbarten Lagen derselben ist und die *Charakteristik* der Umhüllungsfläche heißt.

Fig. 163. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir eine Lage der beweglichen Fläche mit **F**, die vorhergehende und folgende mit $F_1$ und $F_2$, und die Schnittlinie von **F** mit $F_1$ und $F_2$ bezw. mit $k_1$ und $k_2$.

Fig. 163.



Legt man durch alle solche Linien eine Fläche $U_1$, so besitzen **F** und $U_1$ Flächenstreifen zwischen $k_1$ und $k_2$, wobei man jedem Punkte des Streifens der **F** einen unendlich nahen Punkt des Streifens der $U_1$ zuordnen kann, etwa vermittelst einer durch beide Punkte gehende Normalen der **F**. Die Berührungsebenen von **F** und $U_1$ in diesen Punkten bilden unendlich kleine Winkel mit einander, weil beide unendlich kleine Winkel mit einer benachbarten die beiden Linien $k_1$ und $k_2$ berührenden Ebene bilden. Gehen nun $F_1$ und $F_2$ in **F** über, so gehen $k_1$ und $k_2$ wegen der Stetigkeit in ein und dieselbe Grenzlinie $k$, die Fläche $U_1$ in eine Grenzgestalt **U**, jene zugeordneten Punkte in denselben Punkt der $k$, und die Berührungsebenen an **F** und **U** in diesen Punkten in eine gemeinschaftliche Berührungsebene der **F** und **U** in diesem gemeinschaftlichen Punkte über. **U** berührt also die **F** entlang $k$, ist demnach die bezeichnete Umhüllungsfläche.

Je zwei der auf einander folgenden Linien $k_1$, $k_2$ . . ., der Erzeugenden der Fläche $U_1$, da sie auf derselben Lage der beweglichen Fläche **F** liegen, schneiden sich im allgemeinen. Die wechselnden

Schnittpunkte $P_1(k_1 k_2)$, $P_2(k_2 k_3)$ ... bilden ein krummliniges Vieleck, an dessen Seiten, wie $P_1 P_2$, die anliegenden Flächenelemente der $U_1$, nämlich die Scheitelwinkelpaare $k_1 k_2$, $k_2 k_3$, auf derselben Seite liegen, so daß das Vieleck eine Schneide von $U_1$ ist. In der Grenze berühren die Charakteristiken $k$, $k'$ ... der $U$ eine Kurve, die s. g. *Rückkehrkante der Umhüllungsfläche, welche deren Erzeugende einhüllt.*

Ist die umhüllte Fläche eine *Ebene*, so ist die Charakteristik eine *Gerade*, und die Umhüllungsfläche eine *abwickelbare.*

**371.** *Umhüllte Kegel, Cylinder und Kugeln.* Bewegt sich ein *Umdrehungskegel* so, daß sich seine Axe in sich selbst verschiebt und seine Gestalt sich stetig ändert, so ist die Charakteristik ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Axe steht und dessen Mittelpunkt in der Axe liegt; die Umhüllungsfläche ist daher eine Umdrehungsfläche. Man kann so jede Umdrehungsfläche erzeugen; die entlang ihrer Parallelkreise berührenden Umdrehungskegel sind die umhüllten Flächen. Diese Entstehung ist verkörpert bei der Erzeugung eines Umdrehungskörpers auf der Drehbank, wo der mit seiner geraden Schneide im Meridiane stehende Meißel in jeder Lage einen Kegelstumpf erzeugt. Eine Fläche zweiten Grades kann man als Umhüllungsfläche von *Kegeln* ansehen, so daß die Charakteristiken parallele Kegelschnitte der ersteren Fläche und der Ort der Spitze des Kegels der jenen Kegelschnitten konjugirte Durchmesser der Fläche ist.

*Cylinder* werden von einer Umdrehungsfläche umhüllt, wenn der senkrechte Schnitt eines jeden Cylinders ein Meridian der letzteren Fläche ist; oder wenn ein Cylinder von unveränderlicher Gestalt sich um eine zu seinen Erzeugenden senkrechte Axe dreht; aber auch dann, wenn diese Axe beliebig gegen den Cylinder geneigt ist.

*Umhüllte Kugeln.* Beschreibt der Mittelpunkt einer veränderlichen Kugel eine Kurve, so ist auf jeder Kugel die *Charakteristik ein Kreis*, dessen Ebene senkrecht auf der Tangente jener Kurve in dem augenblicklichen Orte des Kugelmittelpunktes steht, und dessen Mittelpunkt in dieser Tangente liegt. Beschreibt daher der Kugelmittelpunkt eine Gerade, so ist die Umhüllungsfläche eine Umdrehungsfläche, deren Axe jene Gerade bildet. Man kann jede Umdrehungsfläche als Umhüllungsfläche einer Kugel ansehen, wenn man die Normalen der Fläche entlang eines Meridianes vom Flächenpunkte bis zur Axe als Halbmesser und den letzteren Endpunkt als Mittelpunkt der Kugel annimmt.

Die Charakteristiken werden imaginär, wenn eine Kugel von ihrer benachbarten ganz eingeschlossen wird.

**372.** Die *Röhrenfläche* entsteht, wenn die bewegliche umhüllte

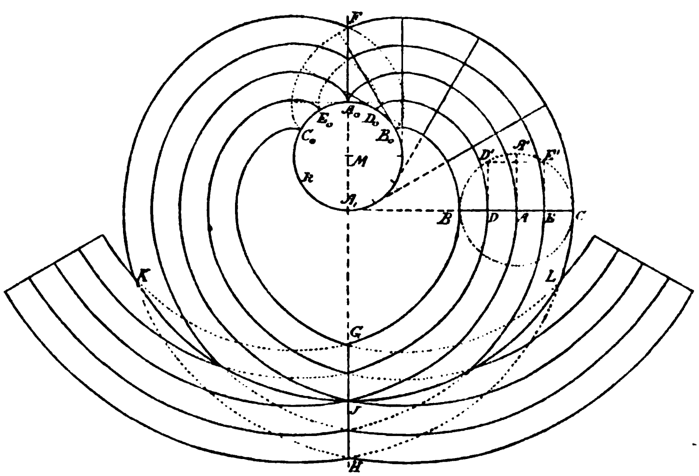
Kugel einen unveränderlichen Halbmesser besitzt. Die Charakteristik ist dann ein größter, also unveränderlicher Kreis, dessen Mittelpunkt die Bahnlinie des Kugelmittelpunktes beschreibt, und dessen Ebene senkrecht zur Bahnlinie im jedesmaligen Orte des Mittelpunktes steht. Die Bahn des Mittelpunktes der Kugel soll die *Leitlinie* der Röhrenfläche heißen.

Um den *Umriß* einer senkrechten Projektion der Röhrenfläche zu erhalten, ziehe man aus allen Punkten der Projektion der Leitlinie Kreise mit dem Halbmesser der umhüllten Kugel, so ist die *Umhüllungslinie* dieser Kreise der Umriß der Fläche, weil jeder Umrißpunkt der Fläche zugleich ein Umrißpunkt einer Kugel sein muß. Der Umriß ist daher eine *äquidistante oder parallele Linie der Projektion der Leitlinie* (I, 238), und besteht aus zweien auf beiden Seiten der Projektion der Leitlinie liegenden Ästen.

**373.** *Aufg. Die Röhrenfläche darzustellen, deren Leitlinie eine Kreisevolvente ist.*

Fig. 164. *Aufl.* Sei $k$ ein Kreis, $M$ sein Mittelpunkt und $A_0$ der Ursprung seiner Evolvente, so wollen wir deren Ebene als Projektionsebene P annehmen. In einem Punkte $A$ der Evolvente legen wir eine zu

Fig. 164.




ihr senkrechte Ebene; dieselbe berührt den Kreis $k$, und der Berührungspunkt sei $A_1$. In dieser Ebene befindet sich eine Charakteristik, ein Kreis vom Durchmesser $BAC$; seine Umlegung in P sei $BA'C$. Auf der Projektion $BC$ des Kreises wählen wir die Grenzpunkte $B, C$ und einige Zwischenpunkte $D, A, E$, welche den Durchmesser in gleiche Teile teilen mögen; jeder ist die Projektion

von zwei Punkten des Kreises, deren Abstände von der P bezw. 0, $DD'$, $AA'$, $EE'$ ($= DD'$), 0 sind.

Da die bezeichnete Bewegung der Charakteristik auch durch Rollen ihrer Ebene auf dem durch $k$ senkrecht zu P gelegten Cylinder hervorgebracht werden kann, so beschreibt jeder Punkt der Charakteristik eine zu P parallele Kreisevolvente, deren Projektionen Evolventen von $k$, also mit der ursprünglichen kongruent und äquidistant sind. Dieselben haben zum Ursprung die Punkte $B_0$, $D_0 \ldots$, wobei Bog. $B_0D_0 = BD$, Bog. $D_0A_0 = DA \ldots$ ist.

Zwei benachbarte Charakteristiken schneiden sich erst dann in reellen Punkten, wenn sie den über $k$ stehenden Cylinder berühren. Diese Punkte bilden zusammen die Aufwickelung $B_0A_0C_0$ des Kreises auf den Cylinder, die *Rückkehrkante* der Fläche, welche die Rückkehrpunkte oder Spitzen aller Evolventen enthält. Die Rückkehrkante ist die Grenze zweier Flächenäste, die in jedem Punkte der Kante eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen, bestimmt durch die Tangente der Rückkehrkante und die Normale zu dem über $k$ stehenden Cylinder in jenem Punkte.

Der *Selbstschnitt* oder *die Doppelkurve der Röhrenfläche* besteht zuerst aus den Schnittkurven der zu P senkrechten Ebene $A_0M$ mit der Fläche. Denn diese Ebene ist Symmetrieebene für die Leitlinie, also auch für die Röhrenfläche, und wird daher von beiden Flächenästen in denselben Kurven $A_0F$, $GH$, ... geschnitten.

Andere Doppelkurven werden gebildet durch die Selbstschnitte aller Kreisevolventen der Fläche. Von diesen Punkten projiciren sich die dem Kreise $k$ zunächst liegenden in $J, K, L \ldots$; und da sie, kongruenten Evolventen angehörend, alle gleich weit von $M$ entfernt liegen, bilden sie einen mit $k$ koncentrischen Kreis. Diese Doppelkurven liegen daher auf koaxialen Umdrehungscylindern von wachsender Größe.

**374.** *Übungsaufgabe.*

Für die eben behandelte Röhrenfläche zu konstruiren:

1) Die Projektion auf eine zu P senkrechte und zu $A_0M$ parallele Ebene, insbesondere die Projektion der Rückkehrkante und der Doppelkurven $A_0F$, $GJH$, $KJL$;

2) die Schnitte einer Reihe von Ebenen, welche $\perp A_0M$ stehen, insbesondere derjenigen, welche durch $A_0$, oder durch $F$, oder durch $B_0$ geht, sowie einer solchen, welche die Rückkehrkante in vier Punkten schneidet, und derjenigen, welche die Fläche in zwei getrennten Punkten berührt, entweder in der Nähe von $F$ oder möglicher Weise in der Nähe von $B_0$ und $C_0$;

3) die Berührungsebene an die Fläche in einem gegebenen Punkte derselben zu legen.

**375.** *Die Schrauben-Röhrenfläche darzustellen* (Röhrenfläche mit schraubenförmiger Leitlinie). Verkörpert heißt sie Schlangenrohr (Serpentine) und dient als Archimedische Wasserschnecke zum Heben von Wasser.

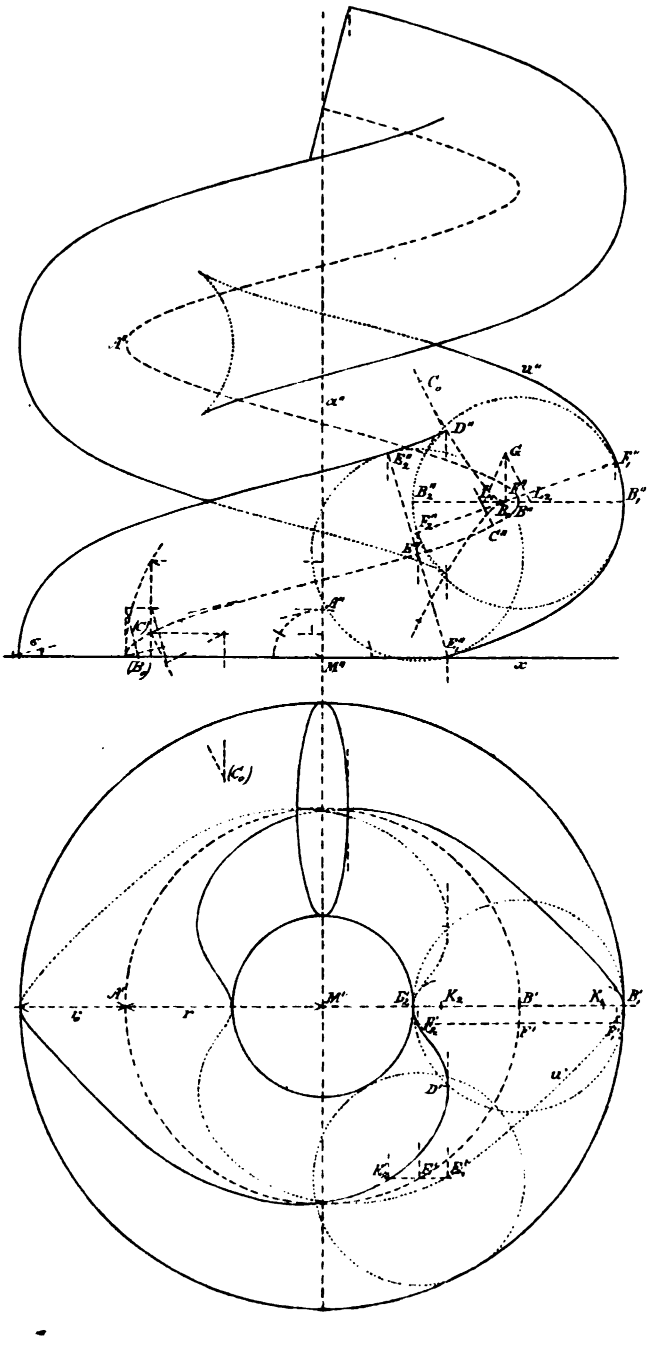
Fig. 165. *Aufl.* Stellen wir die $P_1$ senkrecht auf die Axe $a$ ($M'$, $a''$) der Schraubenlinie, so ist deren erste Projektion ein Kreis $A'B'$ mit dem Mittelpunkte $M'$ und dem Halbmesser $M'A' = r$, und die zweite Projektion eine Sinuslinie $A''B''$ mit der Axe $a''$. Sei $r_0$ der Halbmesser der beweglichen Kugel, wobei $r_0 < r$ sein möge, so erhält man die Umrisse der Fläche als die zwei Äste der Äquidistanten der Projektionen der Leitlinie im Abstande $r_0$ (372). Dieselben sind im Grundrisse zwei aus $M'$ mit den Halbmessern $r + r_0$ und $r - r_0$ gezogene Kreise. Im Aufriß erhält man sie einfach als einhüllende Linien zu den Kreisen, welche man aus den Punkten jener Sinuslinie mit dem Halbmesser $r_0$ zieht. Einzelne Punkte erhält man in $E_1''$ und $E_2''$, wenn man auf der Normalen der Sinuslinie in $E''$ nach beiden Seiten $E''E_1'' = E''E_2'' = r_0$ aufträgt.

Wenn, wie in dem Falle unserer Figur, ein Umriß Rückkehrpunkte besitzt, so ist es vorteilhaft, ein Stück der Evolute der Sinuslinie in der Nähe des Scheitels $B''$ zu verzeichnen. Es ist dies nach Nr. 333 an einem anderen Scheitel geschehen, und danach sind die Krümmungsmittelpunkte $B_0$ und $C_0$ für $B''$ und $C''$ aus $(B_0)$, $(C)$, $(C_0)$ übertragen. Diese Evolute ist auch die Evolute des Umrisses, und es können insbesondere aus $B_0$ die Krümmungskreise in den Scheiteln $B_1''$ und $B_2''$ verzeichnet werden. Auf der Evolute liegt die Spitze $D''$ des Umrisses, welche die Grenze ihres sichtbaren und ihres verdeckten Teiles bildet. Die erste Projektion $u'$ dieses zweiten Umrisses $B_2DE_2 \ldots = u$ bestimmt man, indem man beachtet, daß der Durchmesser $E_1EE_2$ der umhüllten Kugel, welcher nach den Punkten $E_1$, $E_2$ des zweiten Umrisses läuft, parallel zu $P_2$ liegt, also im Grundriß durch $E'$ parallel zu $x$ als $E_1'E'E_2'$ gezeichnet wird. Der Spitze $D''$ entsprechen Punkte $D$ und $D'$ der $u$ und $u'$, in welchen die Tangente $\perp P_2$ steht. $u''$ besteht aus zwei unbegrenzten, $u'$ aus zwei geschlossenen Kurvenästen. In der Figur ist die Fläche an ihrem oberen Ende durch eine auf $P_2$ senkrechte Charakteristik begrenzt, deren erste Projektion eine Ellipse bildet.

**376.** Um noch die *Krümmungshalbmesser* $r_1$, $r_2$ *von* $u'$ *in den Scheiteln* $B_1'$, $B_2'$ zu ermitteln, gehe man auf dem Kreise $B'A'$ um

ein Element $B'F'$ vorwärts, dessen Koordinaten von $B'$ aus in der Richtung $B'M'$ und in der darauf senkrechten Richtung $x$ und $y$

Fig. 165.



seien; dann ist $r = y^2 : 2x$. Aus $F'$ ergibt sich der Punkt $F_1'$ von $u'$ (wie $E_1'$ aus $E'$), dessen mit den Koordinaten von $F'$ parallele von $B_1'$ aus gemessene Koordinaten $x_1$, $y_1 = y$ sind, woraus $r_1 = y^2 : 2x_1 = r(x : x_1)$. Zu $F'$ gehört der Punkt $F''$ der Sinuslinie $B''A''$ mit den von $B''$ aus gemessenen Koordinaten $x$ und $z$; es ist aber $z = y \operatorname{tg} \sigma$, wenn $\sigma$ die Neigung der Schraubenlinie. Die Neigung der Normale $B_0F''$ der Sinuslinie gegen $B_0B''$ ist dann $z : B_0B'' = \varphi = y \operatorname{tg} \sigma : r \operatorname{tg}^2 \sigma$ (339) $= y : r \operatorname{tg} \sigma$. Die Koordinaten des Punktes $F_1''$, der auf $B_0F''$ durch $F''F_1'' = r_0$ bestimmt ist, sind dann, von $B_1''$ aus gemessen, $x_1$ und $z_1$, wobei $z_1 = B_0B_1'' . \varphi$; und hieraus folgt, da $F_1''B_1''$ mit $z$ den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ bildet,

$$x_1 = B_0B_1'' . \varphi . \tfrac{1}{2}\varphi = B_0B_1'' . \tfrac{1}{2}(y : r \operatorname{tg} \sigma)^2.$$

Daher ist

$$r_1 = r(x : x_1) = r\left(\frac{y^2}{2r} : \frac{y^2 . B_0B_1''}{2r^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}\right) = \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{B_0B_1''} = \frac{h_0^2}{B_0B_1''},$$

und

$$r_2 = \frac{h_0^2}{B_0B_2''},$$

wobei $h_0 = r \operatorname{tg} \sigma = M''A''$ die reducirte Ganghöhe der Schraubenlinien bedeutet. Daher erhält man auf $B_0B''$ den $r_1 = B_0L_1 = B_1'K_1$ und $r_2 = B_0L_2 = B_2'K_2$, wenn man $B_0G \parallel a''$ und $= M''A''$ macht und $GL_1 \perp B_1''G$, $GL_2 \perp B_2''G$ zieht.

Die *Gestalt der Röhrenfläche* ist verschieden, je nachdem der Halbmesser der Charakteristik $r_0$ kleiner, gleich oder größer als der Halbmesser der Leitschraubenlinie angenommen wird. Benachbarte Spitzen des zweiten scheinbaren Umrisses sind in zwei Punkte getrennt, vereinigen sich in einem Punkte (mit dem Krümmungshalbmesser gleich Null), oder verschwinden, je nachdem $r_0 >$, $=$, oder $<$ als der Krümmungshalbmesser $B_0B''$ jener Sinuslinie in ihrem Scheitel ist.

**377.** *Übungsaufgabe.* Die Schraubenröhrenfläche durch Ebenen zu schneiden, a) welche senkrecht auf der Axe, b) parallel zur Axe unter wechselndem Abständen ($0$, $r - \frac{11}{10} r_0$, $r - r_0$, $r - \frac{9}{10} r_0$, $r$, $r + \frac{9}{10} r_0$, $r + r_0$), c) geneigt gegen die Axe stehen. Dabei sollen Tangenten an die Schnittkurve bestimmt werden.

**378.** Die *Lichtgleichen einer Röhrenfläche* zeichnet man mittelst ihrer Punkte auf den Charakteristiken. Da diese größte Kreise gleicher umhüllten Kugeln bilden, so übertrage man ihre Projektionen (Ellipsen) durch eine Parallelverschiebung auf die gleichnamige Projektion einer gleichen Kugel, auf welcher die Projektionen der Lichtgleichen gezeichnet sind, schneide sie mit diesen Lichtgleichen, und

führe die Schnittpunkte durch eine Rückschiebung auf die ursprünglichen Ellipsen über.

*Übungsaufgaben.* 1) Von einem Gange einer Schraubenröhrenfläche (375), deren Axe senkrecht oder geneigt gegen $P_1$ steht, die Lichtgleichen, die Eigenschattengrenze und den Schlagschatten der Flächenteile auf einander und auf die Projektionsebenen zu bestimmen. Steht die Axe der Fläche senkrecht auf $P_1$, so sind die ersten Projektionen aller Charakteristiken kongruente Ellipsen.

2) Von einem Gange einer Schraubenröhrenfläche die Grenze des Eigen- und Schlagschattens zu konstruiren, wenn der leuchtende Punkt in endlichem Abstande liegt.

# X. Abschnitt.

## Die windschiefen Flächen.

### I. Allgemeines.

**379.** In Nr. 136 wurde eine windschiefe Fläche als eine solche Regelfläche bezeichnet, bei welcher je zwei benachbarte (gerade) Erzeugende nicht in derselben Ebene liegen, oder welche entlang einer Erzeugenden nicht von ein und derselben Ebene berührt wird. Wir lernten als die einfachsten die vom zweiten Grade, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, kennen. Im allgemeinen sind *die hauptsächlichsten Entstehungsweisen der windschiefen Flächen* folgende:

1) Eine jede windschiefe Fläche kann dadurch entstehen, daß *eine Gerade e als Erzeugende auf drei festen Leitlinien* $l_1$, $l_2$, $l_3$ *hingleitet*, indem sie jede derselben schneidet. Man findet die durch einen beliebigen Punkt $A_1$ der $l_1$ gehenden Erzeugenden als die gemeinschaftlichen Erzeugenden der beiden Kegel $A_1 l_2$, $A_1 l_3$, welche $A_1$ zur Spitze und bezw. $l_2$, $l_3$ zur Leitlinie haben. Die entstehende Fläche ist im allgemeinen windschief; denn sollten zwei benachbarte Erzeugende $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in einer Ebene liegen, so befänden sich in derselben die Paare benachbarter Punkte $A_1$, $B_1$ der $l_1$; $A_2$, $B_2$ der $l_2$; $A_3$, $B_3$ der $l_3$, d. h. die Tangenten der $l_1$ in $A_1$, der $l_2$ in $A_2$ und der $l_3$ in $A_3$. Dies findet offenbar im allgemeinen nicht statt. Tritt es aber für einzelne Lagen der Erzeugenden ein, so besitzt entlang derselben die windschiefe Fläche ebene Flächenelemente; und tritt es bei besonderer Annahme der Leitlinien für alle Erzeugenden ein, so entsteht eine *abwickelbare Fläche*, welche sich dadurch als besondere Art der windschiefen darstellt. So entsteht z. B. ein Cylinder, wenn die drei Leitlinien gleiche parallele Kreise sind, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

2) Die *reciproke*, ebenfalls für jede windschiefe Fläche geltende Entstehungsweise erhält man, wenn man an die Stelle der drei Leitlinien, welche man als einfache Punktreihen ansah, drei einfache Ebenenfolgen, d. i. drei abwickelbare Flächen setzt, welche von jeder

Erzeugenden berührt werden sollen. Eine abwickelbare Fläche hüllt aber die Schmiegungsebenen ihrer Rückkehrkante ein, so daß an die Stelle der Kurve, als Folge von Punkten, eine Kurve als Folge von Ebenen, nämlich ihrer Schmiegungsebenen, tritt. Man erhält Erzeugende der windschiefen Fläche, wenn man eine Berührungsebene der ersten der abwickelbaren Flächen mit den beiden anderen schneidet und an beide Schnittkurven die gemeinschaftlichen Tangenten zieht; dieselben bilden die Erzeugenden.

3) Sind *eine abwickelbare Leitfläche und zwei Leitlinien* gegeben, so findet man die Erzeugenden ähnlich wie in 2).

4) Die erste Entstehungsweise nimmt eine besondere Form an, wenn die eine der drei Leitlinien, etwa $l_3$, im Unendlichen liegt und durch den Kegel gegeben ist, welcher sie projicirt, mit dessen Erzeugenden daher die der windschiefen Fläche parallel sein müssen. Dieser Kegel ist der *Richtkegel* der Fläche.

5) Wird der Richtkegel zu einer *Richtebene*, so erhält man Erzeugende, wenn man eine zu der Richtebene parallele Ebene mit $l_1$ und $l_2$ schneidet und jeden der Schnittpunkte mit $l_1$ mit jedem derjenigen mit $l_2$ durch eine Gerade verbindet.

6) Es können die Leitlinien zum Teil oder alle durch *Leitflächen* ersetzt werden, welche von den Erzeugenden berührt werden sollen. Befindet sich unter den Leitgebilden eine Linie $l_1$, so bestimmt man die durch einen Punkt $A_1$ der $l_1$ gehenden Erzeugenden der windschiefen Fläche als die gemeinschaftlichen Erzeugenden der beiden Kegel, welche aus $A_1$ je einem der beiden anderen Leitgebilde (Linie oder Fläche) umschrieben sind. Sind drei Leitflächen $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ gegeben, so findet man diejenigen Erzeugenden $e$ der windschiefen Fläche, welche einer beliebigen und wechselnden Ebene $\mathbf{E}$ parallel sind, indem man den Ort der mit $\mathbf{E}$ parallelen, die $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ berührenden Geraden, d. i. eine windschiefe Fläche $\mathbf{F}$, bestimmt. Diejenigen Erzeugenden der $\mathbf{F}$, welche zugleich noch die $\mathbf{L}_3$ berühren, sind die gesuchten Erzeugenden; sie berühren aber auch die Schnittkurve $k$ der $\mathbf{F}$ und der $\mathbf{L}_3$, da im Punkte der Berührung dieser Erzeugenden mit $\mathbf{L}_3$ zwei gemeinsame Punkte der $\mathbf{F}$ und der $\mathbf{L}_3$, d. i. der Schnittkurve beider zusammenfallen, so daß jene Erzeugende Tangente der Schnittkurve ist. Man konstruirt daher diese Schnittkurve und zieht ihre mit $\mathbf{E}$ parallelen Tangenten, so sind diese die gesuchten Erzeugenden.

7) Es kann eine Leitlinie durch eine andere *Bedingung* ersetzt sein, z. B. durch die, daß das Stück der Erzeugenden zwischen den beiden Leitlinien eine gegebene *unveränderliche Länge* besitze, oder daß die Erzeugende die eine Leitlinie $l_1$ unter einem gegebenen

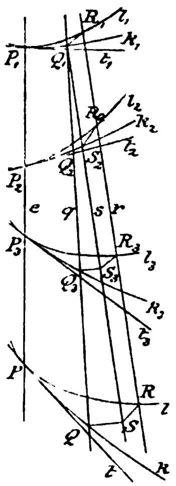
*unveränderlichen Winkel* schneide. Ist im letzteren Falle $l_1$ eine Gerade, so kann die Bedingung durch einen Richtkegel ersetzt werden.

8) Die Bewegung der *Erzeugenden* kann dadurch bestimmt sein, daß sie die *Normale einer gegebenen Fläche längs einer auf ihr gegebenen Kurve* bleibt, da, wie wir später sehen werden, zwei benachbarte Normalen einer Fläche im allgemeinen nicht in ein und derselben Ebene liegen. Eine solche Fläche heißt *Normalenfläche*.

**380.** *Zwei windschiefe Flächen* **F**, **F**$_1$, *welche eine Erzeugende e gemein haben, und sich in drei Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ derselben berühren, berühren sich in jedem Punkte P derselben.*

Fig. 166. Um dies in der gebräuchlichen Weise zu zeigen, legen wir durch $P_1$, $P_2$, $P_3$ je eine Ebene, schneiden dieselbe mit **F**, **F**$_1$ bezw. in den Kurven $k_1$, $l_1$; $k_2$, $l_2$; $k_3$, $l_3$, so müssen sich diese zu zwei in jenen drei Punkten berühren, weil sich **F**, **F**$_1$ in ihnen berühren. Läßt man nun die Erzeugende $e$ einmal auf $k_1$, $k_2$, $k_3$, dann auf $l_1$, $l_2$, $l_3$ als Leitlinien hingleiten, so beschreibt sie bezw. **F** und **F**$_1$, und da die Leitlinien zu zwei ein Element gemein haben, so haben die Flächen außer $e$ noch eine benachbarte Erzeugende $e_1$ gemein, haben also in jedem Punkte $P$ der $e$ eine gemeinsame Berührungsebene, nämlich die durch $e$ und durch den zu $P$ benachbarten Punkt der $e_1$ gehende Ebene.

Fig. 166.



Will man aber die unendlich kleinen Abstände und Winkel der zu $e$ benachbarten Erzeugenden $q$, $r$ der beiden Flächen eingehend erörtern, so trage man auf $k_1$ und $l_1$ die gleichen Elemente $P_1Q_1 = P_1R_1 = 0^1$ auf, wodurch im allgemeinen $Q_1R_1 = 0^2$ und $\sphericalangle Q_1P_1R_1 = 0^1$ wird. Durch $Q_1$ und $R_1$ lege man bezw. die Erzeugenden $q$ der **F** und $r$ der **F**$_1$. Da bei einer windschiefen Fläche, für $P_1Q_1 =$ endlich, auch der Winkel von $e$ und $q$ endlich ist, so ist er für $P_1Q_1 = 0^1$, im allgemeinen ebenfalls $= 0^1$ (I, 232). Wenn $\sphericalangle eq$ im besonderen $= 0$ von höherer Ordnung wird, so ist $q \parallel e$, das Flächenelement $eq$ eben, und unser Satz selbstverständlich. Ebenso ist der Abstand von $e$ und $q$ im allgemeinen an jeder Stelle $= 0^1$; wenn er im besondern an einer Stelle $= 0$ von höherer Ordnung wird, so schneiden sich hier die $q$ und $e$, und das Element $eq$ ist wieder eben. Ebenso ist im allgemeinen $\sphericalangle er = 0^1$, und Abstand $e$, $r$ an jeder Stelle $= 0^1$. Schneidet man nun $q$ und $r$ mit den durch $P_2$ und $P_3$ gelegten Ebenen bezw. in $Q_2$, $Q_3$; $R_2$, $R_3$, so ergeben sich auch $\sphericalangle Q_2P_2R_2$ und $\sphericalangle Q_3P_3R_3$ beide $= 0^1$, wenn nicht 0 von höherer Ordnung.

Daraus folgt aber, daß $\sphericalangle qr = 0^2$, wenn nicht 0 von noch höherer Ordnung ist. Denn zieht man durch $Q_1$ die Gerade $s \parallel r$, und schneidet sie mit den durch $P_2$, $P_3$ gelegten Ebenen bezw. in $S_2$, $S_3$, so sind $R_2 S_2$ und $R_3 S_3 = 0^2$ (wie $R_1 Q_1$), und $\sphericalangle S_2 P_2 R_2$ und $\sphericalangle S_3 P_3 R_3 = 0^1$. Wäre aber $\sphericalangle qr = 0^1$, so würde auch $\sphericalangle qs = 0^1$ sein, ebenso $Q_3 S_3 = 0^1$, und da auch $P_3 Q_3 = 0^1$, so würde $\sphericalangle Q_3 P_3 S_3$ endlich sein; dasselbe würde für jeden Punkt der $e$ gelten, so daß z. B. auch $Q_2 P_2 S_2$ endlich wäre, außer da, wo $\sphericalangle PQS = 0^0$ oder $= 180^0$ ist, wo also die Ebene $qs$ die $e$ schneidet, was etwa in $P_2$ stattfinden möge; dann trifft auch die $Q_2 S_2$ die $e$. Nur an den beiden Stellen $P_1$ und $P_2$ könnten dann auch die Winkel $Q_1 P_1 R_1$ und $Q_2 P_2 R_2 = 0^1$ sein. Da $\sphericalangle QPR$ aber an drei Stellen $P_1$, $P_2$, $P_3 = 0^1$ ist, so kann nicht $\sphericalangle qr = 0^1$, es muß vielmehr $= 0^2$ oder 0 von noch höherer Ordnung sein. Dann sind auch für jeden vierten Punkt $P$ der $e$, wenn man durch ihn eine Ebene legt, bei entsprechenden Bezeichnungen, $QS$, $SR$, $QR$, alle $= 0^2$, $PQ$, $PR = 0^1$, daher $\sphericalangle QPR = 0^1$, oder $k$ und $l$ und daher auch F und $\text{F}_1$ berühren sich in $P$, w. z. b. w.

**381.** Nimmt man die Tangenten $t_1$, $t_2$, $t_3$ der drei Leitlinien $l_1$, $l_2$, $l_3$ einer windschiefen Fläche in ihren Schnittpunkten mit einer Erzeugenden $e$ zu Leitlinien, oder auch drei Gerade, welche die Fläche je in einem Punkte einer $e$ berühren, so bestimmen diese als Leitlinien im allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid, welches die Fläche in jedem Punkte der $e$ oder entlang $e$ berührt (380). Man nennt dasselbe *Berührungshyperboloid* entlang der Erzeugenden $e$. Es giebt deren unendlich viele.

Wählt man die drei Tangenten parallel mit ein und derselben Ebene, so erhält man ein entlang $e$ berührendes hyperbolisches Paraboloid, ein *Berührungsparaboloid*; es genügt dann die Angabe zweier Tangenten $t_1$, $t_2$, mit denen dann jene Ebene, die Richtebene der Tangenten, parallel ist. Die Berührungsebene der Fläche (und des Paraboloides) in dem unendlich fernen Punkte der $e$ ist dann diejenige Ebene, welche durch $e$ gelegt wird parallel mit einer zweiten die $t_1$ und $t_2$ schneidenden Erzeugenden des Paraboloides.

Wählt man $t_1$ und $t_2$ senkrecht zu $e$, so ist auch die mit $t_1$ und $t_2$ parallele Richtebene und jede Erzeugende der Schaar $t$ des Paraboloides senkrecht zu $e$ und berührt die Fläche. Denkt man sich dieses Paraboloid um $e$ um $90^0$ gedreht, so werden die $t$ Normalen zur Fläche, woraus folgt: *Die Normalen einer windschiefen Fläche, deren Fußpunkte in einer Erzeugenden derselben liegen, bilden ein hyperbolisches Paraboloid, das s. g. Normalenparaboloid.*

**382.** Weil das Berührungshyperboloid einer windschiefen Fläche

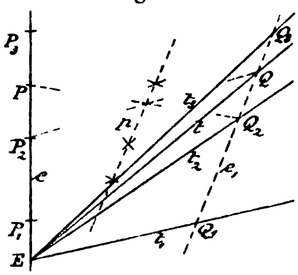
mit dieser in jedem Punkte einer Erzeugenden die Berührungsebene gemein hat, so gilt auch für die Fläche der Satz der Nr. 139, und heißt dann: *Jede durch eine Erzeugende e einer windschiefen Fläche gehende Ebene berührt die Fläche in einem Punkte der e. Das Büschel e dieser Ebenen ist mit der Reihe e der zugehörigen Berührungspunkte projektiv.*

Danach löst man die

*Aufg. Für drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ einer Erzeugenden e einer windschiefen Fläche sind die Berührungsebenen $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ gegeben; man soll für einen vierten Punkt P der e die Berührungsebene $\mathbf{T}$, oder für eine vierte durch e gelegte Ebene $\mathbf{T}$ den Berührungspunkt P konstruiren.*

Fig. 167. *Aufl.* 1. Die Figur gibt die Darstellung in einer einzigen Projektionsebene $\mathbf{P}_1$, da diese genügt. $E$ sei die Spur der $e$, die durch $E$ gehenden Geraden $t_1$, $t_2$, $t_3$ seien die Spuren, $P_1$, $P_2$, $P_3$ die Projektionen der Berührungspunkte der $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$. Die Punktreihe $e$ der $P$ ist nun projektiv mit dem Büschel $E$ der $t$, und es sollen von zwei weiteren entsprechenden Elementen $P$, $t$ das eine aus dem gegebenen anderen gefunden werden. Es geschieht dies vermittelst einer Hilfsgeraden $e_1$ in $\mathbf{P}$, welche das Strahlenbüschel in der Punktreihe $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ schneidet, durch die perspektive Axe $p$ (I, 283) zwischen den projektiven Reihen der $P$ und der $Q$ und durch Bestimmung der entsprechenden Elemente $P$, $Q$ und $EQ = t$.

Fig. 167.



*Aufl.* 2. Denkt man sich ein entlang $e$ berührendes Hyperboloid gelegt, das durch drei Erzeugende der zweiten Schaar gegeben ist, wovon jede in einer der gegebenen Berührungsebenen beliebig angenommen werden kann, so seien $P_1Q_1$, $P_2Q_2$ die beiden ersten derselben, und $Q_1$, $Q_2$ ihre Spuren. Schneidet nun die dritte Berührungsebene die $Q_1Q_2 = e_1$ in $Q_3$, so kann $P_3Q_3$ als dritte Erzeugende angenommen werden. Dann sind $e$ und $e_1$ Erzeugende der ersten Schaar, und sie werden von denen der zweiten in den projektiven Punktreihen $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ geschnitten. Zu $P$ sucht man dann, wie vorher, den entsprechenden Punkt $Q$ und die Berührungsebene $eQ = \mathbf{T}$, oder umgekehrt.

Sind statt der Berührungsebenen drei die Fläche bezw. in $P_1$, $P_2$, $P_3$ berührende Gerade, etwa die Tangenten der Leitlinien, gegeben, so lege man zwei Gerade $e_1$ und $e_2$, welche diese Tangenten schneiden, und durch $P$ eine die $e_1$ und $e_2$ schneidende Gerade $t$; dann ist $et = \mathbf{T}$ die Berührungsebene in $P$; oder man schneide die

durch $e$ gehende Ebene T mit $e_1$ und $e_2$, so bestimmt die Verbindungslinie der Schnittpunkte auf $e$ den Berührungspunkt $P$ der T.

**383.** Die Berührungsebene einer windschiefen Fläche in dem unendlich fernen Punkte einer Erzeugenden heißt eine *asymptotische Ebene* der Fläche. Alle asymptotischen Ebenen werden von einer abwickelbaren Fläche umhüllt, welche die *asymptotische abwickelbare Fläche der windschiefen Fläche* heißt und diese entlang ihrer unendlich fernen Kurve berührt. Die aus ein und demselben Punkte als Spitze gebildeten *Richtkegel* der windschiefen und jener asymptotischen Fläche fallen zusammen; sie projiciren die gemeinschaftliche unendlich ferne Kurve der beiden ersteren Flächen. Die Berührungsebenen dieses Richtkegels sind mit den asymptotischen Ebenen der windschiefen Fläche, und die Erzeugenden des Kegels sind sowohl mit denen der windschiefen, als mit denen der asymptotischen Fläche parallel. Also sind auch die in einer asymptotischen Ebene liegenden Erzeugenden der windschiefen und der asymptotischen Fläche unter einander parallel.

**384.** Wie bei dem einschaligen Hyperboloide (149), so nennt man bei jeder windschiefen Fläche den *Centralpunkt* einer Erzeugenden den Punkt, in welchem sie ihrer benachbarten Erzeugenden am nächsten ist, in welchem also auch ihre Berührungsebene, die s. g. *Centralebene der Erzeugenden*, senkrecht auf ihrer asymptotischen Ebene steht. Die Gesamtheit der Centralpunkte der Fläche bildet deren *Striktionslinie.*

Ordnet man in dem durch eine Erzeugende $e$ gehenden Büschel von Ebenen einer jeden die auf ihr senkrechte zu, so bildet das Ebenenbüschel eine gleichlaufende *Involution* (I, 348), also auch die Reihe ihrer Berührungspunkte auf $e$, deren Potenz $p^2$ daher negativ ist (I, 300). Der *Centralpunkt* $C$ ist dabei dem unendlich fernen Punkte $U$ zugeordnet, also der *Mittelpunkt der Involution.* Den beiden zugeordneten Ebenen, welche mit der Centralebene einen Winkel von 45° bilden, gehören Berührungspunkte $M$ und $N$ an, welche von $C$ auf beiden entgegengesetzten Seiten gleich weit abstehen. Denn $CUMN$ müssen harmonisch liegen, weil ihre Berührungsebenen so liegen. Daher sind $M$ und $N$ die ideellen Doppelpunkte der gleichlaufenden Punktinvolution und es ist $CM$ oder $CN = \pm\sqrt{-p^2}$ (I, 300). Man nennt diese Abstände den *Parameter* der Erzeugenden.

Während ein Punkt eine ganze Erzeugende beschreibt, dreht sich die zugehörige Berührungsebene um 180°, und zwischen den ideellen Doppelpunkten um 90°. Je kleiner der Parameter, um so rascher die Drehung in der Nähe des Centralpunktes. Schneiden

sich zwei benachbarte Erzeugende, so ist ihr Schnittpunkt der Centralpunkt; in ihm kann man sich die ganze Drehung vor sich gegangen denken.

Es leuchtet ein: *Zwei windschiefe Flächen berühren sich entlang einer gemeinschaftlichen Erzeugenden e, wenn deren Centralpunkte und Centralebenen sich decken, wenn ihre Parameter gleich sind und wenn der Drehungssinn der Berührungsebene bei beiden übereinstimmt.*

**385.** *Die Schnittlinie einer Ebene mit einer windschiefen Fläche* ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Ebene mit den Erzeugenden der Fläche.

*Der aus einem Punkte einer windschiefen Fläche umschriebene Kegel* ist der einhüllende Kegel der Verbindungsebenen des Punktes mit den Erzeugenden der Fläche.

*Schneidet eine Gerade $g$ eine windschiefe Fläche* in $n$ Punkten, so ist jede durch $g$ und die Erzeugende eines jener Punkte gelegte Ebene eine durch $g$ gehende Berührungsebene der Fläche, deren Berührungspunkt jedoch nicht in jenem Schnittpunkte liegt. Außerdem gibt es aber keine durch $g$ gehende Berührungsebene, weil jede eine Erzeugende enthält, diese aber die $g$, und zwar in einem jener $n$ Punkte, schneiden muß. Es schneidet daher eine Gerade die Fläche in ebenso vielen Punkten, als Berührungsebenen durch sie an die Fläche gelegt werden können, oder *eine windschiefe Fläche von der $n^{ten}$ Ordnung ist auch von der $n^{ten}$ Klasse, und man nennt sie vom $n^{ten}$ Grade.* Die Ordnung einer ebenen Schnittkurve und die Klasse eines umschriebenen Kegels der Fläche sind dann ebenfalls die $n^{te}$.

**386.** Eine Leitlinie $l_1$ einer windschiefen Fläche ist im allgemeinen eine *vielfache Linie* derselben; durch jeden ihrer Punkte $P$ gehen nämlich so viele Erzeugende, als die aus $P$ durch je eine der anderen Leitlinien $l_2$ und $l_3$ gelegten Kegel Erzeugende gemein haben, also $m_2 m_3$, wenn $m_2$ und $m_3$ die Ordnung bezw. von $l_2$ und $l_3$ angeben. In der Figur sind zwei solche, $e$, $e'$, gezeichnet. Berühren sich die aus einem Punkte $C$ der $l_1$ gelegten beiden Kegel, so ist ihr entlang der Berührungserzeugenden $c$ liegendes gemeinsames Element auch ein ebenes Flächenelement der windschiefen Fläche. Eine solche Erzeugende $c$ mag eine *Kante**) der Fläche heißen.

Fig. 168.

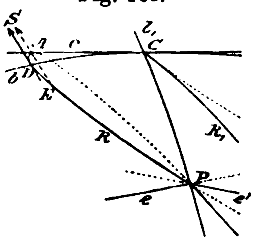


Fig. 168.

*) Herr *de la Gournerie* in seiner Géom. descr., B. 2, 1862, S. 151, nennt (mit *Bour*) arête eine Erzeugende einer windschiefen Fläche, welche mit ihrer

Bewegt sich der Punkt auf $l_1$ von $C$ aus nach der einen Seite, in der Figur gegen $P$ hin, so werden wegen der Stetigkeit, die wir stets voraussetzen, die beiden den Kegeln gemeinsamen zusammenfallenden Erzeugenden in zwei getrennte übergehen, und bei der Bewegung nach der anderen Seite hin verschwinden; ausgenommen den Fall, den wir nicht weiter verfolgen, in welchem die Kante eine singuläre Erzeugende (mit Rückkehrelementen) des einen oder der beiden Kegel ist. In jenem allgemeinen Falle wird dann $C$ ein Grenzpunkt sein, in welchem, wenn er von dem laufenden Punkte $P$ durchschnitten wird, sich die Anzahl der reellen Erzeugenden um zwei verändert.

Jede der Berührungsebenen der Fläche in dem vielfachen Punkte $P$ enthält die Tangente der $l_1$ in $P$ und eine der durch $P$ gehenden Erzeugenden. Wenn zwei dieser Erzeugenden, $e$, $e'$, bei dem Fortrücken von $P$ auf $l_1$ sich nähern und bei $C$ zusammenfallen, so fallen auch die beiden durch sie gehenden Berührungsebenen zusammen. Schneidet eine Ebene die $l_1$ in $P$, und die $c$ in $A$, so schneidet sie die Fläche in einer Kurve $k$, welche bei $P$ einen vielfachen Punkt hat, den wir nur als Doppelpunkt ins Auge fassen, indem wir nur die beiden Flächenzweige $l_1 e$, $l_1 e'$ der bei $C$ zusammenfallenden Erzeugenden $e$, $e'$ beachten. Die $k$ wird in $A$ von der die Fläche entlang $c$ berührenden Ebene im allgemeinen ohne gleichzeitiges Schneiden berührt. Rückt nun der Schnittpunkt $P$ in $C$, so geht die Kurve $k$ mit der Schleife $PAP$ in die Kurve $k_1$ mit der Spitze $C$ über, da die beiden Tangenten in $P$ zu einer einzigen Tangente in $C$ werden, und da die $c$ in $C$ durch jene die Fläche entlang $c$ berührende Ebene ohne Schneiden berührt wird. Auch jede unebene durch $C$ gehende Kurve der Fläche hat in $C$ eine Spitze, da man jene schneidende Ebene durch die Schmiegungsebene der Kurve in $C$ ersetzen kann, den Fall ausgenommen, daß diese Schmiegungsebene die Kante $c$ enthält, wo dann die Kurve aus $c$ und einem sie berührenden Zweige besteht. Der Punkt $C$ heißt ein *Kuspidalpunkt* der Fläche (Zwickpunkt, pinch-point, sommet). Da jede durch die Spitze einer Kurve gehende und in ihrer Schmiegungsebene liegende Gerade als Tangente derselben anzusehen ist, so *berührt jede durch den Kuspidalpunkt $C$ gehende Gerade und,* da jede Berührungsebene die Erzeugende ihres Berührungspunktes enthält, *jede durch die Kante $c$ gehende Ebene*

---

benachbarten parallel ist, während wir die Bezeichnung Kante auf die so häufig vorkommenden, aber, wie es scheint, nicht benannten Erzeugenden ausdehnen wollen, welche mit ihrer benachbarten in derselben Ebene liegen.

*die Fläche in C. Daher geht auch die Berührungskurve b eines jeden einer windschiefen Fläche umschriebenen Kegels, also jede Umrißlinie und jede Eigenschattengrenze, durch alle Kuspidalpunkte der Fläche. Zugleich berührt sie in einem solchen Punkte die durch ihn gehende Kante der Fläche.* Um noch letzteres zu beweisen, legen wir durch die Spitze $S$ des Kegels und durch die Punkte $A$ der $c$ und $P$ der $l_1$, für welche $CA$ und $CP = 0^1$ ist, eine Ebene; dieselbe schneidet die Fläche in einer Kurve $k$, welche bei $P$ einen Doppelpunkt besitzt. Zieht man aus $S$ an $k$ eine Tangente, welche in $D$ berühren möge, so ist $D$ ein Punkt des Umrisses $b$, welcher außerdem durch $C$ geht. Wenn wir nun zeigen, daß $AD = 0^2$, so können wir daraus folgern, daß $\sphericalangle ACD = 0^1$, daß also $CA$ oder $c$ die Tangente der $b$ in $C$ ist. Die beiden Tangenten der $k$ in ihrem Doppelpunkte $P$ bilden aber einen Winkel $= 0^1$, weil auch die Berührungsebenen der Fläche in $P$ einen solchen Winkel bilden. Zieht man nun durch $S$ die Sehne $AE$ der $k$, so ist im Dreiecke $APE$ der $\sphericalangle P = 0^1$ (nämlich kleiner als der Winkel der Tangenten der $k$ in $P$), $\sphericalangle A$ endlich, $PA = 0^1$, folglich $AE = 0^2$; daher um so mehr $AD = 0^2$, wodurch der Satz bewiesen ist.

Rückt ein *Kuspidalpunkt ins Unendliche*, so wird die nach ihm laufende *Kante zu einer Asymptote der Berührungskurve* eines jeden umschriebenen Kegels und eines jeden Umrisses.

Diese für eine vielfache Leitlinie der Fläche gewonnenen Ergebnisse gelten für jede vielfache Linie der Fläche, da man diese, wie jede Linie der Fläche, als eine Leitlinie ansehen kann, möglicherweise mit Ausschluß einer Reihe von Erzeugenden, die durch sie als Leitlinien neu eingeführt würden. Jeder Kuspidalpunkt liegt auf einer vielfachen Linie der Fläche.

**387.** Indem wir in der Folge öfter *Sätze über Linien und Flächen höherer Ordnung auf analytischer Grundlage* beweisen, wollen wir die dabei zu benutzenden und zum Teil schon früher benutzten Begriffe und Sätze zusammenstellen:

1) Eine *Linie von der $n^{ten}$ Ordnung* ist eine solche Linie, welche von jeder Ebene in $n$ (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird. Ist die Linie *eben*, so wird sie von jeder Geraden ihrer Ebene in $n$ Punkten geschnitten.

2) Eine *Linie von der $n^{ten}$ Klasse* ist eine solche Linie, von deren Schmiegungsebenen $n$ durch jeden Punkt gehen, oder an deren abwickelbare Fläche (ihrer Tangenten) durch jeden Punkt $n$ Berührungsebenen gehen. Ist diese abwickelbare Fläche ein *Kegel*, so gehen durch jede durch seine Spitze gelegte Gerade $n$ Berüh-

rungsebenen desselben. Ist die Linie *eben*, so gehen durch jeden Punkt ihrer Ebene $n$ Tangenten an dieselbe.

3) Eine ebene Kurve von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung oder Klasse ist durch $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1=\frac{1}{2}n(n+3)$ *Punkte*, durch welche sie geht, oder *Gerade*, welche sie berührt, *bestimmt*. Denn so groß ist die Anzahl der unabhängigen Konstanten ihrer allgemeinen Gleichung.

4) In derselben Ebene haben zwei Kurven bezw. von der $m^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Ordnung oder Klasse $mn$ *Punkte* oder $mn$ *Tangenten* gemein. Denn durch Elimination der einen Veränderlichen aus ihren Gleichungen erhält man eine Gleichung vom $mn^{\text{ten}}$ Grade nach der anderen Veränderlichen.

5) Eine *Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung* ist eine solche Fläche, welche von jeder Geraden in $n$ Punkten, und daher von jeder Ebene in einer Linie von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung geschnitten wird.

6) Eine *Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Klasse* ist eine solche Fläche, an welche durch jede Gerade $n$ Berührungsebenen, und daher aus jedem Punkte als Spitze ein berührender Kegel von der $n^{\text{ten}}$ Klasse gehen.

7) Eine Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung oder Klasse ist durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1$ *Punkte*, durch welche sie geht, oder *Ebenen*, welche sie berührt, *bestimmt*.

8) Zwei Flächen bezw. von der $m^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Ordnung schneiden sich in einer *Linie von der $mn^{\text{ten}}$ Ordnung*.

9) Eine Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung hat mit einer Linie von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung, die nicht ganz in ihr liegt, $mn$ *Punkte gemein*. Hat eine Linie von der $m^{\text{ten}}$ mit einer Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung mehr als $mn$ Punkte gemein, so liegt sie ganz in derselben.

10) Drei Flächen bezw. von der $l^{\text{ten}}$, $m^{\text{ten}}$, $n^{\text{ten}}$ Ordnung haben $lmn$ *Punkte gemein*.

11) *Zerfällt* eine Linie oder eine Fläche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung bezw. in Linien oder Flächen von der Ordnung $i, k, l \ldots$, so ist $i+k+l\cdots=n$.

**388.** *Satz. Sind die drei Leitlinien $l_1$, $l_2$, $l_3$ einer Regelfläche* F *bezw. von der Ordnung $m_1$, $m_2$, $m_3$, und schneidet keine derselben eine der anderen, so ist der Grad der Regelfläche $n=2m_1m_2m_3$.* Eine beliebige Gerade $g$ schneidet die Fläche in $n$ Punkten, und die durch die Schnittpunkte gehenden Erzeugenden der F sind die Gesamtheit der Geraden, welche die vier Linien $g$, $l_1$, $l_2$, $l_3$ treffen. Legt man nun durch $g$, $l_2$, $l_3$ als Leitlinien eine Regelfläche, welche vom $n_1^{\text{ten}}$ Grade sei, so wird dieselbe von $l_1$ in $m_1 n_1$ Punkten geschnitten, und die durch die Schnittpunkte gehenden Erzeugenden dieser Fläche

sind ebenfalls die Gesamtheit der Geraden, welche die vier Linien $l_1, g, l_2, l_3$ treffen. Daher ist $n = m_1 n_1$. Hieraus folgt auch, daß der Grad der Regelfläche $(g, l_2, l_3) = n_1 = m_2 n_2$ ist, wenn $n_2$ der Grad einer Regelfläche, welche zwei Gerade $g, h$ und die $l_3$ zu Leitlinien hat; und endlich, daß $n_2 = m_3 . 2$ ist, weil 2 der Grad einer Regelfläche, welche drei Gerade $g, h, i$ zu Leitlinien hat. Daraus ergibt sich durch aufeinanderfolgende Einführung $n = 2\, m_1 m_2 m_3$.

*Haben zwei Leitlinien* $l_2, l_3$ *einen Punkt gemein*, so zerfällt die Regelfläche in zwei Bestandteile, von denen der eine derjenige Kegel ist, welcher jenen gemeinsamen Punkt zur Spitze und $l_1$ zur Leitlinie hat; und da dieser Kegel von der $m_1^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist die Ordnung oder der Grad der (windschiefen) Regelfläche $= 2\, m_1 m_2 m_3 - m_1$.

*Haben* $l_2, l_3$; $l_3, l_1$; $l_1, l_2$ *bezw.* $s_1, s_2, s_3$ *Punkte gemein*, so ist hiernach die Regelfläche, mit Ausschluß jener Kegelflächen, vom Grade

$$n = 2\, m_1 m_2 m_3 - s_1 m_1 - s_2 m_2 - s_3 m_3.$$

Dabei werden die Zahlen, welche die *Vielfachheit der Leitkurven* ausdrücken, erniedrigt auf

$$m_2 m_3 - s_1, \quad m_3 m_1 - s_2, \quad m_1 m_2 - s_3.$$

Hierbei ist der *Fall des scheinbaren Widerspruchs* zu erörtern, welcher eintritt, wenn die drei Leitlinien Kegelschnitte sind, die sich zu zwei in zwei Punkten schneiden, und wobei die Regelfläche zweiten Grades entsteht (142, 3)). Es ist dann $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, $s_1 = s_2 = s_3 = 2$, woraus $n = 16 - 3 . 4 = 4$ folgt, und die Vielfachheit jedes Kegelschnittes $= 4 - 2 = 2$. Beides scheint einen Widerspruch zu enthalten, der sich aber dadurch löst, daß wirklich durch jeden Punkt jeder Leitlinie zwei Erzeugende gehen, und daß zwei Schaaren von Erzeugenden die Fläche doppelt bedecken. *Jede Fläche mit zwei Schaaren von geraden Erzeugenden muß aber eine Regelfläche zweiten Grades sein*, weil jede Schaar drei Gerade der anderen zu Leitlinien hat.

## II. Das Konoid, seine Schattengrenzen und Lichtgleichen.

**389.** Man kann die windschiefen Flächen in solche mit 3, 2, 1 oder keiner *Leitgeraden* teilen. Die ersteren sind die vom zweiten Grade, die zweiten die vom $2\,n^{\text{ten}}$ Grade, wenn die krumme Leitlinie von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist (388). Zu ihnen gehört das *Konoid*; bei demselben ist die eine gerade Leitlinie unendlich ferne, also durch eine Richtebene gegeben, so daß *das Konoid eine windschiefe Fläche mit einer Richtebene und einer geraden Leitlinie ist.* Die krumme Leitlinie kann auch durch eine *Leitfläche*, welche von den

Erzeugenden berührt wird, ersetzt sein. Steht die gerade Leitlinie senkrecht auf der Richtebene, so heißt das Konoid ein *gerades*, sonst ein *schiefes*. Für eine Erzeugende $e$ des Konoides erhält man ein *Berührungsparaboloid*, wenn man die krumme Leitlinie durch ihre Tangente in ihrem Schnittpunkte mit $e$ oder durch eine andere die Fläche in diesem Punkte berührende Gerade ersetzt, oder wenn man die Leitfläche durch eine Tangente derselben in ihrem Berührungspunkte mit $e$ ersetzt.

Da der Richtkegel zu einer Richtebene geworden ist, so sind die Berührungsebenen in allen unendlich fernen Punkten der Fläche mit der Richtebene parallel (383). Die Centralebenen der Erzeugenden (384) stehen daher auf der Richtebene senkrecht und ihre Berührungspunkte, die Centralpunkte der Erzeugenden und damit die *Striktionslinie* bilden den Umriß der Fläche bei ihrer senkrechten Projektion auf die Richtebene.

Die *gerade Leitlinie* und die *unendlich ferne Gerade* der Richtebene sind so *vielfache Linien* der Fläche, als die Ordnung der krummen Leitlinie angibt. Die *Kanten* erhält man durch die berührenden Ebenen, welche man durch die eine oder die andere dieser Leitgeraden an die krumme Leitlinie legt. Die Erzeugende durch jeden der Berührungspunkte ist eine *Kante*, und ihr Schnittpunkt mit der Leitgeraden, durch welche jene Berührungsebene nicht geht, ist ein *Kuspidalpunkt* (386). — Die krumme Leitlinie der Fläche ist stets eine einfache Linie derselben, so daß das Konoid außer seinen beiden geraden Leitlinien keine mehrfache Linie enthält.

**390.** *Aufg. Das gerade Kreiskonoid darzustellen und Berührungsebenen an dasselbe zu legen.*

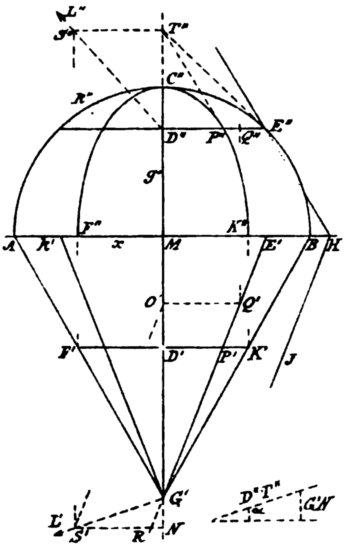
Das Kreiskonoid ist vom vierten Grade (vor. Nr.); bei dem geraden Kreiskonoide steht die gerade Leitlinie $g$ senkrecht auf der Leitebene; wir wollen auch die Ebene des Leitkreises $k$ senkrecht auf die Leitebene stellen; die senkrechte Projektion von $g$ auf die Kreisebene gehe durch den Mittelpunkt $M$ des $k$.

*Aufl.* Legen wir $P_2$ in die Ebene des $k$, nehmen $P_1$ als Leitebene und legen sie durch $M$, so geht auch $x$ durch $M$, und $g''$ steht $\perp x$ und geht durch $M$. Es ist nur die obere Hälfte der Fläche dargestellt und von dieser nur das von $k$ und $g$ begrenzte Stück. Eine Erzeugende ist die mit $P_1$ Parallele ($G'E'$, $D''E''$). Der erste Umriß der Fläche besteht aus den beiden Geraden $G'A$, $G'B$, der zweite scheinbare (nicht verzeichnete) aus den beiden zu $x$ parallelen Tangenten des $k''$. Die *Kanten* (mit ebenen Flächenelementen) gehen durch die Endpunkte des in $x$ und des $\perp x$ liegenden Durch- Fig. 169.

messers von $k$, drei derselben also durch $A$, $B$, $C$; die ***vier Kuspidalpunkte*** sind die unendlich fernen Punkte der durch $A$ und $B$ gehenden Erzeugenden, ferner $(G', C'')$ und der andere Grenzpunkt auf $g$.

Eine zur Ebene des $k$ parallele Ebene $F'K'$ schneidet die Fläche in einer ***Ellipse***, deren vier Scheitel in den vier Kanten liegen. Der Aufriß zeigt ihre wahre Gestalt; von dem Aufriß ist $M$ der Mittelpunkt, $2 \,.\, MC''$ in $g''$ die eine Axe, $F''K''$ die andere; die letztere kann jede Größe annehmen. Diese Kurve ist eine Ellipse, weil ihre zu $x$ parallelen Ordinaten zu denen des $k''$, welche in derselben Linie liegen, in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen, da (s. Fig.)

Fig. 169.




$$D''P'' : D''E'' = D'P' : ME'$$
$$= G'D' : G'M = \text{const.}$$

**391.** Die ***Berührungsebene*** in einem gegebenen Punkte $P$ der Fläche wollen wir mittelst eines entlang der Erzeugenden $PE$ sich anschließenden Paraboloides bestimmen, dessen Leitebene $\mathbf{P}_1$ und dessen Leitgeraden $g$ und die Tangente $(E'M,\ E''T'')$ des $k$ in $E$ sei. Schneidet $E''T''$ die $g''$ in $T''$, so ist die auf $\mathbf{P}_2$ senkrechte Gerade $(G'M,\ T'')$ eine weitere Erzeugende dieser Fläche. Für ihre zweite Schaar von Erzeugenden ist die zu $g$ und $E''T''$ parallele $\mathbf{P}_2$ die Leitebene; und schneidet die $\parallel \mathbf{P}_2$ durch $P$ gelegte Ebene $P'D'$ jene beiden Erzeugenden der ersten Schaar in $(D',\ T'')$ und $P$, so ist $(D'P',\ T''P'')$ die durch $P$ gehende Erzeugende der zweiten Schaar. Die Ebene beider durch $P$ gehenden Erzeugenden, welche $E''H\ (\parallel T''P'')$ zur zweiten, und $HJ\ (\parallel E'P')$ zur ersten Spur hat, ist dann die Berührungsebene des Hyperboloides und des Konoides in $P$. — In unserem besonderen Falle läßt sich auch $(P'D',\ P''T'')$ sogleich als Tangente der vorhin betrachteten Schnittellipse erkennen, welche mit $PE$ die Berührungsebene bestimmt.

Die ***umgekehrte Aufgabe***, den ***Berührungspunkt*** einer durch eine Erzeugende gehenden Ebene ***zu ermitteln***, wird durch dieselben Linien in umgekehrter Reihenfolge gelöst. Da sie sich aber bei der späteren Aufgabe der ***Umschreibung eines Kegels*** aus einem Punkte $L$ (***Licht*** oder ***Auge***) häufig wiederholt, so lohnt es sich, die Auflösung

zu vereinfachen. Man denke sich durch $L$ und durch irgend eine Erzeugende $(G'E', D''E'')$ eine Ebene gelegt, ziehe die in dieser Ebene befindliche Gerade $(L'G', L''D'')$, schneide sie mit der durch $T''$ $\parallel \mathrm{P}_1$ geführten Ebene in $S$, und ziehe $S'O' \parallel G'E'$, so trifft dieselbe die $G'M$ im Schnittpunkte $O'$ der Berührungsebene mit der $(G'M, T'')$, und $O'Q' \parallel x$ liefert auf $G'E'$ den gesuchten Berührungspunkt $Q'$. Schneidet man die zu $x$ Parallele $S'N$ mit $G'M$ in $N$ und mit $G'E'$ in $R$, so ist nach Sinn und Größe der Abstand des $Q'$ von $G'M$ oder $O'Q' = S'R$. Liegt $L$ unendlich fern, behalten also $L'G'$ und $L''D''$ ihre Richtungen bei, so ist offenbar für alle Lagen von $D''$ das Verhältnis $G'N : D''T'' = \operatorname{tg} NS'G' : \operatorname{tg} T''S''D'' = \text{const.}$, und man konstruirt vorteilhaft $G'N$ aus $D''T''$ durch einen festen Winkel $\alpha$, dessen sinus (oder cosecante) gleich jenem Verhältnisse ist. Der Sinn von $G'N$ stimmt aber mit dem von $D''T''$ darin überein, daß beide die Projektionen des Bewegungssinnes eines sich gegen $L$ bewegenden Punktes (von $G'$ gegen $L'$ und von $D''$ gegen $L''$) auf die $g''$ sind. Aus $N$ erhält man dann $S'R = O'Q'$. Sind die Winkel von $L'G'$ und $L''D''$ mit $x$ einander gleich, so ist jenes Verhältnis $= 1$, und $G'N = D''T''$.

**392.** *Die Lichtgleichen einer windschiefen Fläche.* Um auf einer beliebigen Erzeugenden $e$ einer windschiefen Fläche die Punkte der abgestuften Lichtgleichen zu erhalten, lege man senkrecht zu $e$ eine Ebene $\mathrm{E}$, welche die $e$ in $E$ schneide, konstruire in $\mathrm{E}$ aus dem Mittelpunkte $E$ das Tangentialbüschel, welches die Projektion des durch $E$ gelegten Lichtstrahles auf $\mathrm{E}$ zum Nullstrahle und den Winkel von $l$ gegen $\mathrm{E} = 90^0 - le$ zum Grundwinkel hat (196). Dann lege man durch die Strahlen dieses Tangentialbüschels und durch $e$ Ebenen, so sind dies die Ebenen von den in der Lichtabstufung enthaltenen Helligkeiten, und ihre auf $e$ liegenden Berührungspunkte mit der Fläche sind die Punkte der abgestuften Lichtgleichen.

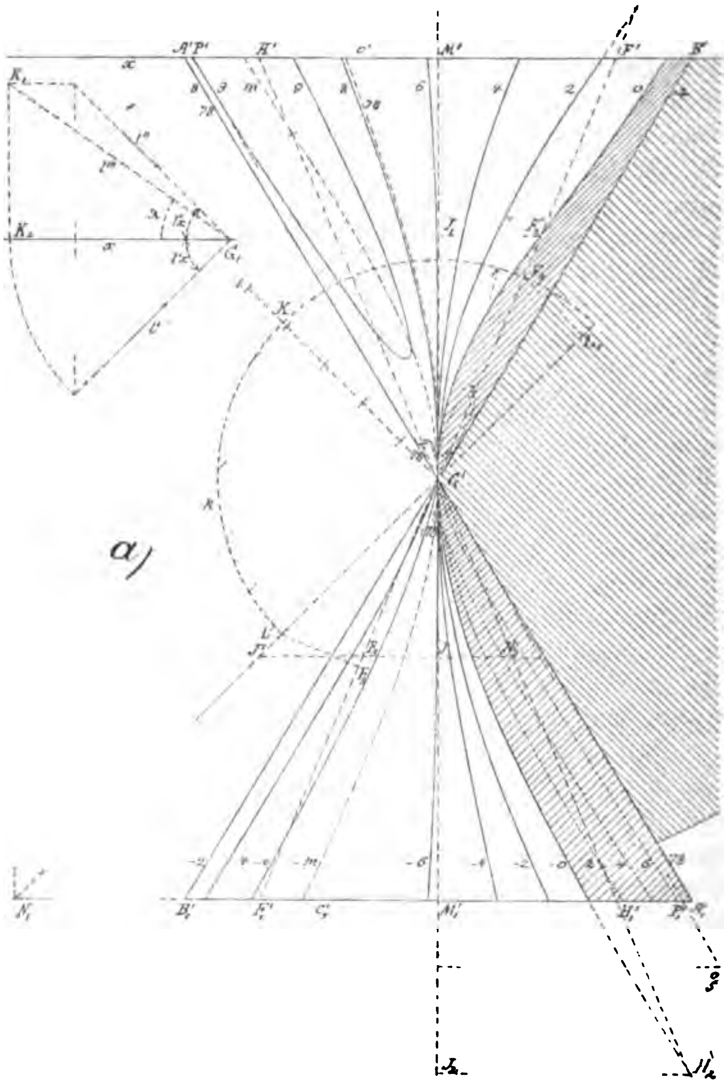
Dieses Verfahren wird für die Ausführung wesentlich durch die Bemerkung abgekürzt, daß die Reihe der Berührungspunkte mit dem Büschel der Berührungsebenen, also auch mit dem Tangentialbüschel projektiv, und daß diese Beziehung durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt ist, wobei man vorteilhaft den Punkt auf der Eigenschattengrenze (Helligkeit $= 0$), diejenigen auf den geraden Leitlinien und vielleicht den von der größten Helligkeit wählt.

**393.** *Aufg. Die Lichtgleichen des geraden Kreiskonoides zu bestimmen.*

*Aufl.* Sei wie in Nr. 390 $\mathrm{P}_1$ die Leitebene, $g \perp \mathrm{P}_1$ die Leitgerade, $c$ in $\mathrm{P}_2$ der Leitkreis, und gehe $g''$ durch den Mittelpunkt $M$ Fig. 170.

des *c*. Sei der hintere Flächenast durch *g* und *c*, der vordere durch *g* und einen zu *c* parallelen und gleichen Kreis $c_1$ begrenzt; der Grundriß ist in Fig. *a*), der Aufriß des vorderen Flächenastes in *b*), der des hinteren in *c*) dargestellt. *l* sei der Lichtstrahl. In den

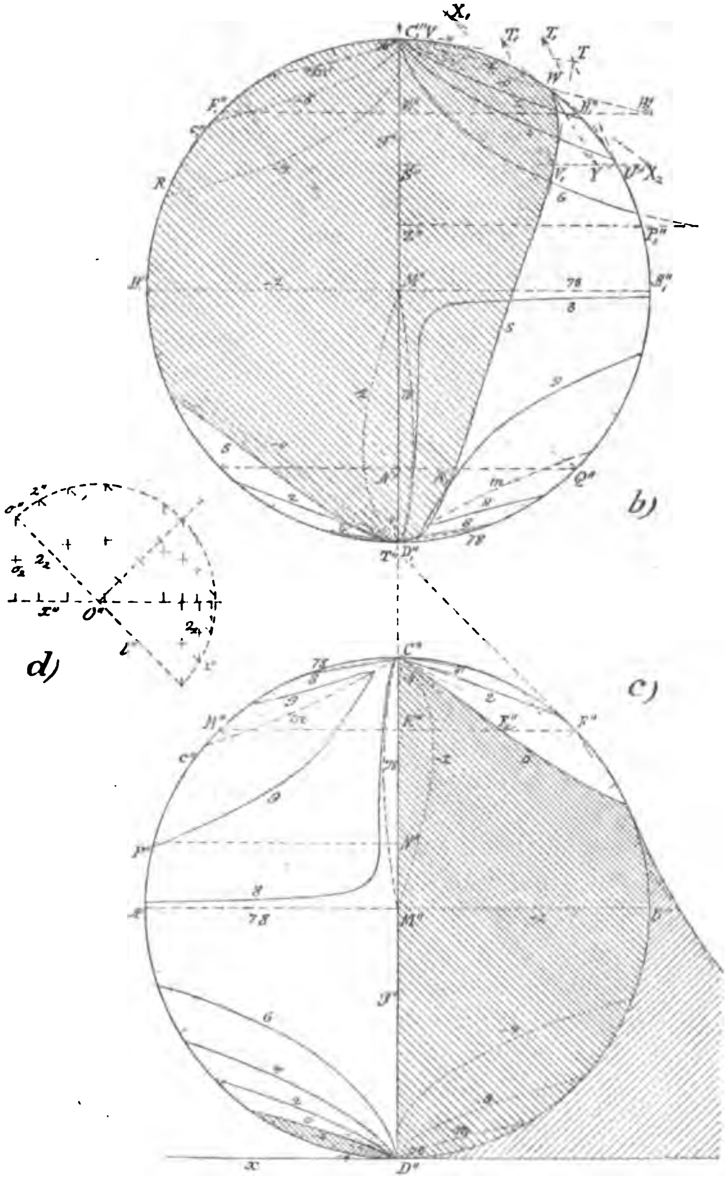
Fig. 170 a.



Kreisen seien die Endpunkte der zu $\mathrm{P}_1$ parallelen Durchmesser *A*, *B*, $A_1$, $B_1$, der zu $\mathrm{P}_1$ senkrechten *C*, *D*, $C_1$, $D_1$, so daß $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ die vier Kanten der Fläche bilden, und diese sind Lichtgleichen, weil die Fläche entlang einer jeden von derselben Ebene

berührt wird. Man teile von $A$ und $A_1$ aus jeden Kreis in eine durch vier teilbare Anzahl (24) gleicher Teile, lege durch die Teilungs-

Fig. 170 b, c, d.




punkte die Erzeugenden und ermittle für jede die Lichtgleichenpunkte, indem man zuerst für drei Punkte die Helligkeiten bestimmt, und zwar *a*) für den zu konstruirenden Punkt der Eigenschatten-

grenze (0), *b*) für den Punkt auf der unendlich fernen und *c*) für den Punkt auf der Leitgeraden $g$.

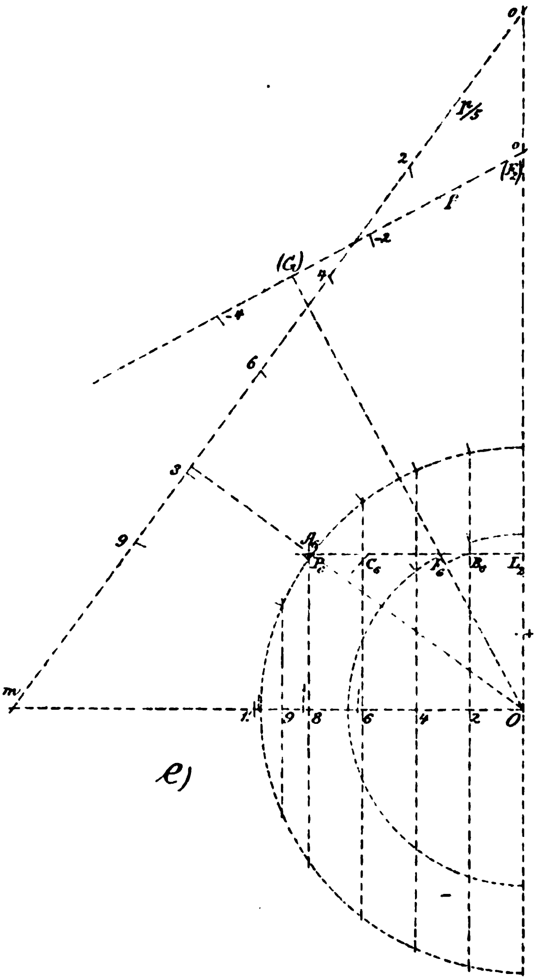
**394.** a) *Bestimmung der Eigenschattengrenze.* Eine mit $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene schneide die $g$ in $E$ $(G', E'')$, den $c$ in $F$ und $H$, den $c_1$ in $F_1$ und $H_1$, so sind $EFF_1$, $EHH_1$ zwei Erzeugende. Um auf denselben die Punkte der Eigenschattengrenze zu finden, ziehe man (391) in $F$ die Tangente an $c$; dieselbe trifft die $g''$ in $T''$, und durch diesen Punkt geht auch die Tangente an $c$ in $H$; sodann bestimme man auf $G'M'$ den Punkt $J$ so, daß $G'J : E''T'' = \operatorname{tg} l'x : \operatorname{tg} l''x$, in der Figur $= 1$, weil $l'x = l''x = 45^0$, wodurch $G'J = E''T''$ wird. Dabei muß man sich von $G'$ gegen $J$ der Lichtquelle nähern, wenn man sich ihr von $E''$ gegen $T''$ nähert, andernfalls sich von ihr entfernen (391). Sodann ziehe man durch $J$ eine Parallele zu $x$, schneide sie mit der $\parallel l'$ gezogenen $G'L'$ in $J'$, mit $G'F'$ in $F_3$, mit $G'H'$ in $H_3$, und bestimme dann die Schattengrenzpunkte $F_2'$ auf $G'F'$ und $H_2'$ auf $G'H'$ so, daß ihre Abstände von der Mittellinie $G'M'$ der Größe und dem Sinne nach bezw. $J_1F_2' = J'F_3$ und $J_2H_2' = J'H_3$ sind. — Bezeichnen wir die äußere Seite des hinteren Flächenastes mit $+$, so hat die äußere Seite des vorderen Flächenastes das Zeichen $-$, indem in jeder der Leitgeraden das Äußere und Innere wechselt. Wir bezeichnen auch die Grenzlichtgleiche 0 mit $+$ oder $-$, je nachdem der berührende Lichtstrahl auf der $+$ oder $-$ Seite der Fläche liegt.

**395.** b) Da der Richtkegel des Konoides die Ebene $\mathbf{P}_1$ ist, so ist jede unendlich ferne Berührungsebene desselben $\parallel \mathbf{P}_1$ und die *Helligkeit der Fläche in dem unendlich fernen Punkte jeder Erzeugenden* $= \sin \lambda$, wenn $\lambda = l'''x$ der Winkel von $l$ gegen $\mathbf{P}_1$ ist. Setzt man $G_1K_1 = 1$, so ist $K_1K_2 = \sin \lambda$, in der Figur $= 1 : \sqrt{3} = 0{,}577$.

c) Die *Helligkeit der Fläche in den Punkten der Leitgeraden $g$* erhält man durch ein Tangentialbüschel, das man in $\mathbf{P}_1$ aus $G'$ als Mittelpunkt mit $G'L' \parallel l'$ als Nullstrahl und $\lambda$ als Grundwinkel verzeichnet, so daß $\cos \lambda$ $(= \sqrt{2} : \sqrt{3} = 0{,}816)$ die größte auf $g$ mögliche Helligkeit ist. Macht man daher $G'1. \perp l'$, $G'1. = 1 = G_1K_1$, teilt diese Strecke in fünf gleiche Teile, zieht aus $G'$ als Mittelpunkt einen Kreis $k$ mit dem Halbmesser $G'K = G'1. \cos \lambda = G_1K_1 \cos \lambda = G_1K_2$, so sind dessen Schnittpunkte mit den $\perp G'1.$ durch deren Teilungspunkte gelegten Geraden die Strahlenpunkte des Tangentialbüschels. Die durch die so bestimmten Strahlen und durch $g$ gelegten Ebenen besitzen die zugehörigen Helligkeiten, und die Strahlen sind die Grundrisse der in den bezeichneten Ebenen liegenden Erzeugenden. Überträgt man deren Schnittpunkte mit $c$ in den Aufriß, und zieht hierdurch $\parallel x$ die Erzeugenden, so bestim-

men diese auf $g''$ die Punkte der Fläche von den bestimmten Helligkeiten. Im Grundriß ist aber jeder Strahl des Tangentialbüschels Tangente der fraglichen Lichtgleiche in $G'$. *Umgekehrt erhält man* die Helligkeit der Fläche in dem Schnittpunkte $(G', E'')$ einer beliebigen Erzeugenden $(G'F', E''F'')$ als den Abstand $L_1 F_4$ des Schnittpunktes $F_4$ der $G'F'$ mit dem Kreise $k$ von der Geraden $G'L'$ gemessen auf dem Stärkemaßstabe $(= L_1 F_4 : G'\,1.)$.

Fig. 170 c. Fig. 170 e.



**396.** Um nun auf jeder Erzeugenden aus den drei Punkten von bekannter Helligkeit die *Lichtgleichenpunkte* zu ermitteln, bilde man in einer zweiten Figur für alle durch je eine Erzeugende gehenden Ebenenbüschel die *Tangentialbüschel* aus demselben Mittelpunkte $O$ mit derselben Einheit des Stärkemaßstabes $= O\,1.' = G'1. = G_1 K_1$, und ziehe durch deren Teilungspunkte $O$, 2, 4 ... Senkrechte zu $O\,1.'$, so $OL_2$. Der Grundwinkel für irgend eine Erzeugende $f = (G'F', E''F'')$ ist aber(392) $= 90^0 - lf$, und der Halbmesser des Grundkreises daher $= O\,1.' \sin lf$. Da nun auf dem durch $(G', E'')$ gelegten Lichtstrahle die $GL = O1.' = G'1. = G_1 K_1$ aufgetragen ist, so ist $O\,1.' \sin le$ gleich der von $L$ auf $f$ $(G'F', E''F'')$ gefällten Senkrechten. Der Fußpunkt derselben ist aber auch der Fußpunkt $F_5$ der aus $L'$ auf $G'F'$ gefällten Senkrechten; daher ist die Länge der Senkrechten die Hypotenuse eines recht-

Fig. 170. winkligen Dreiecks, dessen eine Kathete für alle Erzeugenden $= LL' = K_1 K_2$, und dessen andere Kathete die von $L'$ auf $G'F'$ gefällte Senkrechte $L'F_5$ bildet.

Trägt man daher auf dem Nullstrahle die $OL_2 = K_1 K_2$ auf, macht $L_2 F_6 \perp OL_2$ und $= L'F_5$, zieht aus $O$ durch $F_6$ einen Kreis, so ist derselbe der Grundkreis für $f$ und wird von den senkrecht zu dem Stärkemaßstabe aus dessen Teilungspunkten gezogenen Geraden in den $+$ Strahlenpunkten geschnitten, welche das Tangentialbüschel bestimmen.

In diesem Büschel bezeichnet aber der Strahl $OF_6$ die Helligkeit in dem Schnittpunkte $(G', E'')$ der $f$ mit $g$; denn diese Helligkeit wurde vorhin $= L_1 F_4$ bestimmt, und es ist offenbar $L_1 F_4 = F_5 L' = L_2 F_6$. Der auf $OF_6$ senkrechte Strahl bezeichnet die Helligkeit im unendlich fernen Punkte der Erzeugenden, weil die Berührungsebenen der Fläche in diesem Punkte und in demjenigen $(G', E'')$ aufeinander senkrecht stehen. Und wirklich liefert dieser Strahl eine für alle Erzeugende unveränderliche Helligkeit $= OL_2 = K_1 K_2$ (s. vor. Nr.). Endlich bezeichnet der Strahl $OL_2$ die Helligkeit im Schattengrenzpunkte $F_2$ der $f$.

Man lege nun die Erzeugende $G'F'$ perspektiv in das Tangentialbüschel nach $f$, derart daß ihr unendlich ferner Punkt in den zu $OF_6$ senkrechten Strahl gelangt, $f$ also $\perp OF_6$ zu stehen kommt, und daß ferner $G'$ nach $(G)$ in $OF_6$ und $F_2$ nach $(F_2)$ in $OL_2$ gelangt; man erreicht dies dadurch, daß man, was zweckmäßig mit dem Zirkel allein geschieht, den Punkt $(F_2)$ auf $OL_2$ so bestimmt, daß sein senkrechter Abstand $(F_2 G)$ von $OF_6 = G'F_2'$ ist, und daß $(G)$ auf der — Seite von $O1.'$ liegt, weil $G'$ der — Lichtgleiche angehört; dann schneidet das Tangentialbüschel auf $f$ die auf $G'F'$ zu übertragenden $+$ Lichtgleichenpunkte ein. Der Strahl $O1.'$ gibt auf jeder Erzeugenden deren hellsten Punkt an, dessen Ort für alle Erzeugenden die *Maximalkurve* $(m)$ heißt. Jede Lichtgleiche wird in ihrem Schnittpunkte mit $m$ von einer Erzeugenden berührt, weil in diesem Punkte zwei Punkte der Lichtgleiche zusammenfallen. — Fallen die Punkte der Schattengrenze in der ersten, oder die übertragenen Erzeugenden in der zweiten Figur außerhalb der Grenzen der Zeichenfläche, so verkleinere man verhältnismäßig. So ist für die Erzeugende $p\,(G'P',\ Z''P_1'')$ die Verkleinerung auf $\frac{1}{5}$ in einer in der Figur ersichtlichen Weise durchgeführt. Dabei ist zur Raumersparnis $\frac{p}{5}$ auf dieselbe Seite von $O$ gesetzt, wie $f$, obgleich es auf der entgegengesetzten liegen sollte; daher sind auch $+$ und — vertauscht worden.

Die *Tangente einer Lichtgleiche im Aufriß* (Fig. *b*) und *c*)) *in den Kuspidalpunkten* $C''$, $D''$, $C_1''$, $D_1''$ bestimmt man, indem man beachtet, daß die trigonometrische Tangente ihres Neigungswinkels gegen die Projektionsaxe $x$ halb so groß ist, als diejenige des zu der gleichen Helligkeit gehörenden Strahles des Tangentialbüschels in der Aufrißebene $\mathbf{P}_2$. In Fig. *d* ist dieses Büschel gezeichnet (man hätte auch die Fig. *e* benutzen können); und wenn man für irgend welche Strahlen, z. B. für die beiden $O''2''$, die Ordinaten ($\perp x''$) halbirt, hier in $2_2$, so laufen die Tangenten der Lichtgleichen 2, — 2 in jenen Kuspidalpunkten bezw. parallel mit den beiderlei Linien $O''2_2$, ebenso an die Grenzlichtgleiche 0 parallel zu $O''0_2$. Es folgt dies daraus, daß für die unendlich nahen Punkte unserer Fläche $\mathbf{F}$ bei jedem jener Kuspidalpunkte, z. B. bei $C$, die Erzeugende mit der Senkrechten zu $\mathbf{P}_2$ einen unendlich kleinen Winkel bildet, daß also für diese Erzeugende das Tangentialbüschel der Fig. *d*) gilt, daß eine durch einen solchen unendlich nahen Punkt $\parallel \mathbf{P}_2$ gelegte Ebene die $\mathbf{F}$ in einer Kurve (Ellipse) schneidet, welche in $C$ einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser besitzt, daß die mit den Strahlen des Tangentialbüschels parallelen Tangenten dieser Kurve Punkte der Lichtgleichen sind, welche, außer für die zu $g''$ parallele Tangente, unendlich nahe bei $C$ liegen, daß deren Verbindungslinien mit $C$ Elemente der Lichtgleichen bilden, daß aber $C$ in der Mitte der Punkte liegt, welche auf $g''$ durch jenen berührenden Lichtstrahl und durch die von seinem Berührungspunkte auf $g''$ gefällte Senkrechte eingeschnitten werden (I, 236, Formel 7).

**397.** *Die Gestalten der Lichtgleichen.* Der Mittelpunkt ($G'$, $M''$) der Fläche ist auch der *Mittelpunkt der Lichtgleichen*, $G'$ ihrer Grund-, $M''$ ihrer Aufrisse. Vom Grundriß ist nur die obere Hälfte gezeichnet; die Aufrisse beider Flächenäste, aufeinander gelegt, lassen $M''$ als Mittelpunkt erkennen, und zeigen den Zusammenhang der Kurven.

Fassen wir zuerst die Typuslichtgleichen und das Verhalten der Kurven gegen die Kuspidalpunkte und die Leitgeraden ins Auge. Die *Typuslichtgleichen* (212) sind diejenigen Lichtgleichen, welche Linien mit ebenen Flächenelementen, also hier die Kanten, als Bestandteile enthalten. Die gleichförmige Helligkeit entlang der Kante $AA_1$ ist 0,78, die entlang $BB_1 = 0{,}2$, wie es der Tangentialbüschel in Fig. *a*) ablesen läßt, die Helligkeit entlang der Kanten $CC_1$ und $DD_1$ ist $= 0{,}58$, wie $x''$ auf dem Tangentialbüschel *d*) zeigt (Helligkeit von $\mathbf{P}_1$). Die Lichtgleichen 78 und 2 enthalten daher bezw. die Geraden $AA_1$, $BB_1$; die krummen Äste sind verzeichnet; derjenige der anderen Typuslichtgleiche 58 ist nicht ausgeführt.

Da jede durch eine *Kante* der Fläche gelegte Ebene dieselbe

Fig. 170. in dem *Kuspidalpunkte* dieser Kante berührt (386), so herrschen in dem (unendlich fernen) Kuspidalpunkte der Kante $AA_1$ alle Helligkeiten, welche die Ebenen des Büschels $AA_1$ besitzen. Man erhält dieselben, wenn man aus Fig. *a*) den Abst. $L'.A'A_1'$ in die Fig. *e*) auf $L_2F_6$ nach $L_2A_6$ trägt; der aus $O$ durch $A_6$ gezogene Kreis schneidet den Stärkemaßstab im Punkte 0,98. Also herrschen in jenem Kuspidalpunkte alle Helligkeiten von 0 bis 0,98, jede, außer 0 und 0,98, in zwei Ebenen oder alle Lichtgleichen von 0 bis 98 gehen nach diesem Punkte und haben $AA_1$ zur *Asymptote* (386); und zwar jede Kurve, außer 0 und 98, mit zwei Ästen, und jeder Ast, wie immer bei stetigen Kurven, mit zwei Zugängen. Ebenso ergibt sich durch $L_2B_6$ = Abst. $L'.B'B_1'$, daß $BB_1$ Asymptote aller Lichtgleichen von 0 bis 62 ist. Daher haben diese Lichtgleichen sowohl $AA_1$, als $BB_1$ zu Asymptoten. — In jedem der Kuspidalpunkte der $g$, d. i. in deren Grenzpunkten ($G'$, $C''$) und ($G'$, $D''$), finden die Helligkeiten der Ebenen der Büschel $CC_1$, $DD_1$ statt, und diese gehen nach der Fig. *d*) oder nach Fig. *e* ($C_6$) von 0 bis 0,82. Daher gehen alle Lichtgleichen von 0 bis 82 durch diese beiden Punkte und berühren in ihnen bezw. die Kanten $CC_1$, $DD_1$. — Endlich finden in Punkten der *Leitgeraden* $g$ die Helligkeiten derjenigen Ebenen des Büschels $g$ statt, welche mit der Fläche (zwei oder eine) Erzeugende gemein haben, also von 0,2 bis 0,78. Daher schneiden die Lichtgleichen 2 bis 78 die $g$ außer in deren Grenzpunkten ($C''$, $D''$) noch in zwei oder einem ($M$ bei 2 und 78) zwischenliegenden Punkte.

*Die Lichtgleichen 1. bis 98 ausschließlich* treten in unserem Falle nicht auf; sie würden vorkommen, wenn eine Erzeugende $\perp l$ wäre; auf ihr würde der Punkt 1. liegen. Die Lichtgleichen 1. bis ausschließlich 98 wären dann endliche geschlossene Kurven. — Die *Lichtgleichen 98 bis 82 ausschließlich* erreichen die $g$ nicht, und haben $AA_1$ zu Asymptoten. — Die *Lichtgleichen 82 bis 78 ausschließlich* schneiden die $g$ nur in deren Grenzpunkten; sie kommen aus dem unendlich fernen Punkte von $AA_1$, schneiden die $g$ in einem Grenzpunkte, bilden eine (kleine) Schleife, gehen durch denselben Grenzpunkt zurück, jedesmal eine Kante berührend, und laufen gegen denselben unendlich fernen Punkt auf demselben Flächenaste, auf welchem sie von ihm kamen. — *Die Lichtgleichen 78 einschließlich bis 62 ausschließlich* kommen aus dem unendlich fernen Punkte von $AA_1$, schneiden die $g$ in einem Grenzpunkte, bilden eine (größere) Schleife, gehen durch denselben Grenzpunkt zurück, jedesmal eine Kante berührend, bilden einen Bogen, schneiden die $g$ noch in einem inneren Punkte, und gehen auf dem anderen Flächenaste nach dem-

selben unendlich fernen Punkte. Jener Bogen, der durch zwei verschiedene Punkte der $g$ begrenzt ist, erscheint im Grundriß als Schleife mit dem Doppelpunkte $G'$, und wird von $G'M'$ und einem davon verschiedenen Strahle berührt. — *Die Lichtgleichen 62 bis 2* bestehen aus zwei verschiedenartigen Ästen. Der eine kommt aus dem unendlich fernen Punkte der $AA_1$, schneidet die $g$ in einem Grenzpunkte unter Berührung einer Kante und geht dann auf dem anderen Flächenaste nach dem unendlich fernen Punkte der $BB_1$. Der andere Ast kommt aus dem unendlich fernen Punkte der $AA_1$, schneidet die $g$ in einem Grenzpunkte unter Berührung einer Kante, bildet einen Bogen, schneidet die $g$ in einem inneren Punkte, und geht auf dem ursprünglichen Flächenaste nach dem unendlich fernen Punkte der $BB_1$. Im Grundriß wird jener Bogen zu einer Schleife mit $G'M'$ und einer davon verschiedenen Tangente in $G'$. — *Die Lichtgleichen von 2 ausschließlich bis 0 ausschließlich* bestehen aus zweierlei Ästen. Die einen kommen, wie die ersten der vorhergehenden Art, aus dem unendlich fernen Punkte der $AA_1$ in gestrecktem Verlaufe, schneiden die $g$ in einem Grenzpunkte unter Berührung einer Kante, und gehen dann auf dem anderen Flächenaste in gestrecktem Verlaufe nach dem unendlich fernen Punkte der $BB_1$. Von den anderen gilt dasselbe, nur daß der eine der beiden Verlaufe bei den Kurven von größerer Helligkeit nicht gestreckt ist, sondern sich in die Ecke der 2 bei $M$ hereinschmiegt. Beiderlei Äste vereinigen sich dann in der *Lichtgleiche 0.*

**398.** Den *Schlagschatten* der Fläche auf $\mathrm{P}_1$ bestimmt man, indem man den Schlagschatten der $g$ und ihrer Schnittpunkte mit den angegebenen Erzeugenden ermittelt, und aus diesen Schlagschattenpunkten Parallele zu den Erzeugenden zieht; die Schlagschattengrenze der Fläche ist die Einhüllende dieser Geraden. In ähnlicher Weise bestimmt man den Schatten der Fläche auf $\mathrm{P}_2$ als Einhüllende der Schatten der Erzeugenden. — Die Schlagschatten der begrenzenden Kreise sind Ellipsen, welche aus zwei zu ermittelnden konjugirten Durchmessern (und etwa den daraus hergeleiteten Axen) gezeichnet werden können.

Zur Bestimmung des *Schlagschattens s des Kreises $c_1$ in das Innere des vorderen Flächenastes* suche man rückwärts den (geometrischen) Schatten $g_2 = N_1 N_2$ ($N_1$ in Fig. *a*)) auf die Ebene von $c_1$. Trifft nun irgend eine Erzeugende die $g$ in $N$, den Kreis $c_1$ in $Q$, so suche man den Schatten $N_2$ (auf $g_2$) von $N$; hierdurch ist der Schatten $N_2 Q''$ von $NQ$ bestimmt. Trifft die $N_2 Q''$ den $c_1''$ in $R$, und schneidet der Lichtstrahl aus $R$ die $N''Q''$ in $R_1$, so ist $R_1$ der Schatten von $R$ ins Innere der Fläche. Ebenso ist auf der Erzeu-

genden $SU$ der Punkt $V_1$ der Schatten des Punktes $V$ des $c_1$. — Der Schlagschatten $s$ im Aufriß berührt den Kreis $c_1''$ in $D_1''$, und schneidet ihn in seinen Schnittpunkten mit der Eigenschattengrenze, so in $W$. — Die *Tangente der Kurve* $s$ in $V_1$ ist der Schatten der Tangente $VT$ des Kreises $c_1$ auf die Berührungsebene der Fläche in $V_1$. Schneidet die Tangente des $c_1$ in $U''$ die $g''$ in $T_1$, so ist $V_1 T_1$ eine mit $\mathbf{P}_2$ parallele Tangente der Fläche in $V_1$; daher ist $U''T \parallel V_1 T_1$ die Spur jener Berührungsebene in der Ebene des $c_1$. Treffen sich $VT$ und $U''T$ in $T$, so ist $V_1 T$ die gesuchte Tangente der $s$. — Die *Tangente der s im Grenzpunkte* $W$ ist auf diese Weise nicht zu bestimmen; man ermittelt sie nach dem allgemeineren Verfahren (I, 204), indem man die unendlich kleine Figur, welche den dem $W$ unendlich nahen Punkt der $s$ bestimmt, aus $W$ als Ähnlichkeitspunkt zu einer endlichen Figur vergrößert. Zu dem Ende trägt man auf der Tangente des $c_1$ in $W$ die Strecken $WX_1 = WX_2$ von passender Länge auf, zieht durch den einen der Endpunkte, etwa durch $X_2$ die Entsprechende einer Erzeugenden $X_2 Y$ ($\parallel x$), führt den Lichtstrahl $X_1 Y$ ($\parallel l''$), so gibt dessen Schnittpunkt $Y$ mit $X_2 Y$ einen Punkt der Tangente $WY$ der $s$.

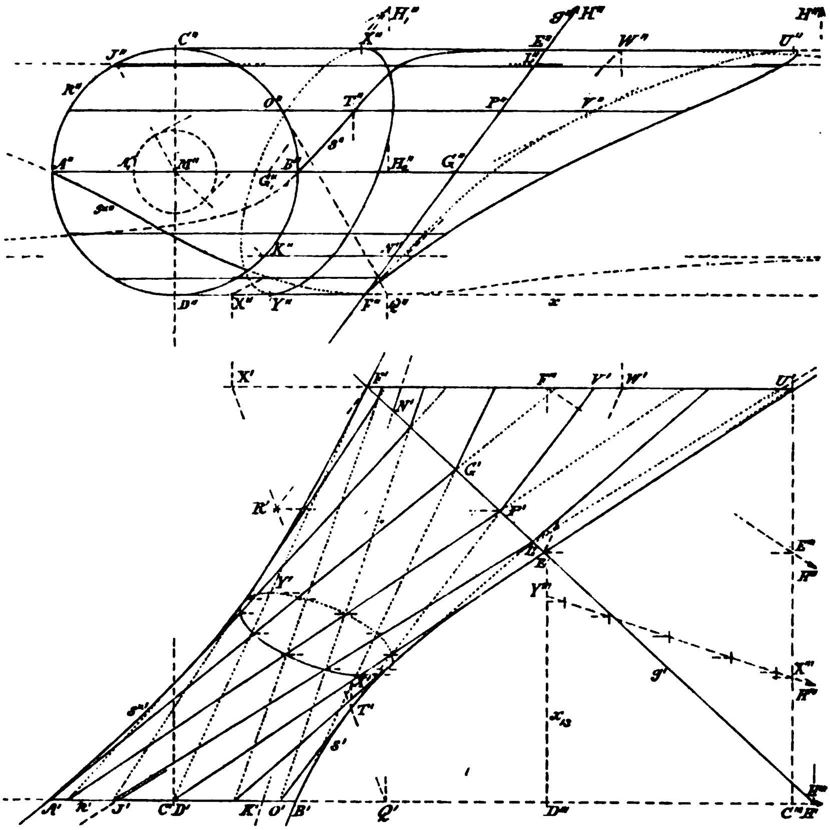
**399.** *Aufg. Das schiefe Kreiskonoid darzustellen, und seine Striktionslinie und bemerkenswerthen Schnitte zu verzeichnen.*

Fig. 171. *Aufl.* Die Ebene des Leitkreises $k$ stehe senkrecht auf der Richtebene, die Leitgerade $g$ schief gegen beide Ebenen. Wir legen $\mathbf{P}_1$ parallel zur Richtebene, $\mathbf{P}_2$ parallel zur Ebene des $k$. $AB$ und $CD$ seien der zu $\mathbf{P}_1$ parallele und der dazu senkrechte Durchmesser des $k$. Von ihren vier Endpunkten aus teile man $k$ in etwa zwölf gleiche Teile, lege durch je zwei Teilungspunkte, z. B. durch $A$ und $B$, eine zu $\mathbf{P}_1$ parallele Ebene, schneide sie mit $g$ in $G$, so erhält man zwei Erzeugende $GA$, $GB$ der Fläche.

Um die *Kanten* der Fläche zu bestimmen, schneidet man jede der beiden Leitgeraden mit der Ebene des $k$, zieht aus den Schnittpunkten Tangenten an $k$, so sind die Erzeugenden der Berührungspunkte die vier Kanten. Für die unendlich ferne Leitgerade (in $\mathbf{P}_1$) sind $C$ und $D$ die Berührungspunkte, und $CE$ und $DF$ die Kanten. Die $g$ schneide die Ebene des $k$ in $H$; die Tangenten aus $H$ berühren den $k$ in $J$ und $K$. Da aber im Aufriß $H''$ nicht zugänglich ist, so sind darin die Berührungspunkte durch eine ähnliche Figur mit dem Mittelpunkte $M''$ des $k''$ als Ähnlichkeitspunkt und mit einer Verkleinerung auf $\frac{1}{3}$ bestimmt. Dabei ist gemacht $M''A_1'' = \frac{1}{3} M''A''$, $M''G_1'' = \frac{1}{3} M''G''$, $M''H_2'' = \frac{1}{3} C'H'$; dann ist $H_1''$ bestimmt durch $G_1''H_1'' \parallel g''$, $H_2''H_1'' \perp M''G''$. Aus $H_1''$ sind die beiden Tangenten an den aus $M''$ durch $A_1''$

gezogenen Kreis gelegt; es schneiden dann die Radien der Berührungspunkte auf $k''$ die gesuchten Punkte $J''$ und $K''$ ein. $JL$ und $KN$ ($L$ und $N$ auf $g$) sind dann die Kanten. — Die unendlich fernen Punkte dieser Erzeugenden und die Punkte $E$ und $F$ der $g$ sind die vier *Kuspidalpunkte*; durch sie gehen alle Umrißlinien und Eigenschattengrenzen der Fläche und werden in denselben von den Kanten berührt.

Fig. 171.



**400.** Die *Striktionslinie* $s$, $s^*$ ist der zur ersten Projektion gehörige Umriß (389). Sie geht durch die Punkte $A$ und $B$ des Leitkreises, in welchen die Kreistangenten $\perp P_1$ stehen, durch die Kuspidalpunkte $E$ und $F$, in denen sie von den Kanten $EC$ und $FD$ berührt wird, und hat $JL$ und $KN$ zu Asymptoten. Ein Punkt derselben auf der beliebigen Erzeugenden $OP$ ist der Berührungspunkt $T$ der ersten projicirenden Ebene der $OP$ mit der Fläche. Um $T$ zu bestimmen, lege man entlang der $OP$ ein Berührungsparaboloid; dabei wollen wir den Kreis als Leitlinie durch seine

Tangente $OQ$ ersetzen, deren erste Spur $Q$ ist, die Gerade $g$ durch die mit $P_2$ parallele Tangente $PR$ der Fläche in $P$. Die Berührungsebene der Fläche in $P$ hat aber zur ersten Spur die mit $O'P'$ parallele $F'R'$, und diese bestimmt auf $P'R'$ ($\parallel x$) deren erste Spur $R$. Eine zugehörige Leitebene muß $P_1$ bleiben, während die andere mit $OQ$ und $PR$ parallele Leitebene die $P_2$ ist. Dann ist die Verbindungslinie $QR$ jener beiden ersten Spuren eine Erzeugende von derselben Schaar wie $OP$. Schneiden sich $O'P'$ und $Q'R'$ in $T'$, so ist $T'$ die erste Projektion einer auf $P_1$ senkrechten Erzeugenden der anderen Schaar des Paraboloides, weil sie die $OP$ und $QR$ trifft und $\parallel P_2$ läuft. Daher ist $T$ auf $OP$ der gesuchte Berührungspunkt der ersten projicirenden Ebene von $OP$ mit der Fläche; aus $T'$ ergibt sich $T''$ auf $O''P''$. — Liegt $P_1$ nahe bei der Erzeugenden $(OP)$, so sucht man die Spuren in einer entfernteren mit $P_1$ parallelen Ebene.

**401.** *Ebene Schnitte* sind leicht durch die Schnittpunkte mit den geraden Erzeugenden zu erhalten. Die Schnittkurve besitzt auf der endlich und der unendlich entfernten Leitgeraden je einen Doppelpunkt, oder eine Spitze, oder einen isolirten Punkt.

In der Figur wurde eine Schnittebene parallel zu $P_2$ durch den Kuspidalpunkt $F$ der $g$ gelegt; die Schnittkurve ist $F''U''V''$ mit einer Spitze in $F''$. Ihre *Tangente* in dem Punkte $V''$ der Erzeugenden $OP$ ist $V''X''$, wenn $X$ den Schnittpunkt der $QR$ mit der Schnittebene bezeichnet. Denn jenes nach $OPV$ berührende Paraboloid besitzt $QR$ als eine Erzeugende der einen und daher $VX$ als eine Erzeugende der anderen Schaar, weil die Schnittebene parallel zur Leitebene $P_2$ steht. — Die Tangente $F''W''$ in der Spitze $F''$ erhält man, wenn man $E'W' \parallel D'F'$ zieht und mit der Schnittebene in $W$ schneidet; denn $DFEW$ ist die Berührungsebene der Fläche in $W$, und $FW$ ihr Schnitt mit der Schnittebene.

Unter den ebenen Schnitten gibt es eine *Schaar Ellipsen. Ihre Ebenen bilden ein Büschel, dessen Axe die Verbindungslinie der Schnittpunkte beider geraden Leitlinien mit der Ebene des Leitkreises ist,* d. h. die durch $H$ parallel zur Projektionsaxe $x$ gelegte Gerade. Um zunächst einen solchen Schnitt zu konstruiren, nehme man eine dritte auf den beiden anderen senkrechte Projektionsebene $P_3$ an und lege sie um die Axe $x_{13}$ in die $P_1$ um. Die dritte Projektion des Leitkreises ist die Gerade $C'''D'''$, die der Leitgeraden $g$ ist $E'''F'''$. Der Schnittpunkt beider, $H'''$, ist die dritte Projektion der Axe jenes Ebenenbüschels, und der Mittelpunkt des Strahlenbüschels, welcher die dritte Spur und Projektion jenes Ebenenbüschels bildet. Da nun $H'''$ unzugänglich, so erhält man eine Gerade $H'''X'''Y'''$,

wenn man die Strecken $C'''E'''$ und $D'''F'''$ durch die Punkte $X'''$ und $Y'''$ in demselben Verhältnisse teilt. Zeichnet man die dritte Projektion von einer Reihe von Erzeugenden, so erhält man aus diesen die gesuchten Schnittpunkte, wie $X$ und $Y$ auf $CE$ und $DF$.

Daß diese *Kurven vom zweiten Grade* sind, kann man daraus erkennen, daß die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der beiden Leitgeraden mit der Ebene von $k$, die $k$ in zwei reellen oder konjugirt imaginären Punkten schneidet, daß sie daher eine Doppelgerade der Fläche ist, entweder eine reelle doppelte Erzeugende der Fläche oder eine isolirte Doppelgerade, so daß jede durch sie gelegte Ebene die Fläche von der vierten Ordnung nur noch in einer Linie zweiter Ordnung schneiden kann. — Geometrisch läßt sich die Schnittkurve in folgender Weise als *Ellipse* erkennen. Von dem durch jene Gerade als Axe gelegten Ebenenbüschel geht eine Ebene durch $g$, eine durch $k$; und da noch die Axe des Büschels parallel mit der Richtebene, so teilt jede Ebene des Büschels die zwischen $g$ und $k$ liegenden Stücke der Erzeugenden in demselben Verhältnisse, so daß z. B. $EX : EC = FY : FD$. Da nun die zweiten Projektionen der Erzeugenden parallel sind, so ist die zweite Projektion der Schnittkurve eine affine Figur zum Kreise $k''$ mit $g''$ als Axe und $x$ als Richtung der Strahlen der Affinität, also eine Ellipse. Da ferner die Figur in einer Ebene liegt, so ist auch die wahre Gestalt eine Ellipse.

**402.** *Übungsaufgaben.*

1) Die Eigen- und Schlagschattengrenze des vorigen Konoides für Central- oder Parallelbeleuchtung zu bestimmen.

2) Das *gerade* oder das *schiefe Kugelkonoid* (mit einer Kugel als Leitfläche) zu konstruiren, insbesondere seine Berührungskurve mit der Kugel (bei dem geraden Konoide ist deren Projektion auf die Richtebene ein Kreis), seine Kanten und Kuspidalpunkte, seine Striktionslinie, einen ebenen Schnitt samt seinen Tangenten, die Schnittpunkte mit einer gegebenen Geraden und die Berührungspunkte der durch die Gerade gehenden Berührungsebenen, die Eigen- und Schlagschattengrenze für Central- oder Parallelbeleuchtung und die Lichtgleichen für Parallelbeleuchtung.

### III. Die Wölbfläche des Eingangs in einen runden Turm.

**403.** Die *Wölbfläche des Eingangs in einen runden Turm* ist das *gerade Konoid,* welches zur geraden Leitlinie die Axe $a$ eines Umdrehungscylinders hat, und zur krummen Leitlinie eine auf diesen Cylinder aufgewickelte Ellipse, deren eine Axe parallel zur geraden Leitlinie $a$, deren andere also parallel zu der auf $a$ senk-

rechten Richtebene läuft. Ist jener Cylinder die Außenfläche eines Turmes, so bildet unsere Fläche die Wölbfläche eines Eingangs von abnehmender Weite, aber von unveränderlicher Höhe. Dies Konoid kann auch mit einem Ringgewölbe von übereinstimmender Höhe ein Kreuzgewölbe bilden, und den dabei vorkommenden Schnitt der beiden Wölbflächen wollen wir konstruiren.

*Aufg. Den Durchschnitt der Wölbfläche des Eingangs in einen runden Turm mit einem Ringe zu konstruiren*, wenn beide Flächen dieselbe Axe $a$ besitzen, wenn der Meridian des Ringes eine Ellipse ist, deren eine Axe parallel der Axe $a$ der Fläche, und wenn beide Flächen zwischen denselben zur Richtebene parallelen Berührungsebenen eingeschlossen sind.

Fig. 172.

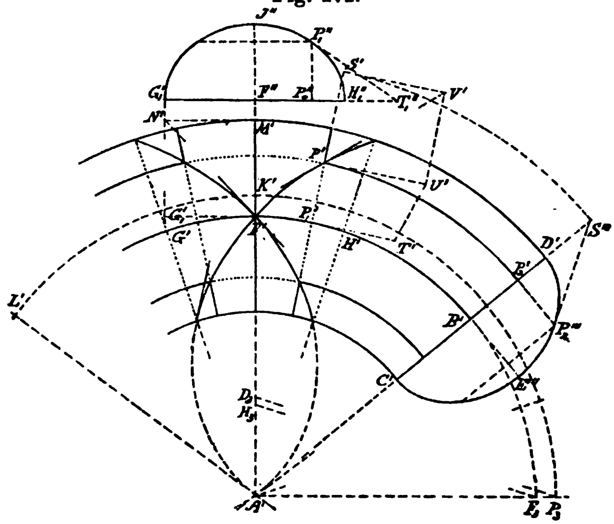


Fig. 172. Sei $\mathbf{P}_1$ die Richtebene, $A'$ die erste Projektion der Leitgeraden $a$, $A'B'$ ein Meridian des Ringes, die halbe Ellipse $C'B'D'E'''$ dessen Umlegung, seien $B'C'$ und $B'E'''$ deren Halbaxen, sei ferner $A'F'$ die horizontale Mittellinie der Wölbfläche, und schneide diese Linie den Parallelkreis des Mittelpunktes $B$ der Meridianellipse in $F$. Dieser Kreis sei die Horizontalspur des lotrechten Cylinders, auf welchem die Leitellipse der Wölbfläche aufgewickelt ist; $F$ sei der Mittelpunkt dieser Ellipse, der Bogen $FG$ die Aufwickelung der einen Halbaxe, deren wahre Länge auf der Tangente des Kreises $BF$ in $F$ als $FG_1 =$ Bog. $FG$ aufgetragen ist. Die Projektion der wahren Gestalt der abgewickelten Ellipse auf eine zur Mittellinie $AF$ senkrechte Ebene sei $G_1''J''H_1''$ mit dem Mittelpunkte $F''$, wobei die vertikalen Axen $F''J''$ und $B'E'''$ beider Ellipsen gleich sind.

Die $\mathrm{P}_1$ enthält von dem Ringe die beiden durch $C'$ und $D'$ gehenden Parallelkreise und von der Wölbfläche die beiden Geraden $AG$, $AH$, und beide liefern $2 \cdot 4$ Schnittpunkte, von denen nur die zum Eingange gehörige Hälfte verzeichnet ist. Der Scheitelkreis und die Scheitelerzeugende treffen sich im Grundriß in $F'$. Um allgemeine Punkte zu finden, lege man horizontale Hilfsebenen; jede solche trifft den Ring in zwei Kreisen, die Wölbfläche in zwei Geraden, von deren Schnittpunkten vier verzeichnet sind, darunter $P$; dabei gilt $P_2' P_2''' = P_0'' P_1''$, Bog. $F' P_1' = F'' P_0''$. Die Schnittkurve hat in $F$ einen Doppelpunkt.

**404.** Um die *Tangente an die Schnittlinie* in einem Punkte $P$ zu bestimmen, lege man in $P$ die Berührungsebene an jede der beiden Flächen. Die des Ringes hat $S'V'$ zur ersten Spur ($P_2'''S'''$ Tangente an die Ellipse, $P'S' = P_2'S'''$, $P'S'V' = 90^0$); die der Wölbfläche erhält man mittelst des nach der Erzeugenden von $P$ berührenden Paraboloides, welches $\mathrm{P}_1$, die Cylinderaxe und die Tangente $P_1 T$ in $P_1$ an die aufgewickelte Leitellipse des Konoides zu Leitgebilden hat. Die erste Spur der Tangente $P_1 T$ ist $T'$ ($P_1'' T_1''$ Tangente an die Ellipse, $A'P_1'T' = 90^0$, $P_1'T' = P_0''T_1''$); daher ist die in $\mathrm{P}_1$ liegende $A'T'$ eine Erzeugende des Paraboloides. Die Leitlinien für die zweite Schaar sind dann $AP$, $A'T'$, und die Leitebene ist die erste projicirende Ebene $P_1'T'$, weil diese mit den zwei Erzeugenden der ersten Schaar ($P_1 T$ und Axe $a$) parallel läuft. Eine Erzeugende der zweiten Schaar ist daher $PU$ ($P'U' \parallel P_1'T'$, $U'$ auf $A'T'$), $U'$ deren erste Spur, und $U'V' \parallel A'P'$ die erste Spur der Berührungsebene $P_1 PU$ des Paraboloides und der Wölbfläche in $P$. Die ersten Spuren beider Berührungsebenen treffen sich in $V'$, daher ist $P'V'$ die erste Projektion der gesuchten Tangente. — Diese Konstruktion der Tangente versagt im Scheitel $F'$, weil hier beide Berührungsebenen in einander fallen, und in den vier Endpunkten der ersten Projektion der Schnittlinie, weil sich hier deren Tangenten als Punkte projiciren. Wir werden aber auch diese Tangenten leicht ziehen lernen.

**405.** Die erste Projektion der Schnittkurve ist eine *Archimedische Spirale* mit $A'$ als Pol (331). Denn die Zunahme $\varDelta u$ des Leitstrahles $u$ von $F$ bis $P$, oder $P_1'P'$, steht mit der Zunahme $\varDelta \varphi$ des Polarwinkels $\varphi$, und mit dem Bogen $F'P_1'$ in unveränderlichem Verhältnisse, oder es ist $P_1'P' : F'P_1' = B'P_2' : F''P_0'' = B'D' : F''H_1''$, letzteres, weil $P_2'P_2''' = P_0''P''$. Der Parameter

$$p = u : \varphi = \varDelta u : \varDelta \varphi = P_1'P' : \frac{F'P_1'}{A'F'} = B'D' : \frac{F''H_1''}{A'F'}$$

wird durch ähnliche Dreiecke konstruirt, wenn man $A'H_3 = F''H_1''$,

$A'D_3 = B'D'$, $A'F_3 = A'F'$, $D_3P_3 \parallel H_3F_3$ macht; dann wird $p = A'P_3$ und $P_3K'L'$ ist der *Parameterkreis*. Die *Polaraxe* $A'L'$ erhält man, wenn man auf dem Parameterkreise von $A'F'$ aus, im Sinne der Abnahme von $\varphi$, Bog. $K'L' = F'A'$ aufträgt. Macht man $\sphericalangle F'A'P_3 = 90^0$, so ist die Tangente der Spirale in $F'$ durch ihre Normale $F'P_3$ bestimmt, und entsprechend die in anderen Punkten.

## IV. Die gerade Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades.

**406.** Die *Normalenfläche* **F** einer gegebenen Fläche **K** entlang einer auf ihr liegenden Kurve $k$ hat zu Erzeugenden die Normalen der Fläche **K** in den Punkten der $k$. **K** heißt die *Leitfläche*, $k$ die *Leitlinie* der Normalenfläche. Die Fläche ist im allgemeinen *windschief* und, wie wir später finden werden, nur dann abwickelbar, wenn $k$ eine Krümmungslinie der **K** ist (wie ein Parallelkreis oder ein Meridian einer Umdrehungsfläche).

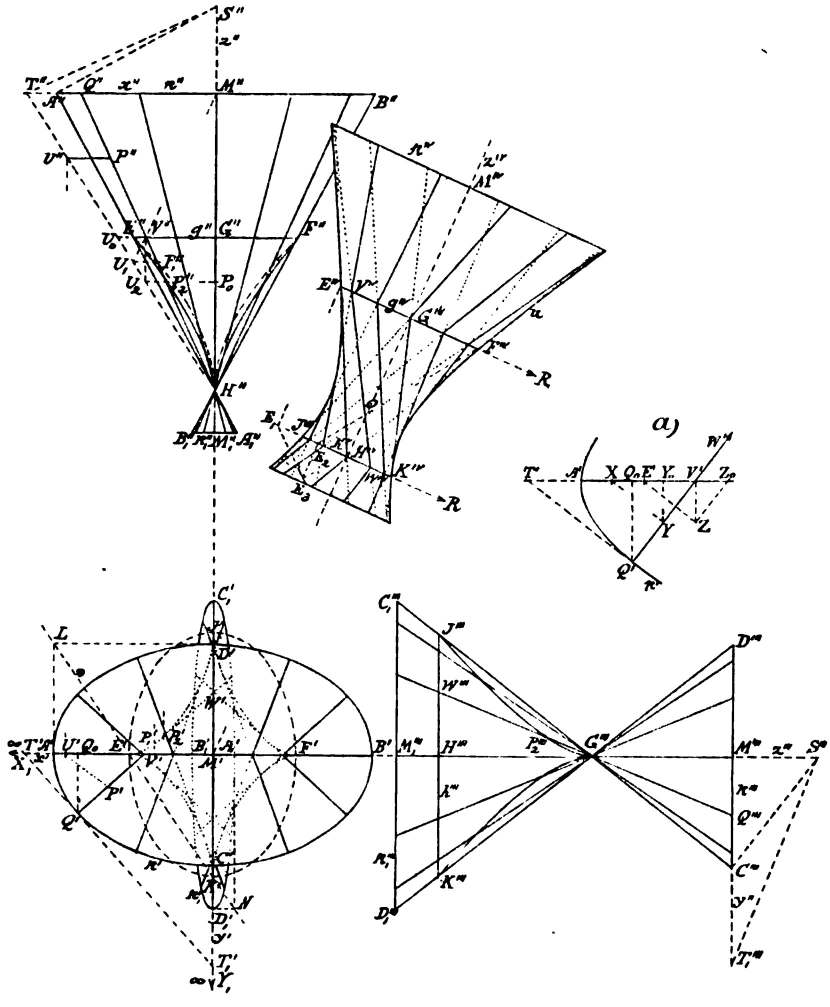
Ist **K** eine Fläche zweiten Grades und $k$ eine ebene Kurve derselben, also ein Kegelschnitt, so stehen die Flächennormalen auch senkrecht auf dem Kegel, welcher der **K**, entlang $k$, umschrieben ist, so daß man **K** durch den Kegel ersetzen kann. Wir betrachten den Fall, in welchem die Ebene von $k$ parallel mit einer Hauptebene der **K** und daher auch des Kegels steht, und nennen die dann entstehende Normalenfläche die *gerade Normalenfläche* einer Fläche zweiten Grades. Die Leitlinie ist dabei eine Ellipse oder eine Hyperbel oder eine Parabel, ihr Mittelpunkt sei $M$, die Leitfläche ist ein gerader Kegel **K** über $k$; derselbe wird zu einem schiefen Cylinder, wenn $k$ eine Parabel wird. Die Axe des Kegels, welche senkrecht auf der Ebene von $k$ steht, bildet auch die *Axe der Normalenfläche* *).

*) Diese Fläche in dem besonderen Falle als „Normalenfläche zum dreiaxigen Ellipsoide" wurde von Herrn *Šolin* in eingehender, vorwiegend analytischer Weise untersucht (Abh. d. Ges. der Wiss. in Prag, Ser. 6, B. 2, 1868). Untersuchungen über die allgemeine Normalenfläche (normalie) lieferte Herr *Mannheim* in seiner Abhandlung: Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces (Journ. de mathém. p. Liouville, B. 17, 1872, S. 109—166). Auch behandelte er sie in seinem Cours de géom. descr., 1880, S. 273 ff. Ferner wurden diese Flächen untersucht von *Koutny* in „die Normalenflächen der Flächen 2. Ordnung längs ebener Schnitte derselben" (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, B. 75, A. 2, 1877, S. 851), und von Herrn *Peschka* „Beitrag zur Theorie der Normalenflächen" (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, B. 81, A. 2, 1880, S. 1128) und „Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte" (ders. B., S. 1163). Die oben gegebene Untersuchung ist vorwiegend geometrisch geführt und liefert einige neue Sätze und Konstruktionen.

**407.** *Aufg. Die gerade Normalenfläche* $\mathbf{F}$ *einer Fläche zweiten Grades darzustellen.*

*Aufl.* Legen wir $\mathbf{P}_1$ in die Ebene von $k$, $\mathbf{P}_2$ durch die Haupt- Fig. 173.
axe $AB$, $\mathbf{P}_3$ durch die Nebenaxe $CD$, sei $M$ der Mittelpunkt des $k$, $S$ die Spitze des Leitkegels $\mathbf{K} = Sk$, so ist bei der geraden Nor-

Fig. 173.




malenfläche $MS$ senkrecht auf der Ebene des $k$. Die durch einen Punkt $Q$ des $k$ gehende Erzeugende der $\mathbf{F}$ steht senkrecht auf der Berührungsebene des $\mathbf{K}$ in $Q$, die erste, zweite, dritte Spur dieser Ebene sind bezw. $Q'T'T_1'$, $S''T''$, $S'''T_1'''$, wenn $Q'T'T_1'$ die Tangente des $k$ in $Q$ ist, und $T$ deren zweite, $T_1$ deren dritte Spur

Fig. 173. bildet. Die drei Projektionen der Erzeugenden sind daher $Q'V'W' \perp T'T_1'$, $Q''V''H'' \perp S''T''$, $Q'''G'''W''' \perp S'''T_1'''$. Die ersten Projektionen der Erzeugenden sind also die Normalen des Kegelschnittes $k$, der erste scheinbare Umriß daher die Evolute des $k$; die zweiten und dritten Projektionen der Erzeugenden gehen aber bezw. durch einen festen Punkt $H$ und $G$ der Axe $SM$ der Fläche, und es ist daher auch $\sphericalangle HAS = \sphericalangle GCS = 90^0$. Da nämlich $T'$ der Pol von $Q'Q''$ zu $k$, so bilden die Punkte $T'$ und die Punkte $Q_0$ oder die Geraden $Q'Q''$ projektive Punktreihen auf $A'B'$; und ebenso ist die Reihe der $T''$ projektiv mit derjenigen der $Q''$, daher auch das Büschel der Strahlen $H''Q''$ aus $H''$ projektiv mit dem Büschel der Strahlen $S''T''$ aus $S''$. Nun stehen aber drei Strahlen des einen Büschels senkrecht auf den entsprechenden des andern, nämlich $H''Q''$, sein symmetrischer in Bezug auf $S''M''$ und $H''M''$ sind bezw. senkr. auf $S''T''$, seinem symmetrischen in Bezug auf $S''M''$ und $S''T_\infty$ (wenn $T_\infty$ der unendlich ferne Punkt der $M''T''$); daher sind alle entsprechende Strahlen auf einander senkrecht, und die aus $H''$ nach den Punkten $Q''$ gezogenen Geraden die zweiten Projektionen der Erzeugenden. Ebenso bilden ihre dritten Projektionen das Strahlenbüschel $G'''$.

**408.** Daraus folgt, daß alle Schnittpunkte $V$ der Erzeugenden mit der Hauptebene $ABS = \mathbf{P}_2$ in einer zu $AB$ parallelen Geraden $g$ liegen, deren dritte Projektion der Punkt $G'''$ ist; und alle ihre Schnittpunkte mit der Hauptebene $CDS = \mathbf{P}_3$ in einer zu $CD$ parallelen Geraden $h$ mit der zweiten Projektion $H''$; daß ferner $g$ und $h$ Doppellinien der Fläche bilden, weil jede in einer Symmetrieebene liegt, und deswegen durch jeden Punkt der Linie außer der ersten noch eine zweite zu ihr symmetrische Erzeugende gehen muß. *Daher ist die gerade Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades auch eine windschiefe Fläche, deren Leitlinien ein Kegelschnitt $k$ und zwei Gerade $g$ und $h$ sind, welche parallel bezw. zu den Axen des $k$ laufen und die senkrecht zur Ebene des $k$ durch dessen Mittelpunkt $M$ gehende Axe der Fläche in zwei verschiedenen Punkten $G$ und $H$ treffen.* Sie ist also vom *vierten Grade*, wie das Kegelschnittskonoid, und unterscheidet sich von dem geraden Kreis-(oder Kegelschnitts-)konoide nur dadurch, daß bei letzterem eine der geraden Leitlinien im Unendlichen liegt.

Die *vier Kanten* der Fläche gehen von den Scheiteln des $k$ aus und bestimmen auf den Leitgeraden die *Kuspidalpunkte*, auf $g$ diejenigen $E$ und $F$, auf $h$ diejenigen $J$ und $K$. Ihre ersten Projektionen $E'$, $F'$, $J'$, $K'$ sind die *Krümmungsmittelpunkte* von $k'$ bezw. in den Scheiteln $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, weil sie die Schnittpunkte der Nor-

malen des $k$ in den zu den Scheiteln benachbarten Punkten mit einer Axe des $k'$ sind, und es liegen daher je zwei, wie $E'$, $K'$, auf einer Geraden $LN$, welche durch den Schnittpunkt $L$ der Tangenten der $k'$ in zwei benachbarten Scheiteln, hier $A'$ und $D'$, senkrecht zu $A'D'$ gelegt wird (I, 250). Setzt man daher $MA = a$, $MC = b$, $M'E' = GE = g$, $M'K' = HK = h$, so ist $g : h = b : a$.

Ist $k$ eine *Ellipse*, so liegen augenscheinlich $g$ und $h$ auf der entgegengesetzten Seite von $k$, wie die Kegelspitze $S$, alle vier Kanten und Kuspidalpunkte sind reell, und $g$ und $h$ sind bezw. in den endlichen Stücken $EF$, $JK$ Doppelgerade, in deren unendlichen Ergänzungen $F.E$, $K.J$ isolirte Gerade der Fläche. Geht $k$ in eine *Parabel*, etwa mit dem Scheitel $A$, über, so rückt $S$ in $\mathbf{P}_2$, etwa auf der Geraden $AS$, ins Unendliche, der Kegel $\mathbf{K}$ wird zu einem schiefen Cylinder, die zweiten Projektionen der Erzeugenden der Normalenfläche werden parallel, $h$ rückt ins Unendliche, eine Kante $AE$ mit ihrem Kuspidalpunkte $E$ bleibt im Endlichen, die drei übrigen rücken ins Unendliche; die Normalenfläche wird dann ein Konoid. Wird darauf $k$ zu einer *Hyperbel* mit $AB$ als Hauptaxe, so wechseln $S$ und $h$ die Seite von $k$, während $g$ seine Seite beibehält, so daß *$g$ und $h$ auf entgegengesetzte Seiten von $k$* zu liegen kommen; die beiden durch $A$ und $B$ gehenden Kanten mit den Kuspidalpunkten $E$ und $F$ sind dann reell, die beiden anderen imaginär, die $g$ ist in $EF$ eine isolirte Gerade, in $F.E$ eine Doppelgerade, ebenso die ganze $h$.

**409.** *Eine windschiefe Fläche, deren Leitlinien ein Kegelschnitt $k$ und zwei Gerade $g$ und $h$ sind, welche parallel bezw. zu den Axen des $k$ laufen und die senkrecht zur Ebene des $k$ durch dessen Mittelpunkt $M$ gehende Gerade in zwei verschiedenen Punkten treffen, wird von jeder mit der Ebene des $k$ parallelen Ebene in einem mit $k$ gleichartigen Kegelschnitte getroffen. Dies gilt daher auch von unserer Normalenfläche.* Dieser Satz ergibt sich, ganz entsprechend wie bei dem Kegelschnittskonoide, *analytisch* daraus, daß die unendlich ferne Gerade der Ebene des $k$ eine doppelte Erzeugende der Fläche ist, weil sie die Schnittpunkte der $g$ und $h$ mit der Ebene des $k$ unter einander verbindet; diese Gerade ist eine Doppelgerade, eine Rückkehrkante oder eine isolirte Gerade, je nachdem $k$ eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Jede durch sie gehende Ebene schneidet die Fläche nur noch in einem Kegelschnitte $k_1$, wie in $A_1B_1C_1D_1$, deren Mittelpunkt $M_1$ ist.

*Geometrisch* beweist man den Satz in folgender Weise: Nimmt man $MA$, $MC$, $MS$ bezw. als die $x$-, $y$-, $z$Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und nennt einen Punkt von $k$ und einen von der Schnittkurve $k_1$ entsprechend, wenn sie, wie $A$ und $A_1$, auf der-

Fig. 173. selben Erzeugenden liegen, so ergibt sich aus der zweiten und dritten Projektion, daß die $x$ Koordinaten zweier entsprechenden Punkte das unveränderliche Verhältnis $H''M'' : H''M_1''$, und die $y$ dasjenige $G'''M''' : G'''M_1'''$ besitzen, daß also die erste Projektion $A_1'C_1'B_1'D_1'$ der Schnittkurve aus $k'$ durch eine zweifache affine Veränderung entsteht, also ein Kegelschnitt von gleicher Art ist. Bei diesen Kegelschnitten liegen die Eckpunkte der parallel zu ihren Axen umschriebenen Rechtecke, wie $L$ und $N$, auf den vier Seiten des windschiefen gleichseitigen Vierecks $EKFJ$, dessen Eckpunkte die vier Kuspidalpunkte der Fläche sind; sie liegen nämlich in Schnittlinien der Berührungsebenen der Fläche nach ihren vier Kanten. Ist $k$ eine Hyperbel, und beschreibt man jene Recktecke über der reellen ($AB$) und der ideellen ($CD$) Axe, so enthält jenes windschiefe Viereck die zwei ideellen Kuspidalpunkte auf einer ($h$) der Leitgeraden.

Die Schnittkurve der Fläche mit der unendlich fernen Ebene gehört zu diesen Kegelschnitten; daher ist auch der *Richtkegel vom zweiten Grade*. Legt man seine Spitze auf die Axe $z$ in $G$ (oder $H$), so ist sein Schnitt mit der $\perp z$ durch $H$ (oder $G$) gelegten Ebene ein Kegelschnitt, dessen Axen, wie die zweite und dritte Projektion zeigen, $E''F'' = E'F' = 2g$ und $J'''K''' = J'K' = 2h$ sind, in dessen erster Projektion $E'J'F'K'$ daher die Scheitel in die Kuspidalpunkte fallen. Ist nun bei unserer *Normalenfläche* $k$ der auf dem Leitkegel K liegende Leitkegelschnitt, so soll derselbe der *Normalkegelschnitt* heißen. Mit ihm ist der Kegelschnitt $E'J'F'K'$ des Richtkegels ähnlich, jedoch verschränkt gelegen, weil (408) $g : h = b : a$.

**410.** Es gilt auch der umgekehrte Satz zu dem der Nr. 408, nämlich: *Jede windschiefe Fläche, deren Leitlinien ein Kegelschnitt $k_1$ und zwei Gerade $g$ und $h$ sind, welche parallel bezw. zu den Axen von $k_1$ laufen und eine senkrecht zur Ebene von $k_1$ durch dessen Mittelpunkt $M_1$ gelegte Gerade $z$ in verschiedenen Punkten treffen, ist die gerade Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades.*

Sind nämlich $E$, $F$, $J$, $K$ die bezw. auf $g$ und $h$ liegenden Kuspidalpunkte, so liegen von allen Kegelschnitten der Fläche (deren Ebenen mit der Ebene des $k_1$ parallel sind), die Eckpunkte der durch die Scheiteltangenten, unter denen auch ideelle sein können, gebildeten Rechtecke in den Seiten des windschiefen Vierecks $EJFK$ (409). Soll nun unter diesen Kegelschnitten ein Normalkegelschnitt $k$ sein, so müssen von seinem Grundrisse die Punkte $E'$, $F'$, $J'$, $K'$ die Scheitelkrümmungsmittelpunkte bilden. Man findet aber einen Eckpunkt $L$ des zu $k$ gehörigen Rechtecks auf $E'K'$ mittelst $M'L$

$\perp K'F'$ oder $\perp K'E'$, je nachdem $k_1$ eine *Ellipse* oder *Hyperbel* ist; es folgt dies daraus, daß das Dreieck $M'A'L$ bezw. mit dem Dreiecke $K'M'F'$ und $K'M'E'$ ähnlich ist und durch Drehung in seiner Ebene um $90^0$ mit ihm in parallele Lage gebracht werden kann. Aus $L$ ergeben sich die Scheitel $A$ und $D$ (letzterer möglicher Weise ideell), und man sieht, daß $A$ außerhalb oder innerhalb $M'E'$, und dann $M$ (und $k$) außerhalb oder innerhalb $HG$ liegt, je nachdem $k_1$ eine Ellipse oder Hyperbel ist, übereinstimmend mit dem Ergebnisse der Nr. 408. — Legt man nun durch $A$ eine Ebene $\perp HA$, schneidet sie mit $z$ in $S$, und konstruirt zu dem Kegel $Sk$ ($k = A'C'B'D'$) die Normalenfläche, so hat diese mit unserer Fläche gemein 1) den Kegelschnitt $k$, dessen vier Scheitelkrümmungsmittelpunkte in den Projektionen $E', F', J', K'$ der Kuspidalpunkte liegen; die Erzeugenden $AA_1$ und $BB_1$, die auf ihnen liegenden Punkte $E, F$, daher 2) $g$, sodann $H$ und 3) $h$, fällt also mit ihr zusammen.

Ist $k_1$ eine *Parabel* und daher $h$ im Unendlichen, so muß man außer der einzig erreichbaren Kante $A_1HE$ noch eine allgemeine Erzeugende benutzen, deren erste Projektion $V'W'$ sei. Die erste Projektion des Normalkegelschnittes ist dann diejenige Parabel $k'$, deren Axe in $V'E'$ ($a$) der Fig. 173) liegt, von welcher $E'$ der Krümmungsmittelpunkt im Scheitel und $V'W'$ die Linie einer Normale ist. Um aus diesen Angaben die Parabel zu bestimmen, insbesondere ihren Brennpunkt $X$ und ihren Scheitel $A'$ (auf $E'V'$), beachte man, daß der Brennpunkt $X$ in der Mitte zwischen den Schnittpunkten $V'$ und $T'$ einer Normale $Q'V'W'$ und der zugehörigen Tangente $Q'T'$ liegt (in I, 219 ist $TF = UP = FN$). Denkt man daher die Linie $XY \perp V'W'$ gefällt, so liegt der Fußpunkt $Y$ in der Mitte von $V'Q'$; und zieht man dann $YY_0 \perp V'E'$, so ist $V'Y_0 = \frac{1}{2}$ Subnormale $= \frac{1}{4}$ Parameter $= E'X = XA'$ (I, 219), also auch $V'X - V'Y_0 = V'X - E'X = Y_0X = V'E'$. Man erhält daher auch die $\frac{1}{2}$ Subn., wenn man $V'Z \perp V'E'$ und $E'Z \perp V'W'$ zieht, beide Linien in $Z$ schneidet, $ZZ_0 \parallel V'W'$ zeichnet und mit $V'E'$ in $Z_0$ schneidet; dann ist $Z_0V' = V'Y_0 = \frac{1}{2}$ Subn. $= E'X = XA'$, wodurch $X$ und $A'$ bestimmt sind. Fig. 173, a).

**411.** *Um in einem gegebenen Punkte $P$ der Fläche deren Berührungsebene zu legen,* bestimme man ein nach der Erzeugenden *$PQVW$ anschließendes Paraboloid.* Als Leitlinien desselben kann man nehmen $g$, $h$ und die Tangente $QT$ des $k$ in $Q$, und diese gehören wirklich einem Paraboloide an, weil sie mit ein und derselben Ebene $\mathrm{P}_1$ parallel sind. Schneidet $QT$ die Ebene $xz$ in $T$, so ist $HT$ eine weitere Erzeugende der ersten Schaar, weil sie auch die $g$ trifft; und schneidet die parallel zu $\mathrm{P}_1$ durch $P$ gelegte Ebene Fig. 173.

Fig. 178. die $HT$ in $U$, so ist $PU$ die Erzeugende der zweiten Schaar, und die Ebene $UPQ$ die gesuchte Berührungsebene des Paraboloides und unserer Fläche.

**412.** *Die Asymptotenebene* $\mathbf{A}$ *für die durch den Punkt* $Q$ *der Leitlinie* $k$ *gehende Erzeugende steht senkrecht auf der Erzeugenden* $SQ$ *des Leitkegels.* Denn ist $Q_1$ der dem $Q$ benachbarte Punkt des $k$, so ist $\mathbf{A}$ parallel mit den beiden bezw. durch $Q$ und $Q_1$ gehenden Erzeugenden der Normalenfläche, also senkrecht auf der Berührungsebene des Leitkegels bezw. nach $SQ$ und $SQ_1$, daher senkrecht auf der Schnittlinie beider, d. i. in der Grenze senkrecht auf $SQ$. Die erste Spur der $\mathbf{A}$ ist daher $\perp M'Q'$. *Die Centralebene für jede Erzeugende* $QV$ *unserer Normalenfläche geht daher durch die Spitze* $S$ *des Leitkegels*, da sie $\perp \mathbf{A}$ steht, also $SQ$ enthält. Die Berührungspunkte der Centralebenen bilden aber die Striktionslinie, so daß *die Striktionslinie unserer Normalenfläche die Berührungskurve des ihr aus der Spitze* $S$ *des Leitkegels umschriebenen Kegels ist.* Die Spur der Centralebene für $QV$ in der Ebene $xz$ ist die Gerade $S''V''$, sie schneidet die $H''T''$ in $U_1$, daher liefert die zu $x''$ Parallele $U_1P_1''$ auf $Q''V''$ den Punkt $P_1$ der Striktionslinie, in Umkehrung des Verfahrens zur Bestimmung der Berührungsebene. Die Striktionslinie hat Spitzen in den vier Kuspidalpunkten; ihre erste Projektion weicht in der Figur so wenig von der Evolute des $k$ ab, daß sie nicht besonders verzeichnet werden konnte.

**413.** *Der erste scheinbare Umriß unserer Normalenfläche ist die Evolute des Leitkegelschnittes* $k$. Um von der *zweiten Projektion des ersten Umrisses* den Punkt $P_2''$ auf einer Erzeugenden $QV$ zu erhalten, beachte man, daß die auf $\mathbf{P}_1$ senkrecht durch $PV$ gehende Berührungsebene zur zweiten Spur die $V'V''$ hat, daß diese die $H''T''$ in $U_2$ schneidet, und daß sich hieraus $P_2''$ durch $U_2P_2'' \parallel x''$, und hieraus $P_2'$ ergibt.

*Die zweite Projektion des ersten Umrisses ist eine Neilsche Parabel.* Denn sind $H''P_0 = z$, $P_0P_2'' = x$ die Koordinaten von $P_2''$, und setzt man $H''G'' = d$, $G''U_0 = u$, $G''V'' = P_0U_2 = v$, so folgt aus ähnlichen Dreiecken und weil $M''A''^2 = M''Q''\,.\,M''T''$,

$$\frac{P_0P_2''}{P_0U_2} = \frac{G''V''}{G''U_0}, \qquad \frac{H''P_0}{P_0U_2} = \frac{H''G''}{G''U_0}, \qquad G''E''^2 = G''V''.G''U_0,$$

oder
$$\frac{x}{v} = \frac{v}{u}, \qquad \frac{z}{v} = \frac{d}{u}, \qquad g^2 = vu.$$

Durch Multiplikation jeder der beiden ersten Gleichungen mit der dritten entsteht

$$xg^2 = v^3, \qquad zg^2 = dv^2,$$

woraus
$$v^6 = x^2g^4 = z^3\frac{g^6}{d^3},$$

oder
$$\frac{z^3}{d^3} = \frac{x^2}{g^2},$$
die Gleichung der Neilschen Parabel (vergl. I, 251).

**414.** Die Projektionen der Erzeugenden der Fläche auf eine beliebige Ebene erhält man, wenn man die Punktreihe der $V$ oder $EF = g$ auf $E^{IV}F^{IV} = g^{IV}$ und die der $W$ oder $JK = h$ auf $J^{IV}K^{IV} = h^{IV}$ projicirt, und die zusammengehörigen (auf derselben Erzeugenden liegenden) Punkte $V^{IV}$, $W^{IV}$ durch Gerade verbindet. Dabei gilt: *Der scheinbare Umriß $u$ der Parallelprojektion der geraden Normalenfläche der Fläche zweiten Grades auf eine beliebige Ebene ist ein Kegelschnitt, wenn die projicirenden Strahlen senkrecht auf der Flächenaxe $z$ stehen.* In der Figur ist zugleich die Projektionsebene senkrecht auf die Projicirenden, also auch $\parallel z$ gestellt. Es ergibt sich dies daraus, daß das Büschel der Erzeugenden $V^{IV}W^{IV}$ kollinear ist mit dem Büschel der Tangenten an $k'$, wie $Q'T'T_1'$, wobei eine Erzeugende $VW$ und eine Tangente $TT_1$ sich entsprechen, wenn der Fußpunkt der ersteren und der Berührungspunkt der letzteren (in $Q$) zusammenfallen; dann ist auch die Einhüllende jener Erzeugenden, d.i. der scheinbare Umriß $u$ mit $k'$ kollinear. Es berührt aber der Umriß $u$ in den Kuspidalpunkten $E^{IV}, F^{IV}, J^{IV}, K^{IV}$ die Kanten der Fläche, und diese schneiden sich paarweise in $H^{IV}$ und $G^{IV}$, den Mitten von $J^{IV}K^{IV}$ und $E^{IV}F^{IV}$. Die Kollineation von $k'$ und $u$ kann durch vier Paare entsprechender Punkte dieser Linien bestimmt werden (I, 309), und als diese wählen wir $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ und $E^{IV}$, $F^{IV}$, $J^{IV}$, $K^{IV}$; dabei entspricht dem Schnittpunkte $M'$ von $A'B'$, $C'D'$ derjenige $R$ von $E^{IV}F^{IV}$, $J^{IV}K^{IV}$. Zugleich müssen aber auch, wenn $k'$ und $u$ kollinear sein sollen, dem Schnittpunkte der Tangenten des $k'$ in $A'$, $B'$, d. i. dem unendlich fernen Punkte $Y_1$ der $C'D'$, der Schnittpunkt $H^{IV}$ der Tangenten der $u$ in $E^{IV}$, $F^{IV}$ entsprechen; und ebenso dem unendlich fernen Punkte $X_1$ der $A'B'$ der Punkt $G^{IV}$. Dies ist jedoch, da $A'B'X_1M'$ und $C'D'Y_1M'$ harmonisch, nur dann möglich, wenn auch $E^{IV}F^{IV}G^{IV}R$ und $J^{IV}K^{IV}H^{IV}R$ harmonisch, d. i. wenn $R$ im Unendlichen liegt; und hierzu müssen die projicirenden Strahlen $\perp z$ stehen. Dann sind aber wirklich die Reihen der Punkte $V^{IV}$ und $W^{IV}$ bezw. mit den Reihen der $T'$ und $T_1'$ projektiv, weil — in Bezug auf die $V^{IV}$ und $T'$ — die Reihe der $T'$ projektiv ist mit derjenigen der $Q_0$, da die Punkte paarweise in Bezug auf $k'$ konjugirt sind (I, 344); weil ferner die Reihe der $Q_0$ ähnlich mit derjenigen der $V'$ ist, da sich in der zweiten Projektion diese parallelen Punktreihen aus $H'$ auf einander projiciren; und weil endlich die Reihe der $V'$ mit derjenigen der $V^{IV}$ ähnlich ist. Die projektive Beziehung der Reihen der $V^{IV}$ und der $T'$ ist aber

Fig. 173. durch die drei Paare entsprechender Punkte $E^{IV}$, $A'$; $F^{IV}$, $B'$; $G^{IV}$, $X_1$ bestimmt. Ebenso sind die Punktreihen der $W^{IV}$ und der $T_1'$ mit einander projektiv, und ihre Beziehung ist durch $J^{IV}$, $C'$; $K^{IV}$, $D'$; $H^{IV}$, $Y_1$ bestimmt. Daher ist auch das Büschel der Tangenten, welche je zwei Punkte $T'$ und $T_1'$ verbinden, kollinear mit dem Büschel der Erzeugenden, welche jedesmal die jenen Punkten entsprechenden Punkte $V^{IV}$ und $W^{IV}$ mit einander verbinden, oder $k'$ mit $u$, und $u$ ist ein Kegelschnitt.

**415.** Um die Gestalt des *Umrißkegelschnittes* $u$ näher zu untersuchen, nehmen wir, wie in der Figur, die (vierte) Projektionsebene senkrecht zum projicirenden Strahle, also $\parallel z$. Die Projektion der Fläche auf eine beliebige Ebene bei ungeänderter Richtung der Projicirenden ist dann eine schiefe Projektion der hier erhaltenen senkrechten Projektion, wobei aus dem Mittelpunkte des Umrisses wieder sein Mittelpunkt, aus den Axen dagegen im allgemeinen nicht wieder Axen, sondern nur konjugirte Durchmesser werden.

Von dem *Umrißkegelschnitte* $u$ ist $z^{IV}$ eine Axe, weil sie Symmetrielinie der Punktreihen $g^{IV}$ und $h^{IV}$ ist. In der kollinearen Beziehung von $u$ zu $k'$ entspricht die $z^{IV}$, als Polare von $R$, der unendlich fernen Geraden $X_1 Y_1$, als Polare von $M'$. Ist daher $k'$ eine Ellipse, so ist $X_1 Y_1$ eine ideelle Sehne der $k'$, und $z^{IV}$ eine ideelle Axe des Umrißkegelschnittes $u$, dieser also eine Hyperbel. Ist dagegen $k'$ eine Hyperbel, so ist $z^{IV}$ eine reelle Axe des $u$, dieser kann dann eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein. Ist endlich $k'$ eine Parabel, so ist $X_1 Y_1$ eine Tangente des $k'$, daher auch $z^{IV}$ eine Tangente des $u$; dann ist $u$ eine Parabel, und $z^{IV}$ fällt ins Unendliche.

Um den *Mittelpunkt $O$ des Kegelschnittes* $u$ (auf $z^{IV}$) zu finden, beachte man, daß von $u$ die $E^{IV}F^{IV} = g^{IV}$ stets eine reelle Sehne ist (weil $AB$ als reell vorausgesetzt wurde), daß $J^{IV}K^{IV} = h^{IV}$ eine reelle oder ideelle Sehne mit den reellen oder ideellen Kurvenpunkten $J^{IV}$, $K^{IV}$ bildet, und daß $H^{IV}$, $G^{IV}$ die Pole bezw. von $g^{IV}$, $h^{IV}$ sind. Man erhält daher Punkte von $u$ als Schnittpunkte je zweier Strahlen, welche man aus den (reellen) Endpunkten $E^{IV}$, $F^{IV}$ einer durch den Pol $G^{IV}$ der $h^{IV}$ gezogenen Sehne des $u$ nach zugeordneten Punkten von $h^{IV}$ zieht (I, 347). Ist $k'$ eine Ellipse, sind also $C'$, $D'$ und daher auch $J^{IV}$, $K^{IV}$ bezw. reelle Kurvenpunkte, so bestimme man auf $h^{IV}$ den Punkt $E_1$ so daß $E^{IV}E_1 \parallel z^{IV}$, zu $E_1$ den zugeordneten Punkt $E_2$ der Involution $h^{IV}$ (indem man etwa aus $H^{IV}$ durch $J^{IV}$ einen Kreis zieht, an ihn aus $E_1$ die Tangente legt und deren Berührungspunkt $E_3$ auf $h^{IV}$ projicirt), so ist der Schnittpunkt von $E^{IV}E_1$ mit $F^{IV}E_2$ ein Punkt des $u$, und zwar der zu $F^{IV}$ in Bezug auf den Mittelpunkt symmetrische, so daß $F^{IV}E_2$ die Axe $z^{IV}$ im

Mittelpunkte $O$ von $u$ schneidet. Von der Hyperbel $u$ bestimmt man die in $z^{IV}$ liegende ideelle und die darauf senkrechte reelle Axe unter Beachtung, daß auf der ersteren die $E^{IV}F^{IV}$, $E^{IV}H^{IV}$, und auf der letzteren die $E^{IV}E_1$, $E^{IV}H^{IV}$ konjugirte Punkte einschneiden. — Ist $k'$ eine Hyperbel, so sind $J^{IV}$, $K^{IV}$ ideelle Kurvenpunkte, also einander zugeordnet; folglich sind die Schnittpunkte $E^{IV}J^{IV}$, $F^{IV}K^{IV}$ und $E^{IV}K^{IV}$, $F^{IV}J^{IV}$ Punkte des $u$, und da sie auf $z^{IV}$ liegen, die Scheitel einer Axe. Da $H^{IV}$ als Pol der reellen Sehne $G^{IV}H^{IV}$ jedenfalls ein äußerer Punkt des $u$ ist, so gehört die Axe auf $z^{IV}$ einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel ($u$) an, je nachdem diese Axe den Punkt $H^{IV}$ nicht einschließt, ihn einschließt, oder unendlich ist, d. h. je nachdem $h^{IV} \gtreqless g^{IV}$ ist.

Man kann daher sagen: *Der scheinbare Umriß der senkrechten Projektion der geraden Normalenfläche der Fläche zweiten Grades auf eine zu ihrer Axe $z$ parallele Ebene ist ein Kegelschnitt $u$, welcher die Projektion von $z$ zu seiner imaginären oder reellen oder unendlich fernen Axe hat, je nachdem der Leitkegelschnitt $k$ eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel ist. Im ersten Falle ist $u$ eine Hyperbel, im zweiten eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $h^{IV} \gtreqless g^{IV}$ ist, im letzten Falle eine Parabel.*

## V. Die Regelfläche dritten Grades und die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art.

### a) Die Regelfläche dritten Grades.

**416.** Die Regelfläche, welche einen Kegelschnitt $k$ und zwei Gerade $d$ und $e$, deren eine, $d$, den $k$ in $D_1$ schneidet, zu Leitlinien hat, ist eine windschiefe Fläche vom dritten Grade*) (388). (Es können die späteren Figuren 174 a) und b) verglichen werden.) Legt man durch $e$ eine Ebene, so schneidet dieselbe den $k$ in zwei (reellen oder imaginären) Punkten $K$, $K^*$, die $d$ in einem Punkte $D$, und es sind dann $KD$, $K^*D$ die zwei durch den Punkt $D$ der $d$ gehenden Erzeugenden; dieselben treffen die $e$ in zwei verschiedenen Punkten $E$, $E^*$, und in diesen wird **F** von jener Ebene berührt. Legt man dagegen durch $d$ eine Ebene, so schneidet dieselbe den $k$ außer in $D_1$ noch in einem Punkte $K$, die $e$ in $E$, und es ist dann $KE$ die einzige durch den Punkt $E$ der $e$ gehende Erzeugende;

*) Die Erforschung dieser Fläche verdankt man hauptsächlich Herrn *Cremona* (Memoria sulle superficie gobbe del terz' ordine in den Atti del Instituto Lombardo, B. 2, 1861). Sodann lieferte Herr *Weyr* eine Bearbeitung derselben in seiner „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, 1870".

dieselbe trifft die $d$ in $D$, und in diesem wird **F** von jener Ebene berührt. Daher: *Läßt man eine Regelfläche dritten Grades* **F** *mittelst eines Leitkegelschnittes $k$ und zweier Leitgeraden $d$, $e$ entstehen, von denen die eine, $d$, den $k$ schneidet, die andere, $e$, ihn nicht schneidet, so ist $e$ eine einfache, $d$ eine Doppelgerade der* **F**, *indem durch jeden Punkt $E$ der $e$ eine, durch jeden $D$ der $d$ zwei (reelle oder imaginäre) Erzeugende gehen, und es enthält jede durch $e$ oder $d$ gelegte Ebene bezw. zwei oder eine Erzeugende, und berührt die Fläche bezw. in deren Schnittpunkten $E$, $E^*$ mit $e$ oder $D$ mit $d$.*

Eine durch $e$ gelegte, den Kegelschnitt $k$ (in $B$) berührende Ebene, welche die $d$ in $C$ trifft, enthält zwei in $BC$ zusammenfallende Erzeugende; daher (386) ist $C$ ein *Kuspidalpunkt*, $BC$ eine *Kante* der **F**. Ist der Schnittpunkt $E_1$ der $e$ mit der Ebene des $k$ ein äußerer Punkt des $k$ (Fig. 174 a), so gibt es zwei reelle Kanten $BC$, $B^*C^*$ und zwei Kuspidalpunkte $C$, $C^*$; ist $E_1$ ein innerer Punkt des $k$ (Fig. 174 b), so gibt es keine reellen Kuspidalpunkte und Kanten. Im ersteren Falle ist die $d$ in dem einen der Stücke $CC^*$ eine reelle Doppellinie, in dem anderen eine isolirte Linie der **F**, im zweiten Falle ist die $d$ in ihrem ganzen Verlaufe eine reelle Doppellinie.

**417.** Man bemerkt, daß je zwei der Punkte $K$, $K^*$ des Kegelschnittes $k$ aus dem Punkte $E_1$ durch einen einzigen Strahl, aus dem Punkte $D_1$ des $k$ aber durch zwei Strahlen projicirt werden, und daß das durch die ersteren einfachen Strahlen gebildete Büschel $E_1$, und das durch die letzteren Paare konjugirter Strahlen gebildete involutorische Büschel $D_1$ projektiv (297) oder ein-zweideutig verwandt sind. Projicirt man diese Strahlenbüschel $E_1$ und $D_1$ bezw. aus $e$ und $d$ durch Ebenenbüschel, so ist offenbar jede Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen eine Erzeugende unserer Regelfläche. Es gilt nun:

*Ein einfaches und ein damit projektives involutorisches Ebenenbüschel (oder zwei ein-zweideutige Ebenenbüschel), deren Axen sich nicht schneiden, erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine Regelfläche dritten Grades.*

Es sei dabei die projektive Beziehung durch fünf Paare willkürlich angenommener entsprechender einfacher Ebenen beider Büschel bestimmt (297, 3)), so sind auch fünf Erzeugende als Durchschnitte je zweier entsprechenden Ebenen gegeben. Legt man durch eine (die erste) dieser fünf Erzeugenden irgend eine Ebene, schneidet dieselbe mit $d$ und $e$ bezw. in $D_1$ und $E_1$, und mit den vier anderen Erzeugenden in vier Punkten, führt dann durch einen der Punkte $D_1$, $E_1$, etwa durch $D_1$, und durch diese vier Punkte den durch

sie bestimmten Kegelschnitt $k$, und nimmt $k$, $d$, $e$ als Leitlinien für eine Regelfläche dritten Grades, so enthält diese unsere fünf Erzeugenden, von denen die Gerade $D_1 E_1$ die erste ist. Diese Fläche kann auch durch zwei ein-zweideutige Ebenenbüschel $d$, $e$ entstehen, und diese Büschel fallen mit den gegebenen zusammen, weil sie durch dieselben fünf entsprechenden Ebenen bestimmt sind, welche jene fünf Erzeugende enthalten. Daher erzeugen die zwei beliebig angenommenen ein-zweideutigen Ebenenbüschel eine Regelfläche dritten Grades.

Das einfache Ebenenbüschel $e$ schneidet auf der Geraden $d$ eine einfache, das involutorische Ebenenbüschel $d$ auf der $e$ eine involutorische Punktreihe ein; beide Reihen sind projektiv, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Büschel. Daher gilt:

*Eine einfache $d$ und eine damit projektive involutorische Punktreihe $e$ (oder zwei ein-zweideutige Punktreihen), deren Träger sich nicht schneiden, erzeugen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Regelfläche dritten Grades.*

Man bemerkt, daß der Träger der einfachen Punktreihe $d$ eine Doppelgerade der Fläche ist, weil jedem Punkte $D$ derselben zwei Punkte $E$, $E^*$ der $e$ entsprechen, nach welchen zwei Erzeugende aus $D$ laufen; und daß der Träger der Involution eine einfache Gerade der Fläche ist. Entsprechen den *Doppelpunkten* $A$, $A^*$ der Involution auf $e$ bezw. die Punkte $C$, $C^*$ auf $d$, so sind die letzteren die Verzweigungspunkte der $d$ (297, 1)) und die *Kuspidalpunkte* der Fläche, welche die Punkte der $d$ von einander scheiden, denen reelle und denen imaginäre Punktepaare der $e$ entsprechen. $AC$, $A^*C^*$ sind die *Kanten*; entlang derselben wird die Fläche von den Ebenen $eC$, $eC^*$ berührt, welche den Doppelebenen $dA$, $dA^*$ der Ebeneninvolution $d$ entsprechen und die *Kuspidalebenen* heißen. Es gilt daher:

*Die Doppelebenen $dA$, $dA^*$ der Involution $d$ gehen durch die Doppelpunkte $A$, $A^*$ der Involution $e$, und die Kuspidalebenen $eC$, $eC^*$ durch die Kuspidalpunkte $C$, $C^*$ der $d$. Die Kanten $AC$, $A^*C^*$ sind die Verbindungslinien je eines Doppelpunktes mit dem entsprechenden Kuspidalpunkte, und zugleich die Schnittlinien je einer Doppelebene mit der entsprechenden Kuspidalebene. Entlang der Kante eines Kuspidalpunktes wird die Fläche von der durch diesen Punkt gehenden Kuspidalebene berührt.*

**418.** Das Ebenenbüschel der den Kegelschnitt $k$ treffenden Geraden $d$ schneidet den $k$ und die den $k$ nicht treffende Gerade $e$ in projektiven Punktreihen, und das Ebenenbüschel $e$ schneidet den

$k$ in einer involutorischen und die $d$ in einer damit projektiven einfachen Punktreihe, und beide liegen perspektiv (besitzen in ihrem Schnittpunkte entsprechende Punkte); die Verbindungslinien entsprechender Punkte erzeugen in beiden Fällen die Fläche dritten Grades. Daher gilt:

*Eine Regelfläche dritten Grades wird erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte*

1) *zweier projektiven Punktreihen auf einem Kegelschnitte $k$ und auf einer Geraden $e$, welche den $k$ im allgemeinen nicht schneidet;*

2) *einer involutorischen Punktreihe auf einem Kegelschnitte $k$ und einer damit projektiven einfachen Punktreihe auf einer Geraden $d$, wenn sich beide Linien schneiden und in ihrem Schnittpunkte entsprechende Punkte vereinigt sind.*

Diese Fläche entsteht in beiden Fällen bei willkürlicher Annahme der bestimmenden Elemente. Nimmt man nämlich im *ersten Falle* auf $k$ und $e$ drei Paare entsprechender Punkte, d. i. auch drei Erzeugende, an, bestimmt den Punkt des $k$, welcher dem Schnittpunkte $E_1$ der $e$ mit der Ebene des $k$ entspricht, schneidet die Erzeugende, welche diese Punkte verbindet, ein zweitesmal mit $k$ in $D_1$, legt durch $D_1$ diejenige Gerade $D$, welche zwei andere Erzeugende schneidet, so bestimmen $d$, $e$, $k$ als Leitlinien eine Fläche dritten Grades, welche mit unserer Fläche drei Erzeugende gemein hat, also durch sie dieselben Punktreihen auf $e$ und $k$ einschneidet und mit ihr zusammenfällt. — Sind im *zweiten Falle* außer den in $D_1$ vereinigten entsprechenden Punkten von $k$ und $d$ zwei Punktepaare auf $k$ und ihre beiden entsprechenden Punkte auf $d$ willkürlich angenommen (oder aus fünf Paaren einfacher entsprechender Punkte konstruirt), und bildet man die Schnittlinie $e$ der beiden Ebenen der Punkte je eines Paares und seines entsprechenden Punktes, so bestimmen $e$, $d$, $k$ als Leitlinien eine Fläche dritten Grades, welche mit unserer Fläche zwei Paare von Erzeugenden gemein hat, also durch diese und durch den Punkt $D_1$ auf $k$ und $e$ dieselben Punktreihen einschneidet und mit ihr zusammenfällt.

**419.** Wir fügen noch hinzu, daß die *Regelfläche dritten Grades auch entstehen* kann

1) mittelst einer *Kurve dritter Ordnung $k$ und zweier Geraden $d$, $e$ als Leitlinien*, wenn $k$ von $d$ in zwei Punkten (oder im Doppelpunkte von $k$, wenn $k$ eben ist) und von $e$ in einem Punkte getroffen wird; $d$ ist dann die Doppellinie.

2) Mittelst *zweier projektiven Punktreihen auf einer Kurve dritter Ordnung $k$ und auf einer Geraden $e$*, wenn sich beide in einem Punkte schneiden, und dieser Punkt sich selbst entspricht. Die

Reihen werden durch ein Ebenenbüschel eingeschnitten, dessen Axe $d$ die $k$ in zwei Punkten trifft.

3) Mittelst *einer Punktreihe auf einer Geraden* $d$ *und einer damit projektiven involutorischen auf einer Kurve dritter Ordnung* $k$, wenn $d$ die $k$ in zwei Punkten schneidet, und jeder dieser Punkte sich selbst entspricht. Die Reihen werden durch ein Ebenenbüschel eingeschnitten, dessen Axe $e$ die $k$ in einem Punkte trifft.

**420.** Schneidet die gerade Punktreihe $e$ die mit ihr projektive Punktreihe des Kegelschnittes $k$, ohne daß im Schnittpunkte entsprechende Punkte vereinigt sind, also in nicht perspektiver Lage, so entsteht die *Cayleysche Fläche**). Was wird dabei aus der geraden Punktreihe $d$ und ihren Beziehungen zu den Punktreihen $e$ und $k$? Zunächst erkennt man, daß $d$ mit $e$ zusammenfällt. Denn zieht man, um $d$ zu bestimmen, die Verbindungslinie des Schnittpunktes $E_1$ von $e$ mit der Ebene des $k$ (und mit $k$ selbst) und des dem $E_1$ entsprechenden Punktes des $k$, schneidet diese Linie mit $k$ in einem zweiten (von diesem entsprechenden verschiedenen) Punkte $D_1$, so fällt $D_1$ in $E_1$, und die durch $D_1$ ($E_1$) schneidend gegen zwei Erzeugende der Fläche gelegte Gerade ist sowohl $d$ als $e$. Die *Doppelpunkte* $A$, $A^*$ der Involution auf $e$ entsprechen den Berührungspunkten $B$, $B^*$ der aus $E_1$ an $k$ gezogenen Tangenten, und da diese in $E_1$ ($D_1$) zusammenfallen, die Punkte $A$, $A^*$ der $e$ aber in der projektiven Beziehung der Punktreihen $k$ und $e$ den Punkten $B$, $B^*$ der $k$ entsprechen, so fallen auch $A$, $A^*$ in demjenigen Punkte der $e$ zusammen, welcher dem Punkte $E_1$ der $k$ entspricht. — Die eindeutige Punktreihe $d$ ist zur zweideutigen Reihe $e$ projektiv; da aber auf $e$ die Doppelpunkte in $A$ zusammenfallen, so fällt der eine Punkt jedes Paares in $A$, welcher Punkt dann jedem Punkte der $d$ entspricht, während die anderen Punkte der Paare eine einfache mit $d$ projektive Punktreihe bilden (297, 1)); dabei fallen die entsprechenden Punkte von $d$ und $e$ in einander als Schnittpunkte von $d$ ($e$) mit denselben Erzeugenden. Den in $A$ zusammenfallenden Doppelpunkten $A$, $A^*$ auf $e$ entsprechen aber die *Kuspidalpunkte* $C$, $C^*$ auf $d$; daher fallen auch die Kuspidalpunkte in $A$ zusammen. — In der Punktreihe des Kegelschnittes, welche zweideutig mit der eindeutigen Reihe $d$ projektiv ist, fallen die beiden Doppelpunkte $B$, $B^*$ in $D_1$ ($E_1$) zusammen. Daher liegt der eine Punkt jedes Paares des $k$ in $D_1$ und entspricht jedem Punkte

*) Aus einem Briefe des Herrn *Cayley* mitgeteilt von Herrn *Cremona* in seinem Aufsatze „Sur les surfaces gauches du troisième degré" (Crelles Journ. f. r. u. a. Math., B. 60, 1862, S. 313).

der $d$, daher auch sich selbst, und hierdurch ist die perspektive Lage der Punktreihen $k$ und $d$ gewahrt. Die anderen Punkte der Paare auf $k$ bilden aber eine einfache mit der Punktreihe $e$ und mit der damit zusammenfallenden Reihe der zweiten Punkte der Paare auf $d$ projektive und nicht perspektive Reihe. So werden alle drei Punktreihen $d$, $e$, $k$ zu einfach projektiven, in denen *der Schnittpunkt* $D_1$ $(E_1)$ *des* $k$ *mit* $d(e)$ *den in* $A$ *vereinigten Doppel- und Kuspidalpunkten der* $d$ *entspricht.* Die beiden *Kanten* fallen in $AD_1$ zusammen, welche Linie, indem sie eine Leitlinie und eine Erzeugende vereinigt, eine Doppelgerade der Fläche bildet. Die *Doppel- und Kuspidalebenen* sind die durch die Kante und bezw. durch $d$ und $e$ gehenden Ebenen. Da aber alle drei Gerade zusammenfallen, so ergeben sich Ebenen erst, indem man beachtet, daß sie unendlich kleine Winkel mit den Ebenen bilden, bei welchen die Kante durch ihre benachbarte Erzeugende ersetzt wird, daß also alle diese Ebenen in der einen Ebene zusammenfallen, welche durch $AD_1 = d = e$ und durch die Tangente des $k$ in $D_1$ geht. Die Fläche wird demnach entlang $e(d)$ von dieser Ebene berührt und außerdem in jedem von $A$ verschiedenen Punkte der $e$ von einer anderen (wechselnden) Ebene.

Liegen die eindeutigen Punktreihen $e(d)$ und $k$ perspektiv, d. h. fällt $A$ in $E_1$ $(D_1)$, so zerfällt die Fläche in ein *geradliniges Hyperboloid* (141, 4)) und in die Ebene der $e(d)$ und der Tangente des $k$ in $E_1$ $(D_1)$.

**421.** Wir wollen noch erkennen, daß *jede Regelfläche dritten Grades* F mit der bisher betrachteten Fläche übereinstimmt. Es wird dies bewiesen, indem man zeigt, daß alle Erzeugende einer Regelfläche dritten Grades zwei (sich nicht treffende) Geraden $d$ und $e$ schneiden; dann *hat die Fläche zu Leitlinien die Geraden* $d$ *und* $e$ *und außerdem jeden Kegelschnitt* $k$, in welchem eine durch eine Erzeugende gelegte Ebene die Fläche trifft; und eine der Leitgeraden muß den $k$ schneiden, weil, wenn keine oder beide den $k$ schnitten, der Grad bezw. vier oder zwei wäre. — Um jenes zu beweisen, lege man durch vier beliebige gerade Erzeugende der Regelfläche die zwei sie schneidende Geraden $d$, $e$ (144, 12)). Da jede derselben vier Punkte der Fläche dritten Grades enthält, muß sie ganz in ihr liegen (387, 9)). Könnten durch jene vier Erzeugende unendlich viele Gerade gelegt werden, so würden dieselben das durch drei derselben bestimmte einschalige Hyperboloid bilden, und die F müßte in dieses und in eine Ebene zerfallen, also einen besonderen Fall unserer Fläche $k$, $d$, $e$ darstellen. Legt man nun durch eine der Geraden $d$, $e$, etwa durch $d$, und durch eine jener

vier Erzeugenden $g$ eine Ebene, so muß dieselbe die Fläche dritten Grades noch in einer dritten Geraden $g'$ schneiden (387, 11)). Die übrigen Erzeugenden schneiden diese Ebene in Punkten, die nur in den drei Geraden $d$, $g$, $g'$ liegen können. In der Erzeugenden $g$ oder in derjenigen $g'$ ist dies aber nicht möglich, weil es dann für jede der vier $g$ oder für jede der vier zugehörigen $g'$ stattfinden, und dann die Fläche das soeben bezeichnete Hyperboloid sein müßte. Daher müssen die Schnittpunkte der Erzeugenden der Fläche mit der Ebene $dgg'$ auf $d$ liegen, oder $d$ muß von allen Erzeugenden getroffen werden. Dasselbe gilt von $e$, und somit ist die Behauptung bewiesen.

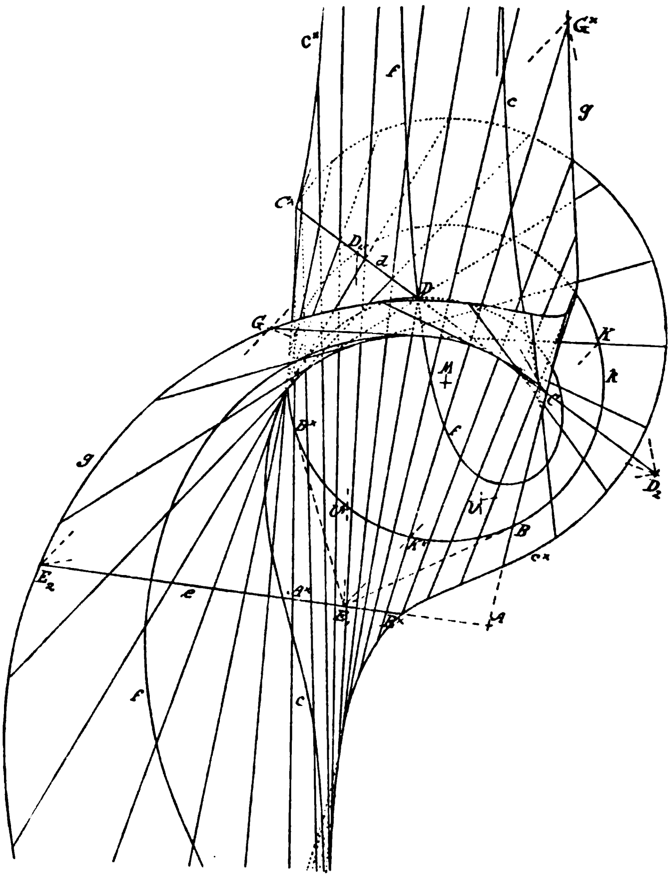
**422.** *Aufg. Die Regelfläche dritten Grades aus ihren Leitlinien, einem Kegelschnitte (Kreis) $k$, der sie schneidenden Doppelgeraden $d$ und der einfachen Leitgeraden $e$, durch ihre Projektion auf die Ebene* $\mathrm{P}_1$ *des $k$, und durch ihre Spuren mit* $\mathrm{P}_1$ *und mit einer parallel zu* $\mathrm{P}_1$ *gelegten Ebene* $\mathrm{P}_2$ *darzustellen.*

*Aufl.* Die Erzeugenden der Fläche erhält man paarweise als Fig. 174 a, b.
die Schnittlinien einer Ebene des Büschels $e$ mit den beiden entsprechenden (sie in Punkten des $k$ treffenden) Ebenen des Büschels $d$. Sind die Spuren von $d$ und $e$ in $\mathrm{P}_1$ und $\mathrm{P}_2$ bezw. $D_1$ (auf $k$), $D_2$, und $E_1$, $E_2$, so lege man durch $e$ eine Ebene mit den (parallelen) Spuren $E_1KK^*$, $E_2GG^*$, schneide die erstere Linie mit $k$ in $K$ und $K^*$; dann sind die Parallelen $D_1K$, $D_2G$ und $D_1K^*$, $D_2G^*$ die Spuren der beiden entsprechenden Ebenen des Büschels $d$, und $KG$, $K^*G^*$ zwei Erzeugende der Fläche. Die durch $e$ berührend an $k$ gelegten Ebenen enthalten die Tangenten $E_1B$, $E_1B^*$ des Kreises, die *Kanten* $BCA$, $B^*C^*A^*$, und auf diesen die *Kuspidalpunkte* $C$, $C^*$ auf $d$ und die *Doppelpunkte* $A$, $A^*$ auf $e$. In Fig. 174a ist $E_1$ ein äußerer, in 174b ein innerer Punkt des $k$, in der ersteren sind die Kanten und die bezeichneten Punkte reell, in der letzteren imaginär. Die gezeichneten Erzeugenden sind mit einer gewissen Regelmäßigkeit verteilt, indem $k$ durch die Strahlen $E_1KK^*$ in 24 symmetrisch zu der Mittellinie $E_1M$ ($M$ = Mittelpunkt des $k$) liegende Teile geteilt wurde, welche stetig vom einem zum anderen der Schnittpunkte der $E_1M$ mit $k$ abnehmen.

Die *ebenen Schnitte* der $\mathrm{F}$ sind Linien dritter Ordnung. Die erste *Spur* zerfällt in den Kreis $k$ und in die Gerade $E_1D_1$, die zweite *Spur* ist der Ort der Punkte $G$, $G^*$, enthält $E_2$ als einfachen, $D_2$ als Doppel- oder als isolirten Punkt, letzteres, wenn $D_2$ auf dem Teil der $d$ liegt, welcher der $\mathrm{F}$ als isolirte Linie angehört. In Fig. a) sind noch die Schnittlinien $c$, $c^*$ mit den parallel zu $\mathrm{P}_1$ durch die *Kuspidalpunkte* $C$, $C^*$ gelegten Ebenen verzeichnet. Dieselben be-

sitzen bezw. in $C$, $C^*$ eine *Spitze*, in welchen die Tangenten bezw. parallel zu $D_1 B$, $D_1 B^*$ laufen. Sodann wurde noch eine mit $\mathbf{P}_1$ parallele Schnittlinie $f$ mit einem Doppelpunkte $D$ (auf $d$) verzeichnet. Man erhält diese Kurven, indem man jede Erzeugende, z. B. $KG$, durch Strahlen schneidet, welche man parallel mit dem zugehörigen $D_1 K$ (oder $D_2 G$) durch $C$, $C^*$, $D$ zieht; oder auch, wenn

Fig. 174 a.

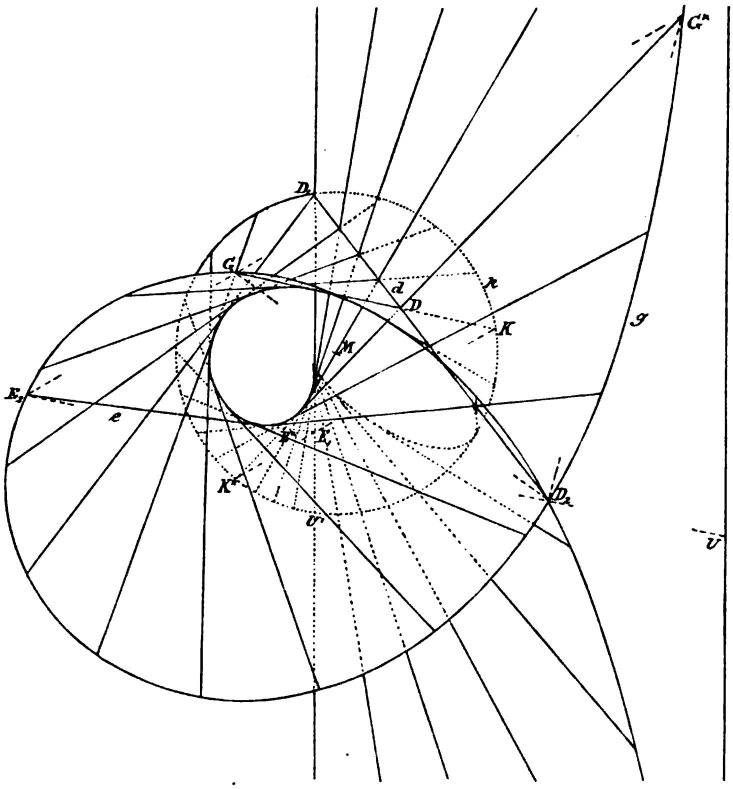



die Schnittpunkte unsicher werden, indem man jede Erzeugende, so $KG$, in dem Verhältnisse teilt, wie $D_1 D_2$ durch $C$, $C^*$, $D$ geteilt ist. Die Tangenten und Asymptoten dieser Kurven werden wir alsbald konstruiren, und bemerken nur, daß danach die Asymptoten aller dieser Kurven parallel zu $D_1 E_1$ laufen, und daß die für $g$ durch den Punkt $U$ der $D_2 E_2$ gezogen wird, welcher die $D_2 E_2$ in demselben Verhältnisse teilt, in welchem die $E_1 D_1$ durch ihren zweiten Schnittpunkt $U'$ mit $k$ geteilt ist.

Der *Umriß der Fläche* ist als Einhüllende der Erzeugenden gezeichnet. Er geht durch die Kuspidalpunkte $C$, $C^*$, und besitzt in Fig. a) drei Spitzen und zwei unendlich ferne Punkte, in Fig. b) eine Spitze und keinen unendlich fernen Punkt.

**423.** Nach der vor. Nr. können zwei ein- zweideutige Strahlenbüschel $E_2$, $D_2$ eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppel- oder einem isolirten Punkte erzeugen. Aber auch *allgemein erzeugen irgend*

Fig. 174 b.

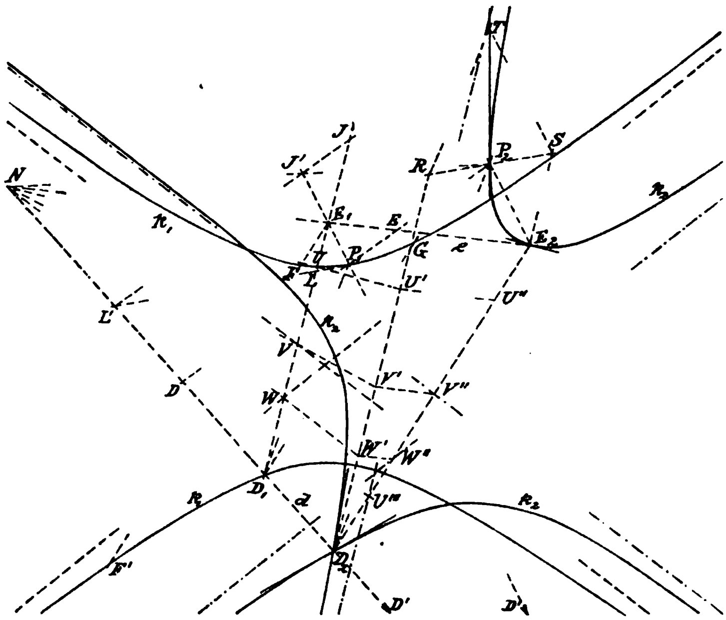



*zwei ein-zweideutige in derselben Ebene liegende Strahlenbüschel* $E_2$, $D_2$ *durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Linie dritter Ordnung, welche* $E_2$ *zu einem einfachen und* $D_2$ *zu einem Doppel- oder isolirten Punkte hat.* Denn die Büschel schneiden jede Gerade in zwei ein-zweideutigen Punktreihen, und diese haben drei Doppelpunkte (297, 4)), welche die Schnittpunkte der Geraden mit der erzeugten Linie sind. Die Tangente der Linie in $E_2$ ist der einfache Strahl, welcher dem Strahle $D_2 E_2$ entspricht, ihre Tangenten in $D_2$ sind die reellen oder imaginären Strahlen des Paares, welches dem Strahle $E_2 D_2$ entspricht.

In Fig. 174 befinden sich die *ein-zweideutigen Strahlenbüschel* $E_1$, $D_1$ *in perspektiver Lage*, indem dem Strahle $E_1 D_1$ derjenige $D_1 E_1$ entspricht, also zwei entsprechende Strahlen sich decken (297, 3)); *die von ihnen erzeugte Linie dritter Ordnung zerfällt* dann in die Verbindungsgerade $E_1 D_1$ ihrer Mittelpunkte und in den Kegelschnitt $k_1$, welcher durch $D_1$, aber nicht durch $E_1$ geht; die mit $E_1$, $D_1$ parallelen Strahlenbüschel in den zu $\mathbf{P}_1$ parallelen Ebenen, wie $E_2$, $D_2$, befinden sich nicht in perspektiver Lage, und erzeugen eigentliche Linien dritter Ordnung.

**424.** *Aufg. Es sind zwei perspektive ein-zweideutige Strahlenbüschel durch ihren Schnittkegelschnitt* $k_1$ *und ihre bezw. auf und außerhalb* $k_1$ *liegenden Mittelpunkte* $D_1$, $E_1$ *gegeben; man soll mittelst paralleler Strahlenbüschel* $D_2$, $E_2$ *eine Linie dritter Ordnung* $k_2$ *mit ihren*

Fig. 175.



*Tangenten und Asymptoten konstruiren.* Man kann auch das Büschel $D_2$ mit $D_1$ und $E_2$ mit $E_1$ perspektiv bilden mit derselben oder mit verschiedenen Axen; in unserem Falle ist die gemeinschaftliche perspektive Axe die unendlich ferne Gerade. Es sei $k_1$ eine Hyperbel.
Fig. 175. Denkt man sich unter $D_1 D_2$, $E_1 E_2$ die Projektionen zweier räumlichen Geraden $d$, $e$, so stellt die Figur, wie die beiden vorhergehenden, eine Regelfläche dritten Grades mittelst der parallelen Ebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ihrer Spuren $k_1$, $k_2$ dar.

*Aufl.* Ist $P_1$ ein beliebiger Punkt der $k_1$, so bildet $P_2$ einen Punkt der $k_2$, wenn $D_2P_2 \parallel D_1P_1$, $E_2P_2 \parallel E_1P_1$ gezogen wird. Die unendlich fernen Punkte der $k_2$ erhält man, wenn man $P_1$ auf $k_1$ in deren unendlich ferne Punkte oder in den zweiten Schnittpunkt der $k_1$ mit $D_1E_1$ rücken läßt. Der letztere Punkt ist stets reell; daher hat $k_2$ ein, zwei oder drei getrennte reelle unendlich ferne Punkte, je nachdem $k_1$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, vorausgesetzt, daß $D_1E_1$ nicht nach einem unendlich fernen Punkte der $k_1$ läuft.

Die *Tangente* der $k_2$ in $E_2$ ist parallel zu $E_1G$, wenn die zu $D_2E_2$ Parallele $D_1G$ den $k_1$ noch in $G$ trifft; die *Tangenten* der $k_1$ in $D_2$ sind parallel zu $D_1F$ und $D_1F'$, wenn die zu $E_2D_2$ Parallele $E_1FF'$ den $k_1$ in $F$ und $F'$ trifft.

**425.** *Bestimmung der Tangente der $k_2$ in einem allgemeinen Punkte $P_2$.* Ein *erstes Verfahren* stützt sich auf die Anschauung der Figur als Projektion einer Fläche dritten Grades. $P_1P_2$ stellt dann eine Erzeugende vor; dieselbe schneidet die $d$ und $e$ bezw. in $D$ und $E$. Die Berührungsebenen der Fläche in den Punkten $D$, $E$, $P_1$, $P_2$ der $P_1P_2$ bilden ein mit der Reihe der Berührungspunkte projektives Ebenenbüschel, dessen Spur in $\mathbf{P}_1$ das Strahlenbüschel $P_1$ bildet. Zu $D$, $E$, $P_1$ gehören die Strahlen $P_1D_1$, $P_1E_1$, $P_1L$ (Tangente an $k_1$); und indem durch diese drei Paare entsprechender Elemente die projektive Beziehung hergestellt ist, findet man den dem $P_2$ entsprechenden Strahl $P_1J$, indem man die Punktreihe $DEP_1P_2$ aus dem Schnittpunkte $N$ von $d$ und $e$ auf $E_1P_1$ in $D'E_1P_1J'$ projicirt, und das Strahlenbüschel $P_1(D_1E_1L)$ mit $D_1E_1$ in $D_1E_1L$ schneidet. Die so erhaltenen beiden Punktreihen sind perspektiv; ihr Projektionsmittelpunkt ist der Schnittpunkt $L'$ von $D'D_1 = d$ und von $P_1L$; daher entspricht dem $J'$ der Schnittpunkt $J$ von $D_1E_1$ mit $L'J'$, und $P_1J$ ist der gesuchte vierte Strahl; die Tangente $P_2T$ der $k_2$ ist dann $\parallel P_1J$. — Die *Konstruktion* ist daher die folgende: Man ziehe die Tangente an $k_1$ in $P_1$ bis $L'$ auf $D_1D_2$, verbinde den Schnittpunkt $N$ von $D_1D_2$ und $E_1E_2$ mit $P_2$ und schneide diese Linie mit $E_1P_1$ in $J'$, ziehe $L'J'$ bis $J$ auf $D_1E_1$, so ist die Tangente $P_2T \parallel P_1J$.

Ein *zweites Verfahren* gewinnt man durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens der ähnlichen Figur (I, 204). Man nimmt auf der Tangente $P_1L$ der $k_1$ einen passenden Punkt, etwa $L$ auf $D_1E_1$ an, zieht $P_2R \parallel P_1L$, dann $D_2R \parallel D_1L$ bis $R$ auf $P_2R$ und $E_2S \parallel E_1L$ bis $S$ auf $P_2R$, zieht $RT \parallel D_2P_2$, $ST \parallel E_2P_2$, so ist $T$ ein Punkt der Tangente. Man überzeugt sich von der Richtigkeit, wenn man $L$ auf der Tangente unendlich nahe an $P_1$ rücken läßt; dadurch gehen, indem die Figur $P_2RST$ ähnlich und parallel zu ihrer

gezeichneten Anfangsgestalt bleibt, $D_2RT$ und $E_2ST$ in gerade Linien bezw. parallel zu $D_1L$ und $E_1L$ ($L$ unendlich nahe bei $P_1$) über, und $T$ in den zu $P_2$ benachbarten Punkt der $k_2$.

**426.** Die *Asymptoten* können nicht unmittelbar nach den gegebenen Verfahren bestimmt werden. Die mit den Asymptoten der Hyperbel $k_1$ parallelen Asymptoten der $k_2$ erhält man, wenn man die $D_2E_2$ durch die Punkte $V''$ und $W''$ in demselben Verhältnisse teilt, in welchem $D_1E_1$ durch die Asymptoten der Hyperbel $k_1$ in $V$ und $W$ geteilt ist, und durch $V''$, $W''$ die Asymptoten der $k_2$ bezw. parallel zu den durch $V$, $W$ gehenden der $k_1$ zieht. Für diese Teilung projicirt man $V$, $W$ aus dem Schnittpunkte $N$ von $d$ und $e$ auf die zu $D_1E_1$ Parallele $D_2R$ nach $V'$, $W'$, und zieht dann $V'V''$ und $W'W'' \parallel e$. Denn denkt man sich durch $D_1$, $E_1$ Gerade nach dem zu einem unendlich fernen Punkte der $k_1$ benachbarten Punkte der $k_1$ gelegt, welche Gerade von der Richtung einer Asymptote unendlich wenig abweichen, und dann durch $D_2$, $E_2$ bezw. Parallele zu ihnen gelegt, so bilden die ersteren Linien mit $D_1E_1$ und die letzteren mit einer Parallelen zu $D_1E_1$ ähnliche Figuren, und die durch die unendlich fernen Eckpunkte dieser Dreiecke gehenden (parallelen) Asymptoten von $k_1$ und $k_2$ teilen die $D_1E_1$ und die Parallele zu ihr, und dann auch die $D_2E_2$, in demselben Verhältnisse. — Die mit $D_1E_1$ parallele Asymptote erhält man, wenn man $D_2E_2$ durch $U'''$ in demselben Verhältnisse teilt, wie $E_1D_1$ durch $k_1$ in $U$ geteilt ist, und durch $U'''$ die Parallele zu $D_1E_1$ zieht. $U'''$ erhält man, wenn man $U$ aus $N$ auf $D_2R$ in $U'$ projicirt, $U'U'' \parallel e$ bis $U''$ auf $D_2E_2$ zieht, und $D_2U''' = -E_2U''$ macht. Denn ist $X$ der dem $U$ benachbarte Punkt der $k_1$, $X'$ der dem zugehörigen unendlich fernen Punkte der $k_2$ benachbarte Punkt der $k_2$, so sind die Strahlen $X'D_2$, $X'E_2$ und die Asymptote $X'U'''$ bezw. parallel zu $XD_1$, $XE_1$, $D_1E_1$; daher schneiden die ersteren drei Strahlen auf jeder sie in endlichem Abstande schneidenden Geraden, insbesondere auf $D_2E_2$ Stücke $D_2U'''$, $U'''E_2$ ab, die sich wie $E_1U : UD_1$ verhalten. Hieraus folgt die Konstruktion.

## b) Die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art.

**427.** Es gibt zwei Arten von *Raumkurven vierter Ordnung* $k^4$; diejenige Kurve $k_1^4$, welche wir als Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades kennen gelernt haben, durch welche unendlich viele solcher Flächen (ein Büschel) gehen, und welche *erster Art* heißt, und diejenige *zweiter Art* $k_2^4$, durch welche nur eine Fläche zweiten Grades geht, und welche nur als der teilweise Schnitt einer Fläche

zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung erhalten werden kann*). Auch diejenigen erster Art kann man (in anderer Weise) als den teilweisen Schnitt einer Fläche zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung erhalten. Es gilt nämlich der

*Satz. Durch jede Kurve vierter Ordnung kann man wenigstens eine Fläche zweiter Ordnung* $\mathbf{F}^2$ *und unendlich viele Flächen dritter Ordnung* $\mathbf{F}^3$ *legen.*

Denn legt man durch 9 Punkte der Kurve $k^4$ die durch dieselben bestimmte Fläche $\mathbf{F}^2$, so enthält dieselbe die $k^4$ ganz, weil sie mehr als $4 \cdot 2 = 8$ Punkte derselben enthält (387, 9)); und legt man durch 13 Punkte der $k^4$ und 6 willkürliche Punkte die durch diese 19 Punkte bestimmte $\mathbf{F}^3$ (387, 7)), so enthält sie die $k^4$ ganz, weil sie von ihr mehr als $4 \cdot 3 = 12$ Punkte enthält. Es gilt nun der

*Satz. Jede Raumkurve vierter Ordnung* $k^4$ *kann als der teilweise Schnitt einer Fläche zweiter* $\mathbf{F}^2$ *und einer Fläche dritter Ordnung* $\mathbf{F}^3$ *erhalten werden. Sie ist von der ersten Art* ($k_1^4$), *wenn der andere Teil des Schnittes eine solche Linie zweiter Ordnung ist, daß man sie als ebenen Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung erhalten kann (ein Kegelschnitt oder zwei getrennte oder zusammenfallende Gerade einer Ebene); sie ist von der zweiten Art* ($k_2^4$), *wenn der andere Teil aus zweien nicht in einer Ebene liegenden oder aus der Doppelgeraden der* $\mathbf{F}^3$ *besteht, wobei die* $\mathbf{F}^2$ *eine Regelfläche ist.*

*Bew. Erster Fall.* Haben eine durch die Kurve $k^4$ gelegte Fläche zweiter und eine Fläche dritter Ordnung $\mathbf{F}^2$ und $\mathbf{F}^3$ außer $k^4$ noch eine ebene Linie zweiter Ordnung $k^2$ gemein, also einen eigentlichen Kegelschnitt, oder zwei getrennte Gerade (welche von $\mathbf{F}^3$ zwei Erzeugende, die sich auf der Doppelgeraden $d$ schneiden, oder eine Erzeugende und die einfache Leitlinie $e$ sein können), oder zwei in einer Ebene zusammenfallende Gerade (d. i. eine Gerade, entlang welcher die $\mathbf{F}^3$ und $\mathbf{F}^2$ eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen, so daß diese Gerade eine Kante der $\mathbf{F}^3$, und daß $\mathbf{F}^2$ ein Kegel sein muß), so enthält die Ebene dieser Linie zweiter Ordnung außer ihr von der $\mathbf{F}^3$ noch eine Gerade $g$. Eine zweite durch diese

*) Sie wurde zuerst gefunden von *Salmon* und mitgeteilt in seiner Abhandlung „On the classification of curves of double curvature" (Cambridge and Dublin Math. Journ., B. 5, 1850, S. 23), und dann von *Steiner*, der sie für neu hielt, und veröffentlichte in seiner Abhandlung „Über Flächen dritten Grades" (Crelles Journ. f. r. u. a. Math., B. 53, 1857, S. 138); sie wurde eingehend untersucht von Herrn *Cremona* in seiner „Memoria intorno alla curva gobba del quart ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado" (Abhandlungen der Akad. v. Bologna, 1861, und Annali di matematica, B. 4, 1861, S. 71); endlich erörtert von Herrn *Weyr* in seinem schon angeführten Buche über die Regelflächen dritter Ordnung, 1870, S. 82.

Gerade gelegte Ebene schneidet die $F^3$ in einer anderen Linie zweiter Ordnung $k^{2\prime}$. Durch fünf Punkte derselben und durch vier Punkte der $k^4$ lege man eine zweite Fläche zweiter Ordnung $F^{2\prime}$. Dieselbe schneidet die $F^2$ in einer Kurve vierter Ordnung erster Art $k^{4\prime}$, und diese bestimmt ein Flächenbüschel zweiter Ordnung. Die $k^4$ und $k^{4\prime}$, welche beide auf $F^2$ liegen, haben acht Punkte gemein, nämlich die 4.2 Schnittpunkte der $k^4$ mit der $F^{2\prime}$. Nun lege man durch $g$ eine dritte Ebene; dieselbe trifft die $F^3$, außer in $g$, in einer Linie zweiter Ordnung, und durch einen ihrer außerbalb $g$ liegenden Punkte und durch die $k^{4\prime}$ lege man die Fläche des Büschels; es ist dann eine projektive Beziehung zwischen dem Flächenbüschel $k^{4\prime}$ und dem Ebenenbüschel $g$ hergestellt, indem drei Flächen des Büschels $k^{4\prime}$ bezw. denjenigen drei Ebenen des Büschels $g$ als entsprechend zugewiesen sind, mit welchen sie je einen Kegelschnitt oder einen Punkt eines solchen gemein haben. Schneidet man nun alle Flächen (zweiter Ordnung) des Büschels $k^{4\prime}$ mit ihren entsprechenden Ebenen des Büschels $g$, so bilden alle Schnittlinien (zweiter Ordnung) eine Fläche $F^{3\prime}$, und diese ist von der dritten Ordnung, weil sie von jeder Geraden $h$ in drei Punkten geschnitten wird. Denn das Flächenbüschel $k^{4\prime}$ schneidet auf $h$ eine involutorische, und das Ebenenbüschel $g$ eine damit projektive einfache Punktreihe ein (299), und es gibt drei Punkte der $h$, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen (297, 4)); dieselben sind aber die Schnittpunkte der $h$ mit der $F^{3\prime}$. Diese Fläche enthält die Grundlinie $k^{4\prime}$ des Flächenbüschels $k^{4\prime}$, weil jeder Punkt derselben in einer Ebene des Büschels $h$ und in der entsprechenden des Büschels $k^{4\prime}$, nämlich in jeder Fläche desselben, liegt. Die Fläche $F^{3\prime}$ fällt aber mit der $F^3$ zusammen, da sie mit ihr 19 Punkte gemein hat, nämlich die acht gemeinsamen Punkte des $k^4$ und $k^{4\prime}$, je fünf auf jedem der beiden ersten Linien zweiter Ordnung, und einen auf der letzten Linie zweiter Ordnung, in welchen die drei gelegten Ebenen des Büschels $g$ die $F^3$ schneiden. Dann fallen aber auch $k^4$ und $k^{4\prime}$ in einander, weil sie die Schnittlinien von $F^2$ bezw. mit $F^3$ und $F^{3\prime}$ sind, und weil $F^3$ und $F^{3\prime}$ zusammenfallen. Daher gehen durch $k^4$ alle Flächen (zweiter Ordnung) unseres mit $k^{4\prime}$ bezeichneten Büschels.

*Zweiter Fall.* Haben die durch die $k^4$ gelegten Flächen $F^2$ und $F^3$ außer $k^4$ noch zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade oder die Doppelgerade der $F^3$ gemein, so muß $F^2$ eine Regelfläche sein und die gemeinsamen Geraden sind zwei Erzeugende dieser Flächen von derselben Schaar, oder eine einzelne Erzeugende. Jede Erzeugende der $F^2$ von derselben Schaar, wie die gemeinsamen Geraden, schneiden diese Geraden nicht; ihre drei Schnittpunkte mit

$F^3$ gehören daher der Schnittlinie $k^4$ an. Jede Erzeugende der $F^2$ von der anderen Schaar, wie die gemeinsamen Geraden, schneidet diese Geraden in zwei getrennten Punkten oder in einem Punkte der Doppelgeraden, der als Punkt der $F^3$ doppelt zählt; daher liegt von den drei Schnittpunkten der Erzeugenden mit $F^3$ nur einer auf $k^4$. Man kann daher durch $k^4$ keine weitere Fläche zweiten Grades $F^{2\prime}$ legen, weil die je drei Schnittpunkte jener Geraden mit $k^4$ zugleich ihre Schnittpunkte mit dieser $F^{2\prime}$ sein müßten, was unmöglich. Die Schnittkurve ist also von der zweiten Art ($k_2^4$), wie behauptet war.

428. *Wir geben nun die wesentlichsten unterscheidenden Eigenschaften der Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Art* ($k_1^4$, $k_2^4$) *an:*

1) Durch jede $k_1^4$ können unendlich viele Flächen zweiter Ordnung $F^2$, darunter unendlich viele Regelflächen gelegt werden; eine solche Regelfläche ist bestimmt durch $k_1^4$ und einen Punkt auf einer die $k_1^4$ zweipunktig schneidenden Geraden. Denn dann muß die ganze Gerade in $F^2$ liegen, also diese eine Regelfläche sein.

2) Durch eine $k_1^4$ können unendlich viele Flächen dritter Ordnung $F^3$ gelegt werden, aber im allgemeinen keine solche Regelfläche $F^3$. Denn eine Regelfläche dritter Ordnung $F^3$ hat eine Doppelgerade $d$, und diese trifft eine durch $k_1^4$ gehende $F^2$ in zwei Punkten. Die gemeinsame Linie zweiten Grades, welche außer $k_1^4$ der $F^2$ und $F^3$ gemein ist, und deren Ebene die $d$ nicht enthalten kann (vor. Nr., 1)), geht durch einen dieser Punkte, der andere derselben ist daher ein Doppelpunkt der $k_1^4$. Wenn daher $k_1^4$ keinen Doppelpunkt besitzt, kann keine Regelfläche dritter Ordnung durch sie gelegt werden. Im Falle, daß $F^2$ ein Kegel (vor. Nr., 1)), hat wirklich $k_1^4$ einen Doppelpunkt in einem Kuspidalpunkte der $F^3$.

3) Durch jede $k_2^4$ kann nur eine Fläche zweiten Grades $F^2$ gelegt werden und diese ist eine Regelfläche (vor. Nr., 2)).

4) Eine $k_2^4$ wird durch jede Erzeugende der einen Schaar der (einzigen) durch sie gehenden Regelfläche zweiten Grades in einem, durch jede Erzeugende der anderen Schaar in drei Punkten getroffen. Durch jeden Punkt der $k_2^4$, weil sie auf der Regelfläche $F^2$ liegt, geht daher eine dreipunktige Sehne der $k_2^4$ (nicht zwei, weil sonst in der Ebene dieser zweien fünf Punkte einer Linie vierter Ordnung $k_2^4$ lägen), und die $F^2$ hat zur einen Schaar ihrer Erzeugenden die Gesamtheit der dreipunktigen Sehnen der $k_2^4$.

5) Durch eine $k_2^4$ können unendlich viele Regelflächen dritter Ordnung $F^3$ gelegt werden. Man erhält eine solche, wenn man durch eine dreipunktige Sehne $d$ der $k_2^4$ als Axe ein involutorisches

Ebenenbüschel, und durch eine zweipunktige Sehne $e$ der $k_2^4$ als Axe ein einfaches Ebenenbüschel legt, und beide Büschel dadurch projektiv auf einander bezieht, daß man durch fünf weitere Punkte der $k_2^4$ entsprechende Ebenen führt (297, 3)). Beide Büschel erzeugen dann durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine Regelfläche dritter Ordnung $F^3$ (417), und diese enthält die $k_2^4$ ganz, weil sie von ihr $2 \cdot 3 + 2 + 5 = 13$ Punkte enthält (387, 9)); dabei sind die drei Punkte auf der Doppellinie $d$ der $F^3$ doppelt gezählt.

6) Jede Erzeugende einer durch eine $k_2^4$ gelegten Regelfläche dritter Ordnung $F^3$ schneidet die $k_2^4$ in zwei oder in einem Punkte, je nachdem die $F^3$ mit der (einzigen) durch $k_2^4$ gehenden Regelfläche zweiter Ordnung $F^2$ außer $k_2^4$ zwei getrennte (sich nicht schneidende) Gerade, oder eine Doppelgerade (der $F^3$) gemein hat; denn im ersteren Falle sind die letzteren Geraden Erzeugende der $F^3$ und der $F^2$, welche von den anderen Erzeugenden der $F^3$ nicht getroffen werden, so daß deren zwei Schnittpunkte mit $F^2$ auf $k_2^4$ liegen; im zweiten Falle treffen die Erzeugenden der $F^3$ deren Doppelleitlinie, welche der $F^2$ einfach angehört, in einem Punkte, so daß nur ihr zweiter Schnittpunkt mit $F^2$ auf $k_2^4$ liegt. Im ersten Falle schneidet die einfache Leitlinie $e$ der $F^3$ die $k_2^4$ nicht, im zweiten Falle in zwei Punkten. Denn eine durch $e$ gelegte Ebene enthält noch zwei Erzeugende der $F_3$, von denen jede die $k_2^4$ im ersten Falle in zwei, im letzten Falle in einem Punkte schneidet; woraus die Behauptung folgt, da die Ebene vier Punkte der $k_2^4$ enthält.

7) Eine $k_2^4$ kann durch drei verwandte Ebenenbüschel erzeugt werden. Denkt man nämlich $k_2^4$ als Schnitt zweier Regelflächen $F^2$ und $F^3$ entstanden, welche außerdem die Doppelgerade $d$ der $F^3$ gemein haben, so legt man durch eine dreipunktige Sehne $d$ der $k_2^4$ ein involutorisches, und durch eine zweipunktige $e$ ein einfaches Ebenenbüschel, welche man durch fünf weitere Punkte der $k_2^4$ projektiv aufeinander bezieht, und ferner durch eine weitere dreipunktige Sehne $d'$ der $k_2^4$ ein Ebenenbüschel, welches man durch drei von jenen fünf Punkten projektiv auf dasjenige $d$ bezieht, so bilden die Schnittpunkte je dreier entsprechenden Ebenen der drei Büschel die Kurve $k_2^4$. Denn die Büschel $d$ und $e$ erzeugen eine $F^3$, welche die $k_2^4$ enthält (5)), und $d$ und $d'$ erzeugen eine Regelfläche $F^2$, welche ebenfalls die $k_2^4$ enthält, weil sie $3 + 3 + 3 = 9$ Punkte derselben enthält ($> 4 \cdot 2$). Daher ist $k_2^4$ der Schnitt von $F^3$ mit $F^2$, und es gehen durch jeden Punkt der $k_2^4$ entsprechende Ebenen der Büschel $d$ und $e$, sowie der $d$ und $d'$, daher auch derjenigen $e$ und $d'$; demnach erzeugen auch die ein-zweideutigen Ebenenbüschel $e$ und $d'$ eine Regelfläche dritter Ordnung, welche durch $k_2^4$ geht.

8) Eine $k_2^4$ hat weder einen Doppel- noch einen Rückkehrpunkt. Denn eine durch einen solchen Punkt und eine dreipunktige Sehne der Kurve gelegte Ebene würde sie in fünf Punkten schneiden*).

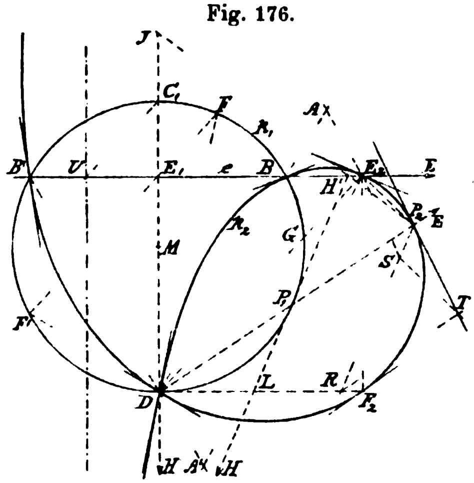
**429.** Die Raumkurven vierter Ordnung kann man nach dem Reell- oder Imaginärsein, dem Getrenntsein oder Zusammenfallen einiger oder aller von ihren *vieren unendlich fernen Punkten* unterscheiden.

*Aufg. Eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art c darzustellen als teilweisen Schnitt einer Regelfläche dritten Grades* $\mathbf{F}^3$ *mit einer Regelfläche zweiten Grades* $\mathbf{F}^2$, *wenn beide die Doppelgerade d der* $\mathbf{F}^3$ *gemein haben. Es soll der Fall gewählt werden, in welchem die vier unendlich fernen Punkte in einen Punkt zusammenfallen.*

*Aufl.* Die Darstellung geschehe mittelst zweier parallelen Spur- und Projektionsebenen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$.

1) Die *Regelfläche* $\mathbf{F}^3$ habe zu Leitlinien einen in der $\mathbf{P}_1$ liegenden Kreis $k_1$ mit dem Mittelpunkte $M$, die Doppelgerade $d$, welche Fig. 176. den $k_1$ schneidet und $\perp \mathbf{P}_1$ stehe, so daß sie sich in einen Punkt $D$ (des $k_1$) projicirt, und die einfache Leitgerade $e$, welche zu Spuren $E_1, E_2$ habe; dabei liege $E_1$ im Inneren von $k_1$ auf $DM$, und es sei $E_1E_2 \perp DM$. Von einer Erzeugenden der Fläche erhält man die beiden Spuren $P_1$ (auf $k_1$) und $P_2$, wenn man je eine Ebene durch $d$ und $e$ legt, welche sich in einem Punkte $P_1$ des $k_1$ schneiden; ihre zweiten Spuren $DP_1P_2$ und $E_2P_2 \parallel E_1P_1$ schneiden sich dann in dem Punkte $P_2$ der zweiten Spur $k_2$ der $\mathbf{F}^3$.

Fig. 176.




Die *Tangente* der $k_2$ in $E_2$ entspricht dem Strahle $DE_2$, ist also $\parallel E_1G$, wenn $G$ der Schnittpunkt von $DE_2$ mit $k_1$; die Tangenten der $k_2$ in $D$ entsprechen dem Strahle $E_2D$, sind also $DF$ und $DF'$,

*) Es sei noch erwähnt, daß aus jedem Punkte des Raumes an eine $k_1^4$ zwei zweipunktige Sehnen gezogen werden können (226), an eine $k_2^4$ deren drei. Jede Projektion einer $k_1^4$ hat daher zwei, diejenige einer $k_2^4$ drei Doppelpunkte. Wir unterlassen den Beweis dieses Satzes, weil er mittelst der *Plücker*schen Formeln (zwischen den Anzahlen der Singularitäten einer ebenen Kurve, ihrer Ordnungs- und Klassenzahl, erweitert von Herrn *Cayley* für unebene Kurven) erbracht wird, deren Herleitung uns zu weit führen würde.

wenn die zu $E_2 D$ Parallele $E_1 F$ den $k_1$ in $F$ und $F'$ trifft. Die *Tangente der $k_2$ in einem allgemeinen Punkte* bestimmt man nach dem *ersten Verfahren* der Nr. 425, indem man die Figur als die Projektion unserer Regelfläche dritten Grades $\mathbf{F}^3$ betrachtet, wobei wir auf die Grundanschauung zurückgehen, weil hier $d$ als Punkt erscheint. Die Berührungsebenen der $\mathbf{F}^3$ in den Schnittpunkten der Erzeugenden $P_1 P_2$ mit den Leitlinien $d$, $e$, $k_1$, d. i. in $D$, $E$, $P_1$ haben zu ersten Spuren bezw. $P_1 D$, $P_1 E_1$, die Tangente $P_1 H$ des $k_1$; diese Linien schneiden die $DE_1$ in den Punkten $D$, $E_1$, $H$; deren Reihe ist projektiv und perspektiv mit der Reihe der Berührungspunkte $D$, $E$, $P_1$; der perspektive Mittelpunkt beider Reihen ist der Schnittpunkt $H'$ von $E_1 E$ mit $HP_1$; dem vierten Berührungspunkte $P_2$ entspricht daher auf $DE_1$ der Schnittpunkt $J$ mit $H'P_2$; daher ist $P_1 J$ die erste Spur der Berührungsebene in $P_2$, und die damit Parallele $P_2 T$ ihre zweite Spur oder die gesuchte Tangente der $k_2$ in $P_2$.

In Anwendung des *zweiten Verfahrens* der Nr. 425 zieht man $P_2 R \parallel P_1 H$, zeichnet einen Strahl aus $D$, etwa $DF_2$ (welcher die zwei parallelen Strahlen $D_1 L$, $D_2 R$ der Fig. 175 darstellt), schneidet $DF_2$ mit $P_1 H$ und $P_2 R$ bezw. in $L$ und $R$, zieht $E_2 S \parallel E_1 L$ bis $S$ auf $P_2 R$, so ist der Schnittpunkt $T$ von $RT$ ($\parallel DP_1$) und $ST$ ($\parallel E_1 P_1$) ein Punkt der Tangente.

Für die *Schnittpunkte $B$, $B'$ der $e$ und $k_1$*, welche auch der $k_2$ angehören, bleibt das zweite Verfahren brauchbar. Kürzer aber erhält man die Tangente in $B$ parallel zu $E_1 A$, wenn $A$ der Schnittpunkt der $DB$ mit der zur Tangente des $k_1$ in $B$ Parallelen $E_2 A$. Entsprechend für $B' \parallel E_1 A'$. Man beweist dies unmittelbar nach dem Verfahren der ähnlichen Figur, indem man beachtet, daß der Strahl $BD$ und die Tangenten der $k_1$ und $k_2$ in $B$, sowie deren Parallele aus $A$, auf einem aus $E_1$ (oder aus $E_2$) benachbart zu $E_1 B$ gezogenen Strahle Stücke abschneiden, welche sich wie $BE_2 : BE_1$ verhalten.

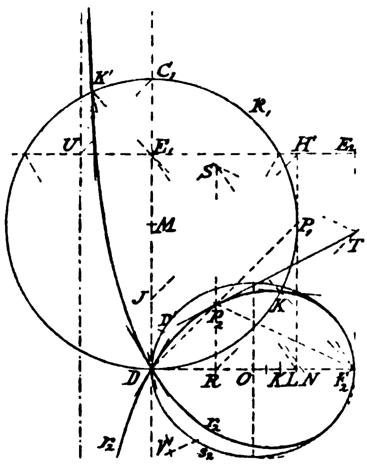
Läßt man $P_1$ nach $D$ rücken, so erhält man den Punkt $F_2$ der $k_2$ durch $DF_2$ als Tangente an $k_1$ und $E_2 F_2 \parallel E_1 D$, also auch durch $DF_2 \# E_1 E_2$. Die Tangente in $F_2$ steht $\perp F_2 C_1$ ($C_1 = DE_1$, $k_1$). Denkt man sich nämlich den zu $D$ benachbarten Punkt $Q_1$ der $k_1$, so erhält man daraus den zu $F_2$ benachbarten Punkt $Q_2$ der $k_2$ mittelst der Geraden $D Q_1 Q_2$ und $E_2 Q_2 \parallel E_1 Q_1$. Nun bilden die aufeinander senkrechten Linien $DQ_1$ und $C_1 Q_1$ bezw. mit $DF_2$ und $C_1 D$ die gleichen unendlich kleinen Winkel $\varphi$; daher ist beim Übergang von $F_2$ nach $Q_2$ das Fortschreiten auf $F_2 E_2 = DF_2 . \varphi$, dasjenige auf $DF_2 = DQ_1 = C_1 D . \varphi$, und deswegen ist das aus $F_2 Q_2$ und jenen Fortschreitungsstrecken gebildete Dreieck ähnlich mit dem-

jenigen $F_2DC_1$, und die entsprechenden Seiten stehen auf einander senkrecht, woraus die Konstruktion folgt.

Unsere Kurve $k_2$ besitzt nur *einen reellen unendlich fernen Punkt*, weil der Kreis $k_1$ keinen solchen enthält (424). Die *Asymptote* für diesen Punkt läuft ‖ $DE_1$ und muß die $DE_2$, und daher auch die $E_1E_2$, in demselben Verhältnisse teilen, in welchem die $E_1D$ durch $C_1$ (auf $k_1$) geteilt wird (426); sie geht daher durch den Punkt $U$ der $E_1E_2$, wenn $C_1U \parallel DE_2$.

**430.** Um nun die Regelfläche $\mathbf{F}^2$ so annehmen zu können, daß die *Schnittlinie c von* $\mathbf{F}^2$ *und* $\mathbf{F}^3$ gewisse unendlich ferne Punkte der $\mathbf{F}^3$ erhält, müssen wir zunächst die unendlich ferne Kurve der Fläche $\mathbf{F}^3$ durch den sie projicirenden Kegel, d. h. durch einen *Richtkegel* $\mathbf{K}^3$ der $\mathbf{F}^3$ angeben. Wir erhalten einen Richtkegel, wenn wir von den beiden ein-zweideutigen Ebenenbüscheln $d$, $e$, welche die $\mathbf{F}^3$ erzeugen, den einen, $e$, verschieben, bis seine Axe $e$ die $d$ schneidet, welchen Schnittpunkt wir in die erste Spur $D$ der $d$ legen wollen; die zweite Spur der verschobenen $e$ ist dann $F_2$ ($DF_2 \# E_1E_2$). Wir erhalten von der zweiten Spur $r_2$ des Richtkegels einen Punkt $P_2$, wenn wir einen Strahl $DP_1$ mit $k_1$ in $P_1$ schneiden und $F_2P_2 \parallel E_1P_1$ bis $P_2$ auf $DP_1$ ziehen. $r_2$ ist daher auch die zweite Spur einer Regelfläche dritten Grades, welche $k_1$, $d$ und $E_1F_2$ zu Leitlinien hat. $r_2$ geht durch die Schnittpunkte $K$, $K'$ von $E_1F_2$ mit $k_1$. Die *Tangenten* der $r_2$ in ihrem Doppelpunkte $D$ laufen nach den Schnittpunkten der $E_1E_2$ mit $k_1$, diejenige in ihrem einfachen Punkte $F_2$ läuft ‖ $DE_1$. $DF_2$ ist eine Symmetrieaxe der $r_2$. Fig. 177.

Fig. 177.



Die *Tangente* der $r_2$ in einem allgemeinen Punkte kann nach den beiden Verfahren der vor. Nr. gefunden werden. Nach dem *ersten Verfahren* beachtet man, daß die Berührungsebene des Richtkegels nach der Erzeugenden $DP_1$ parallel ist mit der Berührungsebene der $\mathbf{F}^3$ in dem unendlich fernen Punkte der parallelen Erzeugenden. Man schneidet daher die Tangente des $k_1$ in $P_1$ mit $E_1E_2$ in $H'$, zieht $H'J$ nach dem unendlich fernen Punkte der $DP_1$ oder ‖ $DP_1$ bis $J$ auf $DE_1$; dann ist die Tangente $P_2T \parallel JP_1$. Nach dem *zweiten Verfahren* ersetzt man nur $E_2$ der vor. Nr. durch

$F_2$. Man schneidet daher $P_1H'$ mit $DF_2$ in $L$, zieht $P_2R \parallel P_1H'$ bis $R$ auf $DF_2$, $F_2S \parallel E_1L$ bis $S$ auf $P_2R$, $RT \parallel DP_2$, $ST \parallel F_2P_2$, so ist $P_2T$ die Tangente. — Die *Asymptote* der $r_2$ läuft $\parallel DE_1$ und muß die $DF_2$, daher auch die $E_1E_2$, in demselben Verhältnisse teilen, in welchem $E_1D$ durch $C_1$ geteilt wird; sie geht daher durch den früher erhaltenen Punkt $U$ von $E_1E_2$, für welchen $C_1U \parallel DE_2$ ist.

Die *Tangenten in* $K, K'$ $(E_1F_2, k_1)$ erhält man nach dem zweiten Verfahren oder kürzer nach dem besonderen Verfahren der vor. Nr. für die Punkte $B$, $B'$ der Fig. 176. Man schneidet danach für $K'$ die $DK'$ mit $F_2V'$ ($\parallel$ Tangente des $k_1$ in $K'$) in $V'$, so ist die Tangente in $K' \parallel E_1V'$.

**431.** Soll die Regelfläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$ so angenommen werden, daß die vier unendlich fernen Punkte der Schnittkurve $c$ von $\mathbf{F}^2$ und $\mathbf{F}^3$ gegebene Punkte der $\mathbf{F}^3$ sind, so muß der Richtkegel $\mathbf{K}^2$ der $\mathbf{F}^2$, wenn er koncentrisch zu $\mathbf{K}^3$ gelegt wird, mit $\mathbf{K}^3$ die nach diesen unendlich fernen Punkten laufenden Erzeugenden gemein haben, während er mit ihm die Parallele zur Doppelgeraden $d$ der $\mathbf{F}^3$ schon nach der Annahme der Nr. 429 gemein hat. Durch die hiermit gegebenen fünf Erzeugenden ist dann der Kegel zweiten Grades bestimmt, und ebenso seine zweite Spur $s_2$ durch $D$ und die vier Punkte der zweiten Spur $r_2$ des $\mathbf{K}_2$, durch welche jene vier Erzeugenden gehen*).

Sollen nun, wie in unserer Aufgabe vorausgesetzt ist, die vier unendlich fernen Punkte der $c$ zusammenfallen, so muß man den Kegelschnitt $s_2$ so bestimmen, daß er durch $D$ geht und die Kurve $r_2$ in dem jenem unendlich fernen Punkte entsprechenden Punkte, etwa $P_2$, vierpunktig berührt. Man kann dies durch eine Fehlerkurve so ausführen, daß man aus irgend einem Punkte $T$ der Tangente $P_2T$ der $r_2$ in $P_2$ Strahlen zieht, welche die $r_2$ in je drei Punkten schneiden, deren je zwei nahe bei $P_2$ liegen; daß man zu jedem Strahle einen Kegelschnitt bestimmt, welcher durch die zwei letztbezeichneten Schnittpunkte des Strahles und durch $D$ geht, und die $P_2T$ in $P_2$ berührt; und daß man endlich vermittelst einer Fehlerkurve

*) Sind von den vier unendlich fernen Punkten zwei oder alle vier imaginär, so sind sie paarweise konjugirt und je auf einer reellen Geraden $g$ gegeben, welche die $r_2$ nur in einem reellen Punkte $W$ trifft. Zieht man nun, indem man den Mittelpunkt $F_2$ des eindeutigen Strahlenbüschels durch $W$ ersetzt denkt, aus $W$ zwei Strahlen, welche die $r_2$ noch in je zwei reellen Punkten schneiden, projicirt beide Punktepaare aus dem Doppelpunkte $D$ in Punktepaare auf $g$, so sind die Doppelpunkte der durch die letzteren Paare auf $g$ bestimmten Involution zwei konjugirt imaginäre Punkte der $r_2$.

denjenigen dieser Kegelschnitte ermittelt, für welchen jener Strahl in $TP_2$ fällt.

Wählt man $P_2$ im Scheitel $F_2$ der $r_2$, so kann man leicht eine genaue Konstruktion finden. Weil $F_2 D$ eine Symmetrielinie oder Axe der $r_2$, so ist sie auch eine solche des gesuchten Kegelschnittes $s_2$; und da in $F_2$ der Krümmungskreis die $r_2$ und $s_2$ vierpunktig berührt, so hat man nur den Krümmungsmittelpunkt $K$ von $r_2$ in $F_2$ zu ermitteln, und dann den $s_2$ so zu bestimmen, daß er auch ihm zugehört. Es ist aber der Krümmungshalbmesser $r = KF_2 = \frac{1}{2} DN$, wenn $N$ auf $DF_2$ durch $E_1 N \parallel C_1 F_2$ eingeschnitten wird. Denn ist $Q_2$ ein dem $F_2$ benachbarter Punkt der $r_2$, und ist der Winkel der Sehne $F_2 Q_2$ mit der Tangente $F_2 E_2 = \varphi$, so ist der Krümmungshalbmesser $r = F_2 Q_2 : 2\varphi$. Der Punkt $Q_2$ wird aber aus dem zu $D$ benachbarten Punkte $Q_1$ des $k_1$ gewonnen durch die Geraden $DQ_1 Q_2$ und durch $F_2 Q_2 \parallel E_1 Q_1$. Da nun $DQ_1 \perp C_1 Q_1$, so ist $F_2 Q_2 = DQ_1 (DF_2 : C_1 D)$ und $\varphi = DQ_1 : E_1 D$. Hieraus ergibt sich, wie behauptet,

$$r = KF_2 = DQ_1 \frac{DF_2}{C_1 D} : 2 \frac{DQ_1}{E_1 D} = \frac{1}{2} DF_2 \frac{E_1 D}{C_1 D} = \frac{1}{2} DN.$$

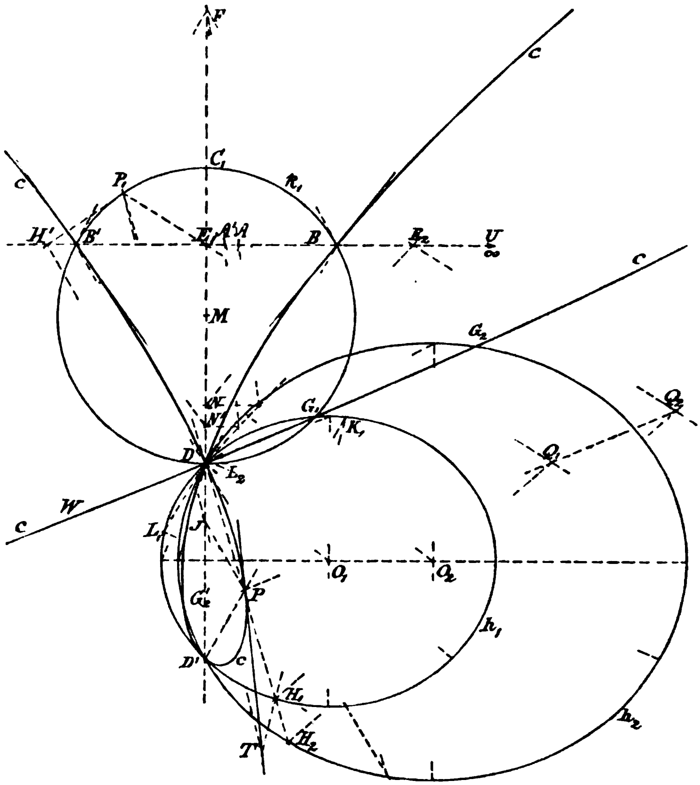
Den *Kegelschnitt* $s_2$ erhält man nun aus seiner einen Axe $DF_2 = 2a$, welche aber nicht notwendig die Hauptaxe ist, und dem Krümmungsmittelpunkte $K$ für $F_2$, wenn man die Linie der anderen Axe $2b$ senkrecht zur ersteren durch deren Mitte $O$ zieht und mit einem Kreise schneidet, der aus dem Mittelpunkte zwischen $O$ und $K$ durch $F_2$ gezogen wurde. Denn es ist dann $b^2 = r \cdot a$ (I, 250), weil der genannte Kreis über den aneinander gesetzten Strecken $F_2 K = r$ und $a$ als Durchmesser beschrieben und die andere Axe durch den Grenzpunkt dieser Strecken senkrecht zu denselben gezogen ist.

Weil $s_2$ ein eigentlicher Kegelschnitt, so ist $\mathbf{F}^2$ ein *einschaliges Hyperboloid*; bestünde $s_2$ aus zwei Geraden, so würde der Richtkegel aus zwei Ebenen bestehen und $\mathbf{F}^2$ ein *hyperbolisches Paraboloid* sein. Dies tritt ein, wenn $P_2$ in $D$ (statt in $F_2$) fällt. Die zwei Berührungsebenen des $\mathbf{K}^3$ entlang $d$ sind dann die Richtebenen der $\mathbf{F}^2$.

**432.** Um nun die Schnittkurve $c$ der Flächen $\mathbf{F}^3$ und $\mathbf{F}^2$ zu konstruiren, genügt es in Bezug auf $\mathbf{F}^3$, ihre drei Leitlinien $k_1$, Fig. 178.
$d$, $e$ anzugeben. Von $\mathbf{F}^2$ ist infolge der Bedingungen der Aufgabe (429) ermittelt, daß sie durch die Gerade $d$ gehen und $Ds_2$ der Fig. 177 zum Richtkegel haben muß; es sind also $3 + 4$ Punkte derselben bestimmt (drei auf der Geraden $d$ und vier weitere auf dem unendlich fernen Kegelschnitte $k$, von dem ein fünfter Punkt auf $d$ liegt), also noch zwei willkürlich anzunehmen. Verzeichnen

wir zunächst die zweite Spur $h_2$ der $F^2$; sie geht durch $D$ und ist ähnlich und ähnlich gelegen mit $s_2$ oder geht durch deren beide unendlich ferne (imaginäre) Punkte. Die zwei noch willkürlich anzunehmenden Punkte können zur vollständigen Bestimmung des Kegelschnittes $h_2$ verwendet werden. Gleichwertig mit deren Annahme ist die willkürliche Annahme des Mittelpunktes $O_2$ des $h_2$,

Fig. 178.



und daher auch seiner beiden Axenlinien $\parallel$ und $\perp E_1E_2$. Zeichnet man dann in Fig. 177 einen Halbdurchmesser $OD'$ des $r_2$ parallel zu $O_2D$ der Fig. 178, so erhält man eine Axe des $h_2$ durch eine Parallele aus $D$ zu $D'D$ der Fig. 177; entsprechend die andere; hierdurch ist $h_2$ ($\sim s_2$) bestimmt. Die erste Spur $h_1$ der $F^2$ ist nun ebenfalls bestimmt, indem jeder Strahl aus $D$ zwischen $h_1$ und $h_2$ gleich der zu ihm parallelen Sehne des $s_2$ aus $D$ ist. Ebenso ist ein solcher Strahl zwischen den Mittelpunkten $O_1$ und $O_2$ der $h_1$ und $h_2$ $\#$ $DO$ der Fig. 177, woraus sich $O_1$ ergibt. $h_1$ und $h_2$ schneiden sich in $D$ und in einem zweiten Punkte $D'$ der $DE_1$. Die Punkte $D$ und $D'$ sind die Projektionen der beiden auf $P_1$ senkrechten

Erzeugenden der einen und der anderen Schaar der $\mathbf{F}^2$. Die Erzeugenden der beiden Schaaren projiciren sich daher als die Strahlenbüschel $D$ und $D'$.

Man erhält einen Punkt $P$ der Schnittkurve $c$, wenn man durch die Doppelgerade $d$ eine Ebene $DP_1$ legt; dieselbe enthält noch je eine Erzeugende von $\mathbf{F}^3$ und $\mathbf{F}^2$, und deren gegenseitiger Schnittpunkt ist $P$. Um ihn zu erhalten, legt man eine Hilfsebene durch jede der Erzeugenden. Diejenige durch die Erzeugende der $\mathbf{F}^3$ läßt man am zweckmäßigsten auch durch $e$ gehen; ihre Spuren sind dann $E_1P_1Q_1$ ($P_1$ auf $k_1$) und $E_2Q_2 \parallel E_1P_1$. Die Erzeugende der $\mathbf{F}^2$ ist $H_1H_2$, wenn $H_1$, $H_2$ die Schnittpunkte von $DP_1$ mit $h_1$, $h_2$ sind, und die durch sie zu legende Hilfsebene gibt man durch zwei passende zu einander parallele Spuren $H_1Q_1$ und $H_2Q_2$ an. Die ersten Spuren der Hilfsebenen schneiden sich in $Q_1$, die zweiten in $Q_2$; daher ist $Q_1Q_2$ ihre Schnittlinie und bestimmt auf $DP_1$ den Punkt $P$. Die Hilfsebenen sind passend, wenn sich $Q_1$, $Q_2$, $P$ sicher ergeben. Zieht man die erste Spur $H_1Q_1$ durch $E_1$, so fällt auch $Q_1$ in $E_1$ und man erspart die Linien $E_1Q_1$ und $H_1Q_1$; doch darf dies nur geschehen, wenn der Schnittpunkt $P$ dadurch sicher wird, was in unserem Falle nicht stattfindet. Die Kurve $c$ geht dreimal durch $D$, weil jede Erzeugende der $\mathbf{F}^2$ von der Schaar, zu welcher $d$ gehört, also auch $d$, die $c$ dreimal schneidet (428, 4)); ferner durch $D'$ in $\mathbf{P}_1$, weil durch $D'$ der Kegelschnitt $h_1$ der $\mathbf{F}^2$ und die Erzeugende $DE_1C_1$ der $\mathbf{F}^3$ geht; sie wird in $D'$ von $h_1$ berührt, weil die Berührungsebene der $\mathbf{F}^2$, welche die räumliche Tangente der $c$ enthält, sich in die Tangente der $h_1$ in $D'$ projicirt, da sie diese und die sich in $D'$ projicirende Erzeugende der $\mathbf{F}^2$ ($\perp \mathbf{P}_1$) enthält. Ferner geht $c$ einmal durch die Schnittpunkte $B$, $B'$ von $k_1$ und $E_1E_2$, weil jeder dieser Punkte die Projektion einer Erzeugenden der $\mathbf{F}^3$ ist, und eine solche einen Punkt der $c$ enthält (428, 6)); ferner durch den Schnittpunkt $G_1$ der ersten Spuren $k_1$, $h_1$, und durch die $G_2$, $G_2'$ der zweiten $k_2$, $h_2$, welche letztere mittelst der Fig. 176 bestimmt sind, nicht aber durch die Schnittpunkte $D$ ($D_1$, $D_2$) der Spuren (s. 433). Die Zweige $DG_2$, $DB$ vereinigen sich im Endlichen, die Zweige $DW$, $DB'$ laufen gegen den unendlich fernen Punkt (ohne Asymptote).

**433.** Die *Tangente* der $c$ in $P$ ist die Schnittlinie der Berührungsebenen der $\mathbf{F}^3$ und der $\mathbf{F}^2$ in $P$ und soll mittelst deren ersten Spuren bestimmt werden. Die der $\mathbf{F}^3$ findet man nach Nr. 429, indem man die Tangente des $k_1$ in $P_1$ mit $E_1E_2$ in $H'$, und darauf $H'P$ mit $DE_1$ in $J$ schneidet; dann ist $P_1J$ jene erste Spur. Die Erzeugenden $DP$, $D'P$ der beiden Schaaren der $\mathbf{F}^2$ treffen die $h_1$

bezw. in $H_1$ und $K_1$, daher ist $H_1K_1$ die erste Spur der Berührungsebene der $\mathbf{F}^2$. Schneiden sich $P_1J$ und $H_1K_1$ in $T$, so ist $PT$ die gesuchte Tangente.

Für die Punkte $B$, $B'$ der $c$, welche in den Schnittpunkten der $E_1E_2$ und des $k_1$ liegen, versagt das allgemeine Verfahren. Indem die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden der $\mathbf{F}^3 \perp \mathbf{P}_1$ stehen, gilt dies auch von den Berührungsebenen der $\mathbf{F}^3$ in den durch $B$ und $B'$ dargestellten Raumpunkten der Schnittkurve; die Spuren und Projektionen dieser Ebenen sind dann die Tangenten an $c$. Um sie zu bestimmen, muß erst die räumliche Lage dieser Punkte, so des $B$, ermittelt werden. Dies geschieht, indem man $DB$ mit $h_1$, $h_2$ bezw. in $L_1$, $L_2$ schneidet; wenn diese Punkte, wie in der Figur, unsicher sind, verschärft man sie, indem man aus den zu $D$ diametral gegenüberliegenden Punkten des $h_1$, $h_2$ Strahlen zieht, die zu $DB$ in Bezug auf $h_1$ und $h_2$ konjugirt sind. Die Spuren der durch die Erzeugende $(B)$ der $\mathbf{F}^3$ gelegten Hilfsebene fallen in $E_1BE_2$ zusammen, während als Spuren der durch die Erzeugende $L_1L_2$ der $\mathbf{F}^2$ gelegten Hilfsebenen vorteilhaft die Parallelen $L_1E_1$, $L_2A$ angenommen werden. $E_1E_2$ und $L_2A$ schneiden sich in $A$, daher liegt der Raumpunkt $B$ der Schnittkurve auf der Verbindungslinie von $E_1$ in $\mathbf{P}_1$ mit $A$ in $\mathbf{P}_2$. Die Berührungsebenen der $\mathbf{F}^3$ in den Schnittpunkten ihrer durch $B$ gehenden Erzeugenden mit $d$, $e$, $k_1$ schneiden die $DE_1$ bezw. in $D$, $E_1$, $F$, wenn durch $F$ die Tangente des $k_1$ in $B$ geht; die Berührungspunkte projiciren sich aus dem Punkte $E_1$ der $\mathbf{P}_1$ auf die Gerade der $E_1E_2$ der $\mathbf{P}_2$ in $E_1$, $E_2$, $U$ (unendlich ferner Punkt). Die projektiven Punktreihen $DE_1F$, $E_1E_2U$ haben $DE_2$ zur perspektiven Axe ($DU$ und $FE_1$ schneiden sich in $D$, $E_1U$ und $FE_2$ in $E_2$). Der vierte fragliche Berührungspunkt projicirt sich aber aus $E_1$ in $\mathbf{P}_1$ nach $A$ in $\mathbf{P}_2$; dem Punkte $A$ der Reihe $E_1E_2UA$ entspricht $N$ der Reihe $DE_1FN$, wenn $AF$ und $UN$ sich in einem Punkte der perspektiven Axe $DE_2$ treffen; $BN$ ist dann die gesuchte Tangente. Entsprechend erhält man für $B'$ die $B'N'$ aus $A'$, wobei sich wieder $A'F$ und $UN'$ auf $DE_2$ treffen.

Zur Bestimmung der *drei Tangenten der $c$ in $D$* müßte man erst die drei räumlichen Punkte auf $d$ als Doppelpunkte einer ein- und einer verwandten zweideutigen Punktreihe suchen (297, 4)). Legt man nämlich durch einen Punkt $P$ der $d$ als Punkt der ersteren Reihe die beiden durch ihn gehenden Erzeugenden der $\mathbf{F}^3$ (welche in der Ebene $Pe$ liegen), legt durch jede von diesen und durch $d$ eine Ebene, schneidet sie mit $\mathbf{F}^2$ in je einer Erzeugenden, so bestimmen diese auf $d$ die beiden entsprechenden Punkte $P'$, $P''$ der zweiten Reihe, weil jeder Punkt der $c$ durch zwei Erzeugende der $\mathbf{F}^3$ und $\mathbf{F}^2$

geliefert wird, welche in einer durch $d$ gehenden Ebene liegen. Die Projektion zweier solchen, je durch einen jener drei Doppelpunkte gehenden Erzeugenden ist eine Tangente der $c$ in $D$.

Man bemerkt aus der verschärften Bestimmung von $L_1, L_2$, wie die Verzeichnung der *Kegelschnitte* $h_1$, $h_2$ *entbehrlich* gemacht werden kann. Zur Konstruktion von $c$ genügen Kreis und Gerade, welche zur Bestimmung der ein-zweideutigen Strahlenbüschel dienen.

## VI. Das Cylindroid.

**434.** Eine windschiefe Fläche mit einer einzigen, und zwar unendlich fernen Leitgeraden, also mit einer Leitebene, ist das *Cylindroid.* Schneidet man einen Cylinder durch zwei mit seinen Erzeugenden nicht parallelen Ebenen, deren Schnittgerade $g$ sei, seien die Schnittpunkte derselben Erzeugende mit der einen und der anderen Schnittkurve bezw. $A, B, C \ldots$ und $A_1, B_1, C_1 \ldots$, und verschiebt man die erste Kurve in ihrer Ebene in der Richtung von $g$ um eine beliebige Strecke nach $A_2, B_2, C_2 \ldots$, und zieht die Geraden $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2 \ldots$, so sind diese die Erzeugenden des Cylindroids; sie haben eine zu $g$ und zu den Cylindererzeugenden parallele Ebene zur Richtebene. Den Cylinder wollen wir den *Grundcylinder* der Fläche nennen.

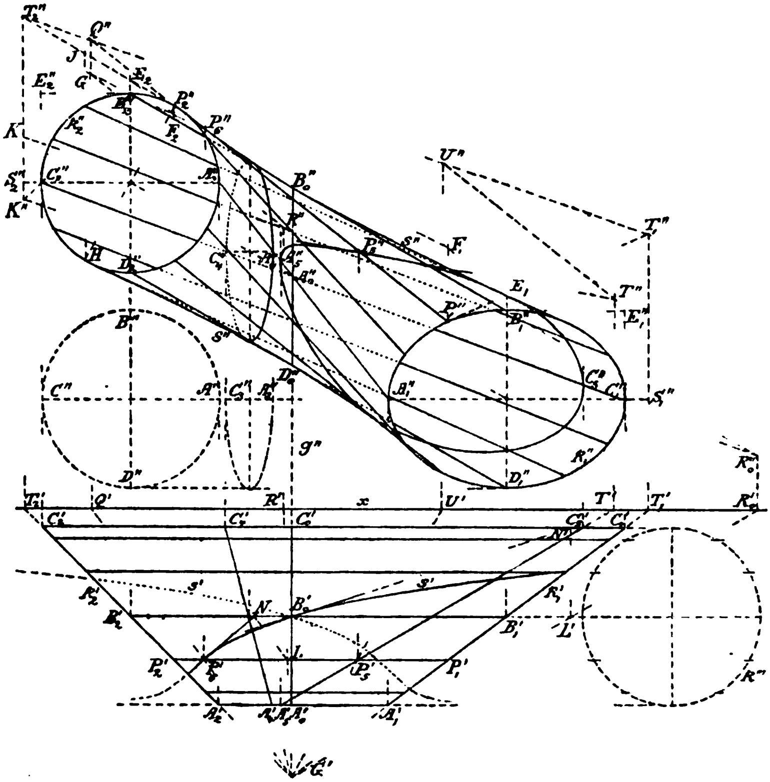
Sind der Cylinder, und dann auch die Schnittlinien vom zweiten Grade, so ist die durch diese zwei Linien als Leitlinien und durch die Leitebene bestimmte windschiefe Fläche vom achten Grade (388), wobei diese Fläche aus unserem Cylindroide und aus noch einem zweiten Flächenaste besteht, welcher die Erzeugenden $B_1D_2$, $D_1B_2$ u. s. w. enthält, wenn $B_1B_2$, $D_1D_2$ u. s. w. zwei Erzeugende des Cylindroids sind, die in derselben zur Richtebene parallelen Ebene liegen. *Das Cylindroid für sich ist daher vom vierten Grade.*

*Aufg. Das Cylindroid darzustellen und die Striktionslinie und die bemerkenswerten Schnitte desselben zu konstruiren, wenn der Grundcylinder ein Umdrehungscylinder ist.* Fig. 179.

*Aufl.* Seien die Erzeugenden des Grundcylinders parallel zur Projektionsaxe $x$, sei die Gerade $g \perp \mathrm{P}_1$ und $G'$ ihre erste Projektion, seien $G'A_1'$, $G'A_2'$ die ersten Spuren und Projektionen der beiden Schnittebenen, so ergeben sich von den Ellipsen, in welchen sie den Cylinder schneiden, die zweiten Projektionen aus dem in $\mathrm{P}_1$ umgelegten senkrechten (kreisförmigen) Schnitte $k'''$ des Cylinders mittelst ihrer Axen; zugleich sind die Punkte aus zwölf gleichförmig auf $k'''$ verteilten Punkten bestimmt. Die eine dieser zweiten Projektionen ist eine Ellipse $k_1'' = A_1''B_1''C_1''D_1''$, die andere $A''B''C''D''$

wurde dadurch zu einem Kreise gestaltet, daß die Schnittebene unter $45^0$ gegen $\mathbf{P}_2$ geneigt gelegt wurde. Diese Kurve wurde nun in der Richtung von $g$ nach $k_2 = A_2 B_2 C_2 D_2$ geschoben; dann sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... die Erzeugenden des Cylindroids. Man bemerkt, daß dabei die erste Projektion dieselbe, wie die des Cylinders, geblieben ist.

Fig. 179.



**435.** *Jede durch $g$ gelegte Schnittebene trifft den Grundcylinder und das Cylindroid in kongruenten und parallelen Kurven*, so $A_3 C_3$ und $A_4 C_4$, hier Ellipsen, wovon die zweite aus der ersten durch Verschiebung in der Richtung von $g$ entsteht. Denn der Höhenunterschied $(\parallel g)$ zweier Punkte $A_3$ und $A_4$, welche auf den aus einander entstandenen Erzeugenden $A_1 A$ und $A_1 A_2$ senkrecht über einander liegen, ist gleich dem Höhenunterschiede $A A_2$, multiplicirt mit dem Verhältnis der Abschnitte $A_1 A_4 : A_1 A_2$. Dieser Wert ist aber für alle Erzeugende derselbe; denn $A A_2$ ist die ursprüngliche für alle Punkte der Schnittlinie $A_1 A_2$ gleiche Verschiebung, und die drei Schnittebenen, weil sie durch die zur Richtebene parallele Gerade $g$

gehen, teilen alle Erzeugende in demselben Verhältnisse. Die durch $g$ senkrecht zu den Erzeugenden des Cylinders gelegte Ebene schneidet daher den Cylinder und das Cylindroid in kongruenten Kreisen. Die Projektionen des letzteren sind die Geraden $A_0'C_0'$, $B_0''D_0''$.

Da zwei Erzeugende, die in einer zur Richtebene ($\mathbf{P}_2$) parallelen Ebene liegen, zu einander parallel sind und symmetrisch zu der auf $\mathbf{P}_2$ senkrechten Geraden ($G'A_0'$, $A_0''$) liegen, so ist diese Gerade eine *Symmetrielinie der Fläche*, daher $G'A_0'$ Symmetrielinie des Grundrisses, und $A_0''$ Mittelpunkt ihres Aufrisses.

*Jede mit g parallele Ebene schneidet den Cylinder und das Cylindroid in Figuren von gleichem Flächeninhalte.* Eine solche Schnittfigur $A_5C_5P_5$ auf dem Cylindroide ergibt sich leicht; sie ist flächengleich mit der (nicht verzeichneten) Schnittellipse ihrer Ebene mit dem Cylinder. Zieht man nämlich in der gemeinschaftlichen Ebene beider Figuren zwei benachbarte mit $g$ parallele Gerade, so enthält jede derselben gleiche Sehnen der Kurven, daher schließen diese auch gleiche Flächenelemente ein, woraus der Satz folgt.

Um die *Tangente* an die Schnittkurve in einem Punkte $P_5$ derselben zu konstruiren, lege man ein Berührungsparaboloid nach der Erzeugenden $P_5P_1P_2$, mit der Richtebene des Cylindroids, $\mathbf{P}_2$, und den Tangenten der Kurven $k_1$, $k_2$ in $P_1$ und $P_2$ als Leitgeraden. Diese sind $P_1T_1$ und $P_2T_2$ mit den zweiten Spuren $T_1$ und $T_2$. Das Paraboloid hat zu Erzeugenden der ersten Schaar die Geraden $P_1P_2$, $T_1T_2$, $g$; und es ist $T_1T_2 \parallel S_1S_2$, wenn $S_1$, $S_2$ die zweiten Spuren der zu $\mathbf{P}_1$ parallelen Axen von $k_1$, $k_2$ sind. Um durch $\mathbf{P}_5$ die Erzeugende der zweiten Schaar zu legen, schneide man die Ebene $P_5g$ mit der $T_1T_2$ in $U$, $P_5U$ ist dann diese Erzeugende, $U$ ihre zweite Spur, und $UT$ ($\parallel P_1P_2$) die zweite Spur der Berührungsebene des Paraboloids und des Cylindroids in $P_5$. Deren Schnitt $P_5T$ mit der Ebene unserer Kurve ist die gesuchte Tangente.

**436.** Die *Striktionslinie s des Cylindroids* fällt wie bei dem Konoide mit dem *Umrisse* der Fläche zusammen, welcher zu ihrer Projektion auf die Richtebene, d. i. auch auf die $\mathbf{P}_2$, gehört. Um den Punkt $P_6$ derselben auf einer Erzeugenden $P_1P_2$, zu erhalten, bringe man, im umgekehrten Gange der vor. Nr., die zweite projicirende Ebene von $P_1P_2$ mit der Erzeugenden $T_1T_2$ des Berührungsparaboloides in $Q$ zum Schnitte; dann ist der gemeinsame Punkt der Ebene $Qg$ und der Geraden $P_1P_2$ der gesuchte Punkt $P_6$. Bei der Wiederholung dieses Verfahrens ist es zweckmäßig, das Parallelsein von $T_1T_2$ mit $S_1S_2$ zu benutzen; dadurch wird die Verzeichnung der Tangente $P_1T_1$ entbehrlich. Von dem Kreise $A_0B_0C_0D_0$ gehören der höchste und tiefste Punkt $B_0$ und $D_0$ der Striktions-

linie an, weil in jedem die Kreistangente senkrecht auf der Richtebene steht.

*Kanten* sind die Erzeugenden $A_1A_2$ und $C_1C_2$, weil die Fläche entlang ihrer von derselben Ebene ($\perp$ $\mathbf{P}_1$) berührt wird, indem diese Linien die Umrisse in der ersten Projektion bilden. Ihre benachbarten Erzeugenden sind bezw. mit ihnen parallel, weil dies bei dem Grundcylinder der Fall ist. Die *Kuspidalpunkte* der Fläche liegen daher in den unendlich fernen Punkten der Kanten, und diese sind die *Asymptoten* jedes Umrisses (386), also auch der Striktionslinie.

Wir wollen nun noch die *Tangente an die erste Projektion s' der Striktionslinie* mittelst des Verfahrens der ähnlichen Figur (I, 204) konstruiren, wobei in unserem Falle besondere Aufmerksamkeit notwendig ist, weil sich die Konstruktion von $s'$ über Grund- und Aufriß erstreckt. Wir fanden den Punkt $P_6'$ der $s'$ auf der Erzeugenden $P_1'P_2'$, indem wir die Tangenten von $k_1''$, $k_2''$ in $P_1''$, $P_2''$ bis $T_1''$, $T_2''$ auf $T_1'T_1''$, $T_2'T_2''$ zogen, $T_1''T_2''$ ($\parallel S_1''S_2''$) mit $P_1''P_2''$ in $Q''$ schnitten und $Q''$ auf $x$ nach $Q'$ projicirten; die $G'Q'$ ergab dann auf $P_1'P_2'$ den Punkt $P_6'$. Indem wir nun den zu $P_6'$ benachbarten Punkt der $s'$ auf der benachbarten Erzeugenden bestimmen wollen, werden wir dem Verfahren gemäß das entstehende unendlich kleine Parallelogramm bei $P_6'$, von welchem zwei Seiten in $P_1'P_2'$ und $G'Q'$ fallen, aus $P_6'$ als Ähnlichkeitspunkt vergrößern. Bei dieser Vergrößerung verschieben wir die zu $P_1$, $P_2$ benachbarten Punkte der $k_1$, $k_2$ auf deren Tangenten, was im Grundriß bis $B_1'$, $B_2'$, also im Aufriß bis $E_1$, $E_2$ auf $B_1'B_1''$, $B_2'B_2''$ geschehen mag. Dann wird sich auch der dem $Q'$ benachbarte Punkt auf $x$ verhältnismäßig verschieben, daher auch der dem $Q''$ benachbarte, so daß zur Bestimmung dieser Verschiebung im Aufriß $Q''$ der Ähnlichkeitspunkt ist. Indem sich bei dem Übergange von $P_1''$, $P_2''$ zu benachbarten Punkten der $k_1''$, $k_2''$ die Erzeugende $P_1''P_2''$ unendlich wenig dreht, schneidet sie auf jedem durch $Q''$ gelegten Strahle, als welcher $Q''Q'$ ($\perp x$) angenommen werden mag, ein unendlich kleines Stück ab, das verhältnismäßig vergrößert werden muß. Um dies zu erreichen, zieht man durch $P_1''$, $P_2''$ Parallele $P_1''F_1$, $P_2''F_2$ zu $Q''Q'$, und schneidet diese bezw. mit den durch $E_1$, $E_2$ parallel zu $P_1''P_2''$ gelegten Geraden in $F_1$, $F_2$; die Gerade $F_1F_2$ schneidet dann auf $Q''Q'$ den Endpunkt $G$ der verhältnismäßigen Verschiebung $Q''G$ ein, und $GR'' \parallel P_1''P_2''$ ist die verschobene $P_1''P_2''$. — Andererseits wird aber auch $T_1''T_2''$ ($\parallel S_1''S_2''$) parallel mit sich selbst verschoben. Geht $P_2''$ auf $k_2''$ um ein Bogenelement vorwärts, so bewegt sich $T_2''$ auf $T_2''T_2'$ um ein Element, dessen senkrechter Abstand von $P_2''T_2''$ sich zum Bogenelemente ver-

hält, wie $P_2''T_2''$ zum Halbmesser des Kreises $k_2''$. Vergrößert man das Bogenelement zu $P_2''E_2$, so wird jener Abstand $= P_2''J$, wenn man auf dem Kreishalbmesser von $P_2''$ die $P_2''H = P_2''T_2''$ aufträgt und $HJ \parallel E_2B_2''$ bis $J$ auf $P_2''T_2''$ zieht; dann geht $T_2''$ auf $T_2''T_2'$ nach $K$, wenn Abstand $(K, P_2''T_2'') = P_2''J$. Die verschobene $T_2''T_1''$ ist dann $KR'' \parallel T_2''T_1''$. Der Schnittpunkt $R''$ von $GR''$ und $KR''$ ist der verschobene Punkt des dem $Q''$ benachbarten Punktes; er projicirt sich auf $x$ nach $R'$, woraus sich durch $G'R'$ auf $P_1'P_2'$ der Punkt $L$ und die Seite $P_6'L$ des vergrößerten Parallelogrammes ergibt. Die anstoßende Seite desselben ist $LN \parallel G'Q'$, wobei $N$ auf $B_1'B_2'$, und $P_6'N$ ist die gesuchte Tangente.

Etwas einfacher gestaltet sich die Konstruktion für den *Punkt* $B_0$ der $s$. Verschiebt man die Punkte $B_1''$, $B_2''$ auf den Tangenten der $k_1''$, $k_2''$ bis $E_1''$, $E_2''$ (um die Länge der parallelen Axen), so verschiebt sich die $B_1'B_2'$ nach $C_1'C_2'$. Der Punkt $Q''$ ist aber in unserem Falle $B_0''$, und seine Verschiebung ist Null, weil die parallel zu $B_1''E_1''$ und zu $B_2''E_2''$ durch $B_0''$ gezogene Gerade von $E_1''E_2''$ ebenfalls in $B_0''$ getroffen wird. Der zu $B_2''$ gehörige Punkt $T_2''$ verschiebt sich aber auf $T_2''T_1''$ um eine Länge $=$ Abst. $(B_2''.\, T_2''T_2')$, geht also bis $K''$ auf $B_2''C_2''$. Schneiden sich nun $B_1''B_2''$ und $K''R_0''$ ($\parallel S_1''S_2''$) in dem Punkte $R_0''$, und projicirt man diesen auf $x$ nach $R_0'$, diesen aus $G'$ auf $B_1'B_2'$ nach $L'$, zieht $L'N' \parallel G'B_0'$ bis $N'$ auf $C_1'C_2'$, so ist $B_0'N'$ die gesuchte Tangente.

**437.** *Übungsaufgabe.* 1) Das Cylindroid mit einer gegen seine Richtebene geneigten, aber mit einer Erzeugenden parallelen Ebene zu schneiden und die Asymptoten der Schnittkurve zu konstruiren.

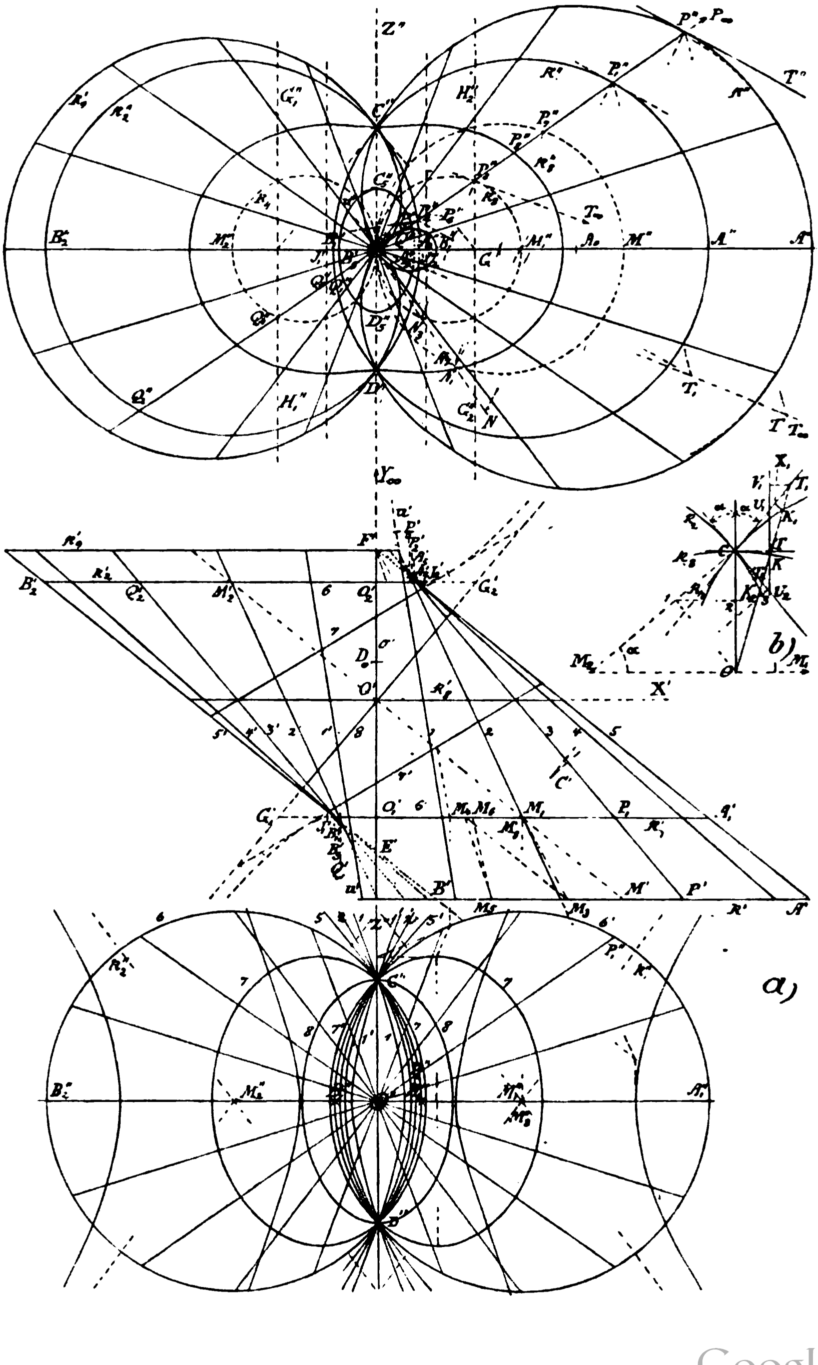
2) Für das einfache Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, ein Konoid oder ein Cylindroid die *Parameterkurve* zu konstruiren, worunter der geometrische Ort des Punktes einer Erzeugenden verstanden sein soll, welcher von ihrem Centralpunkte den Abstand des Parameters besitzt (384).

## VII. Die Wölbfläche des schrägen Durchgangs.

**438.** Die *Wölbfläche des schrägen Durchgangs* ist die windschiefe Fläche, welche zu Leitlinien hat zwei in parallelen Ebenen liegende gleiche Kreise $k_1$, $k_2$, und die durch den Mittelpunkt $O$ der Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte $M_1$, $M_2$ senkrecht zu ihren Ebenen gelegte Gerade $o$. Der *Mittelpunkt* und die *Symmetrieebene* für die Leitlinien und daher auch für die Fläche sind bezw. $O$ und $(o, M_1M_2)$. Wir wollen $\mathbf{P}_1$ parallel zur Symmetrieebene, $\mathbf{P}_2$ parallel zu den Kreisebenen annehmen. $A_1B_1$ und $A_2B_2$ seien die mit $\mathbf{P}_1$ parallelen Durchmesser der beiden Kreise. In den Figuren sind Fig. 180, Fig. 181.

zwei Fälle dargestellt; in Fig. 180 schneiden sich die zweiten Projektionen beider Kreise in reellen Punkten $C$ und $D$, in Fig. 181 in

Fig. 180.



imaginären; im ersten Falle trifft die Leitgerade $o$ die Kreisebenen in inneren Punkten $O_1$, $O_2$ der Kreise, im zweiten in äußeren.

Um Erzeugende zu konstruiren, legt man durch die Leitgerade $o$

Fig. 181.

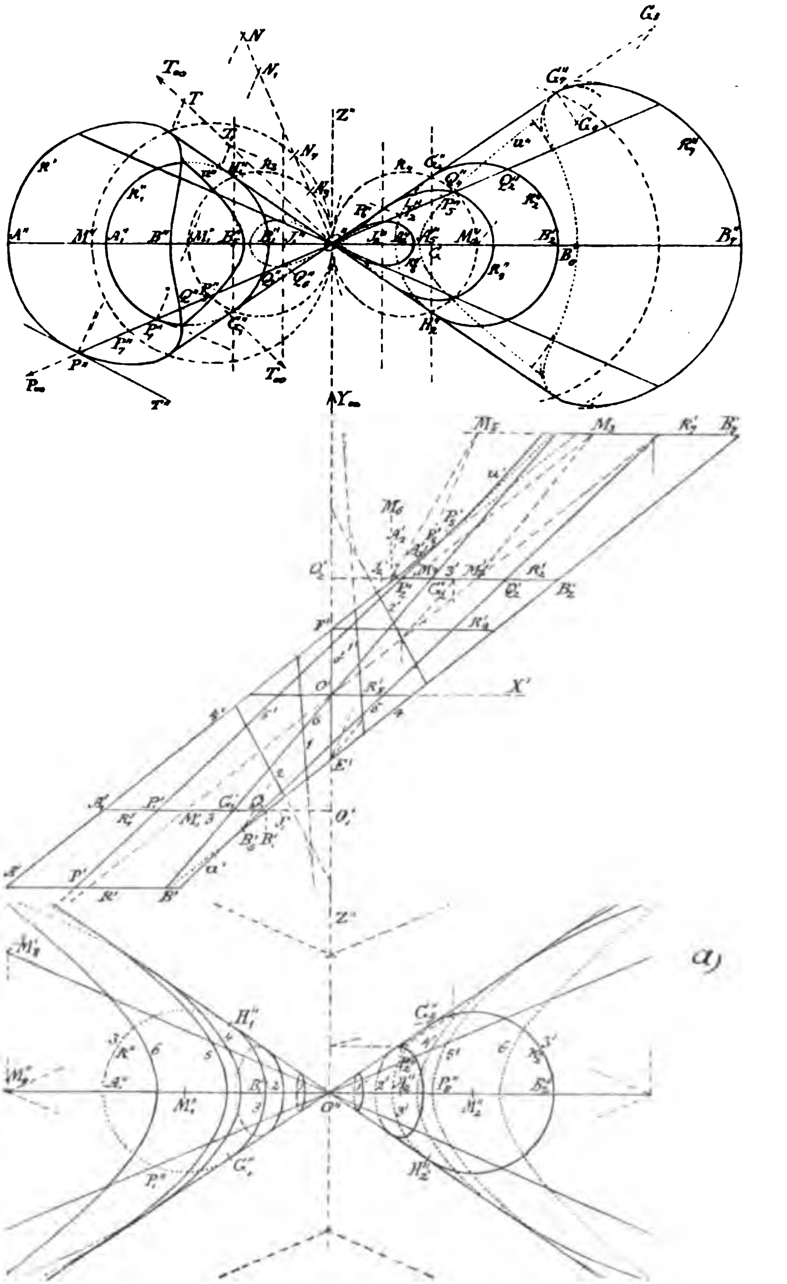


Fig. 180, Fig. 181. Ebenen; dieselben projiciren sich im Aufriß als Gerade. Eine solche schneidet den einen Kreis in den Punkten $P_1$, $Q_1$, den andern in $P_2$, $Q_2$. Die Verbindungslinien eines der ersteren mit einem der letzteren Punkte schneiden alle drei Leitlinien. Zwei davon $P_1 Q_2$ und $Q_1 P_2$ gehen durch den Mittelpunkt $O$ von $O_1 O_2$ und bestimmen daher einen Kreiskegel mit dem Mittelpunkte $O$, den wir aber von der Fläche ausschließen wollen; die beiden anderen $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$ sind Erzeugende unserer Fläche, und zwar mit einander parallele, und wir wollen solche ein Paar nennen.

Da die Kreise ihre beiden unendlich fernen Punkte gemein haben, so ist die Ordnung der Gesamtfläche = 6 (388); und indem man jenen Kegel $O$ ausschließt, ergibt sich die *Ordnung der Wölbfläche* = 4.

**439.** *Kanten* sind zunächst die in der Hauptebene liegenden Erzeugenden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, mit Berührungsebenen $\perp \mathbf{P}_1$. Sie schneiden die gerade Leitlinie $o$ in *Kuspidalpunkten* $E$ und $F$. In Fig. 180 ist die Strecke $E.F$ reelle Doppelgerade und die Strecke $FE$ isolirte Gerade der Fläche, in Fig. 181 umgekehrt.

Die anderen Kanten liegen in den durch $o$ berührend an $k_1$ und $k_2$ gelegten Ebenen, und sie sind nur in Fig. 181 reell; sie enthalten die Kanten $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$. Jede dieser Kanten ist zu ihrer Nachbarerzeugenden parallel, weil beide ein Erzeugendenpaar bilden. Die Kuspidalpunkte derselben liegen daher im Unendlichen.

Der *Richtkegel* ist vom zweiten Grade. Denn die unendlich ferne Ebene enthält eine Doppelkurve der Fläche, weil die Erzeugenden paarweise parallel sind; diese Kurve unserer Fläche vierter Ordnung ist daher von der zweiten Ordnung. Geometrisch erkennt man aber auch leicht die Gestalt des Richtkegels, dessen Spitze wir in $O$ annehmen und dessen Spur wir auf beiden Kreisebenen bestimmen wollen. Es leuchtet nämlich ein, daß die Länge $OP_3$ einer Erzeugenden des Kegels zwischen $O$ und einer Kreisebene halb so groß ist, als die Länge der zu ihr parallelen Erzeugenden der windschiefen Fläche zwischen beiden Kreisebenen, oder im Aufriß $O''P_3''$ $= \frac{1}{2} P_2''P_1''$; und da $Q_1''O'' = \frac{1}{2} Q_1''P_2''$, ergibt sich durch Addition $Q_1''P_3'' = \frac{1}{2} Q_1''P_1''$, d. h. die Spur des Richtkegels in der Ebene eines Leitkreises ist der Ort des Mittelpunktes $P_3''$ einer durch $O''$ gezogenen Sehne dieses Leitkreises, also auch der Ort des Fußpunktes der aus dem Mittelpunkte $M_1''$ auf die Sehne gefällten Senkrechten; daher ist er ein Kreis $k_3$, dessen Durchmesser $O''M_1''$ ist. Die andere Spur ist der Kreis $k_4 = O''M_2''$. — Eine Erzeugende des Richtkegels ist mit den beiden Erzeugenden eines Paares parallel, so $P_3 O Q_4$ mit $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$. — Man bemerkt, daß in Fig. 181

der Teil $G_1 M_1 H_1$ der Kegelspur und der zugehörige Teil des Richtkegels nützlich, der Teil $H_1 O_1 G_1$ parasitisch ist. In Fig. 180 ist der ganze Kegel nützlich.

**440.** Um die *Berührungsebene in einem Punkte P der Fläche* zu bestimmen, beachte man, daß dieselbe schon für je vier Punkte der durch $P$ gehenden Erzeugenden bekannt ist, nämlich für die Punkte $P_1$, $P_2$ der Leitkreise, den Punkt $(O)$ der Leitgeraden $o$ und den unendlich fernen Punkt $P_\infty$ (durch den Richtkegel). Das schon durch drei Berührungsebenen, etwa in $P_1$, $(O)$, $P_\infty$, bestimmte Büschel ist aber mit der Reihe der Berührungspunkte projektiv, so daß die Berührungsebene in $P$ dem Punkte $P$ der Reihe entspricht. Die Spuren jener drei Berührungsebenen in einer $\parallel \mathbf{P}_2$ durch einen geeigneten Punkt, etwa $P_2$, der Erzeugenden gelegten Ebene schneiden die durch $O''$ parallel zur Tangente $P_3 T_\infty$ des $k_3$ ($T_\infty$ deren unendlich ferner Punkt) gelegte Gerade $O'' T_\infty$ bezw. in den Punkten $T_1$ ($P_2'' T_1 \parallel$ Tangente des $k_1$ in $P_1$), $O''$ (da die Berührungsebene in $(O)$ die Gerade $o$ enthält), $T_\infty$. Die projektiven Reihen $P_1 O'' P_\infty$, $T_1 O'' T_\infty$ sind aber perspektiv, da in $O''$ entsprechende Punkte vereinigt sind, und ähnlich, da die unendlich fernen Punkte $P_\infty$ und $T_\infty$ sich entsprechen. Dem Punkte $P$ der ersteren Reihe entspricht daher $T$ der letzteren, wenn $PT \parallel P_1 T_1$ gezogen wurde; daher ist die gesuchte Tangente $P'' T'' \parallel P_2'' T$.

**441.** *Der Umriß u'* der ersten Projektion besteht aus den zwei Kanten $A_1' A_2'$ und $B_1' B_2'$ und aus einer krummen Linie. Man könnte den Umrißpunkt einer jeden Erzeugenden als den Berührungspunkt der ersten projicirenden Ebene derselben nach dem umgekehrten Verfahren der vor. Nr. bestimmen. Es läßt sich aber auch leicht die Gestalt des scheinbaren Umrisses als eine *Hyperbel* erkennen, indem man sich überzeugt, daß die von diesem Umrisse eingehüllten Projektionen der Erzeugenden auf den Geraden $A_1' B_1'$ und $A_2' B_2'$ gewisse projektive Punktreihen erzeugen. Man suche die Polare $G_1 H_1$ von $O_1$ zu dem Leitkreise $k_1$, und die Polare $G_2 H_2$ von $O_2$ zu $k_2$; in Fig. 181 erhält man sie durch die Tangenten aus $O''$, (welche Kanten der Fläche darstellen (439) und deren Berührungspunkte $G_1, G_2$ und $H_1, H_2$ sind, wobei $G_2'' H_2''$ die Axe $M_1'' M_2''$ in $G$ trifft; in Fig. 180 dagegen gehen die Polaren durch die Schnittpunkte der Kreistangenten in $C''$ und $D''$ mit der $M_1'' M_2''$, so durch $G$. Die Polaren haben zur ersten Projektion die Punkte $G_1'$ und $G_2'$. Ein durch $O''$ gehender Strahl stellt aber die beiden Erzeugenden eines Paares dar, so $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$. Es sind dabei die Punkte $P_1''$, $Q_1''$ des Kreises $k_1''$ durch den Punkt $O''$ und dessen Polare $G_1'' H_1''$ harmonisch getrennt, daher bilden die ersten Pro-

Fig. 180, Fig. 181. jektionen jener vier Punkte, nämlich $O_1'G_1'P_1'Q_1'$ vier harmonische Punkte; und das Gleiche gilt von $O_2'G_2'P_2'Q_2'$. Daher bilden $P_1'$ und $Q_1'$, sowie $P_2'$ und $Q_2'$ je ein Punktepaar einer ungleichlaufenden Involution mit $O_1'$, $G_1'$, bezw. $O_2'$, $G_2'$ als Doppelpunkten; demnach ist die Reihe der $P_1'$ mit derjenigen der $Q_1'$ projektiv; und da außerdem die Reihe der $P_2'$ mit derjenigen der $Q_1'$ kongruent ist, so sind auch die Reihen der $P_1'$ und der $P_2'$ projektiv, d. h. die Erzeugenden $P_1'P_2', \ldots$ beschreiben auf $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ projektive Punktreihen, werden also von einem Kegelschnitte eingehüllt. Durch die zugeordneten Punkte $P_1'$, $Q_1'$ der bezeichneten Involution gehen zwei parallele Tangenten jenes Kegelschnittes; $O_1'$ und $G_1'$ sind aber die Doppelpunkte der Involution; die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden sind daher zwei zusammenfallende parallele Tangenten des Kegelschnitts, was nur bei den Asymptoten der Hyperbel möglich ist. Daher ist der *erste scheinbare Umriß u' der Fläche eine Hyperbel* und $O_1'O_2'$, $G_1'G_2'$ sind ihre *Asymptoten*. — $O_1'G_1'$ und $O_2'G_2'$ sind Tangenten der Hyperbel und ihre Berührungspunkte liegen in den Mitten $J_1'$ und $J_2'$ der bezeichneten von den Asymptoten eingeschlossenen Strecken. Ebenso liegen die Berührungspunkte $A_5'$, $B_5'$, $P_5'$ ... der Kanten und einer beliebigen Erzeugenden in der Mitte der auf ihnen von den Asymptoten eingeschlossenen Strecken. $A_5'$ und $B_5'$ bilden die Grenze von *nützlichen und parasitischen Stücken* der Umrißhyperbel. In Fig. 181 stellen $G_1G_2$ und $H_1H_2$ die beiden reellen Kanten der Fläche dar, welche Asymptoten aller Umrißlinien (386) und so auch jener Hyperbel sind, in Fig. 180 dagegen sind diese Kanten imaginär und daher diese Asymptoten der Hyperbel parasitisch. Umgekehrt ist die Leitgerade $O_1O_2$, welche die andere Asymptote des Umrisses bildet, in Fig. 180 mit ihrem unendlichen Stücke $E'.F'$ nützlich und ebenso die Asymptote; in Fig. 181 dagegen ist dieses Stück parasitisch. — Beide Figuren sind so bemessen, daß die Umrißhyperbeln kongruent sind, während die übereinstimmenden Asymptoten in Bezug auf das Parasitische entgegengesetzte Rollen spielen. Die Grenzen der parasitischen Stücke stimmen übrigens nicht überein.

**442.** *Die zweite Projektion* $u'' = A_5''B_5''P_5''$ *des ersten Umrisses* läßt sich aus der ersten Projektion $u'$ leicht bestimmen. Wir wollen nachweisen, daß sie ebenfalls ein Kegelschnitt ist, welcher sich sowohl mit $k_1''$ als mit $k_2''$ in perspektiver Lage befindet, und daß $O''$ den Mittelpunkt, und die mit $O''Z''$ Parallelen $J_1''Q_6''$ bezw. $J_2''P_6''$ die Axen der Kollineation bilden, wenn diese Linien in der Mitte zwischen dem Punkte $O''$ und bezw. seinen Polaren $G_1''H_1''$ zu $k_1$ und $G_2''H_2''$ zu $k_2$ liegen. Es sind nämlich $Y_\infty$

$(O_2' P_2' J_2' P_5')$ vier harmonische Strahlen (Fig. 181 ist hierbei deutlicher), wobei $Y_\infty$ der unendlich ferne Punkt der Asymptote $O_1' O_2'$ der Hyperbel $u'$, $J_2'$, $P_5'$ die Berührungspunkte der $A_2' B_2'$ und der $P_1' P_2'$ mit der $u'$, und $P_2'$ der Schnittpunkt der beiden letzteren Geraden sind. Denn es ist $P_2'$ der Pol von $J_2' P_5'$ zu $u'$, daher ist der Schnittpunkt der $J_2' P_5'$ mit der $Y_\infty O_2'$ der Pol der $Y_\infty P_2'$, demnach werden $J_2'$ und $P_5'$ durch diesen Schnittpunkt und seine Polaren $Y_\infty P_2'$ harmonisch getrennt, woraus die Behauptung folgt. Diese vier Strahlen schneiden daher im Aufriß auf der Erzeugenden $P_1'' P_2''$ die vier harmonischen Punkte $O'' P_2'' P_6'' P_5''$ ein. Bewegt sich nun die Erzeugende $P_1 P_2$, so bleiben $O$ und $J_2$ unverändert; daher bleibt $O''$ an der Stelle, $P_6''$ beschreibt die Gerade $J_2' J_2'' P_6''$, $P_2''$ beschreibt den Kreis $k_2''$, und $P_5''$ die Kurve $u''$. Da nun das Doppelverhältnis $(O'' \, P_2'' \, P_6'' \, P_5'') = -1$ ist, so ist auch dasjenige $(O'' P_6'' P_2'' P_5'')$ unveränderlich. Daher ist $u''$ eine mit $k_2''$ perspektiv-kollineare Kurve, also ein Kegelschnitt, mit $O''$ als Mittelpunkt, $J_2' J_2'' P_6''$ als Axe der Kollineation, und mit der Charakteristik $\delta = (O'' P_6'' P_2'' P_5'') = 2$. Man erhält diesen Wert, wenn man $O'' P_2''$ nach $O'' Z''$ dreht, wodurch $P_6''$ ins Unendliche und sein harmonisch zugeordneter Punkt $P_5''$ in die Mitte von $O'' P_2''$ rückt (mag $P_2''$ ein Punkt der $k_2''$ sein oder nicht), so daß $O'' P_2'' = 2 . O'' P_5''$ wird. Dann ist nämlich

$$\delta = \frac{O'' P_2''}{P_2'' P_6''} : \frac{O'' P_5''}{P_5'' P_6''} = \frac{O'' P_2''}{O'' P_5''} = 2 .$$

Dem Punkte $G$ (statt $P_2''$) im ebenen Systeme von $k_2''$ entspreche $G_8$ (statt $P_5''$) in dem von $u''$; indem dann $J_2''$ an die Stelle von $P_6''$ tritt, muß auch die Reihe $O'' G J_2'' G_8$ harmonisch sein; und da $J_2''$ in der Mitte von $O'' G$, so muß $G_8$ im Unendlichen liegen. Daher entspricht der $G G_2'' H_2''$ die unendlich ferne Gerade; und da $O''$ der Pol der ersteren zu $k_2''$, so ist $O''$ auch der Pol der unendlich fernen Geraden zu $u''$, oder dessen *Mittelpunkt*. $A_5'' B_5''$ als (reelle) Symmetrielinie ist eine reelle Axe des $u''$, während die andere Axe in Fig. 180 reell, in Fig. 181 imaginär ist, da sie den $k_2''$ bezw. reell und imaginär schneidet. Daher ist $u''$ in Fig. 180 eine *Ellipse*, deren zweite Axe $C_5'' D_5'' = \frac{1}{2} C'' D''$, in Fig. 181 eine *Hyperbel*, deren *Asymptoten* die aus $O''$ an $k_2''$ gezogenen Tangenten $G_1'' G_2''$, $H_1'' H_2''$ sind. In Fig. 180 muß der Punkt $C_5$ als der unendlich ferne Berührungspunkt der Fläche mit einer zugleich auf $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ senkrechten Ebene angesehen werden, welche durch die Erzeugende geht, deren Aufriß $C''$ ist; ebenso $D_5$ in Bezug auf $D''$. $C_5''$ und $D_5''$ sind daher die zweiten Projektionen zweier Asymptoten des ersten Umrisses, und diese fallen nicht mit den Erzeugenden $(C'', D'')$

Fig. 180, Fig. 181. zusammen, wie es bei Kanten mit unendlich fernem Kuspidalpunkte der Fall sein würde.

Die *erste Umrißlinie ist von der vierten Ordnung*, weil sie der Schnitt zweier projicirenden Cylinder von der zweiten Ordnung ist.

**443.** *Schnittlinien mit Ebenen, die parallel zu den Ebenen der Leitkreise liegen*, lassen sich aus der ersten Projektion leicht konstruiren; eine solche ist $APB$. Sie ergibt sich aber auch unabhängig von der ersten Projektion vermittelst des Schnittpunktes $(M', M'')$ der schneidenden Ebene $A'B'$ mit der Geraden $M_1M_2$. Der Richtkegel nämlich, welcher die Ebene $A_1'B_1'$ in dem Kreise $O''M_1''$ trifft, schneidet die Ebene $A'B'$ in dem Kreise $O''M''$; auf einer beliebigen Erzeugenden ist daher das zwischen diesen beiden Kreisen enthaltene Stück $P_8''P_7''$ auch zwischen beiden Ebenen $A_1'B_1'$ und $A'B'$ eingeschlossen, und daher auch gleich dem zwischen denselben Ebenen liegenden Stücke $P_1''P''$ der parallelen Erzeugenden unserer windschiefen Fläche. Es ist daher für die Schnittkurve

$$O''P'' - O''P_1'' = O''P_7'' - O''P_8'',$$

oder

$$O''P'' = O''P_7'' + O''P_1'' - O''P_8'', \qquad (1)$$

$$O''P'' = O''P_7'' + P_8''P_1'';$$

ebenso

$$O''Q'' = O''P_7'' - P_8''P_1''.$$

Die Kurve ist daher eine *verallgemeinerte Konchoide* mit $O''$ als Pol und den drei Kreisen $O''M''$, $A_1''B_1''$, $O''M_1''$ als Grundkurven (174), von denen man die erste und dritte auf einen durch $O''$ gehenden Kreis, dessen Durchmesser $= M_1''M''$ ist, zurückführen könnte. Die Subnormale der Konchoide ist gleich der algebraischen Summe der entsprechenden Subnormalen der Grundkurven. Zieht man nun die $O''N \perp O''P''$, so ergeben sich auf ihr die Subnormalen der drei Grundkurven, welche in der Reihenfolge wie in der Gleichung (1) und mit denselben Vorzeichen verbunden die Subnormale $O''N$ liefern

$$O''N = O''N_7 + O''N_1 - O''N_8$$
$$= O''N_7 + N_8N_1.$$

Hieraus ergibt sich die *Normale* $P''N$ und die schon in Nr. 440 auf andere Weise konstruirte Tangente $P''T''$.

Für die wechselnden Schnittebenen treten *verschiedene Gestalten* unserer Schnittkurven auf. Für den Fall der Fig. 180 besitzt sie in der Mitte $O$ eine brillenartige oder eine zusammengedrückt ellipsenartige Gestalt $k_8$, geht in $O_1$ und $O_2$ in die Leitkreise über; in den Kuspidalpunkten $E$, $F$ erhält sie, wie $k_9$, eine Spitze (in $O''$),

sodann als $k$ eine Schleife mit dem Doppelpunkte $O''$, und wird im Unendlichen der doppelt zu zählende Kreis des Richtkegels. — In der Fig. 181 wird sie für $O$ eine Schleife $k_8$ mit $O''$ als Doppel- und Mittelpunkt, für die Kuspidalpunkte $E, D$ eine Kurve $(k_9)$ mit einer Spitze in $O''$, dann einer der Leitkreise, dann eine bohnenförmige Kurve $k$ oder $k_7$, die im Unendlichen in einen doppelt zu rechnenden Teil des Kreises des Richtkegels übergeht.

**444.** Wir wollen noch die *Krümmungshalbmesser unserer Schnittkurven* $k$ in mehreren ausgezeichneten Punkten bestimmen, zunächst in den *Scheiteln*, so in $A''$ der Fig. 180 und in $B_7''$ der Fig. 181. Führen wir dies aus durch Vergleichung des Krümmungskreises von $k_7''$ in $B_7''$ mit demjenigen von $k_2''$ (Kreis) in $B_2''$ (Fig. 181). Seien bezw. $r', r$ die Krümmungshalbmesser beider Kurven, $x', z'$ und $x, z$ die Koordinaten der zu $B_7'', B_2''$ benachbarten auf derselben Erzeugenden liegenden Punkte, mit $B_7''$ und $B_2''$ als Ursprung, so ist

$$r' = \frac{z'^2}{2x'}, \qquad r = \frac{z^2}{2x}.$$

Es wird aber im Grundriß $x$ auf $x'$ aus $B_5'$ (dem ersten Umrißpunkte der $B_1 B_2$), und im Aufriß $z$ auf $z'$ aus $O''$ projicirt; daher ist

$$x' = x \frac{B_5' B_7'}{B_5' B_2'}, \qquad z' = z \frac{O'' B_7''}{O'' B_2''} = z \frac{E' B_7'}{E' B_2'}.$$

Hieraus folgt

$$r' = \frac{z^2}{2x}\left(\frac{E' B_7'}{E' B_2'}\right)^2 \frac{B_5' B_2'}{B_5' B_7'} = r \left(\frac{E' B_7'}{E' B_2'}\right)^2 \frac{B_5' B_2'}{B_5' B_7'}.$$

Diese Formel wird konstruirt, da $r = B_2' M_2'$, indem man $E' M_2'$ bis $M_3$ auf $k_7'$ zieht, $M_3 M_4 \parallel B_1' B_2'$ bis $M_4$ auf $k_2'$, $E' M_4$ bis $M_5$ auf $k_7'$, $M_5 B_5'$ bis $M_6$ auf $k_2'$; dann ist $r' = B_7'' B_0 = B_2' M_6$. Entsprechend wird in Fig. 180 $r = A'' A_0 = A_1' M_6$ durch Benutzung von $F'$ und $A_5'$ gewonnen.

Den Krümmungshalbmesser $G_7'' G_0$ der $k_7''$ *in dem Berührungspunkte* $G_7''$ *der Umrißerzeugenden des Aufrisses* (Fig. 181) ermitteln wir ebenfalls durch Vergleichung der $k_7''$ mit dem Kreise $k_2''$. Der dem gemeinschaftlich berührenden Strahle $O'' G_2'' G_7''$ benachbarte Strahl schneidet gleiche Sehnen bei beiden Kurven ab; die Pfeilhöhen $(x)$ der darüberliegenden Bogen verhalten sich aber wie $O'' G_7'' : O'' G_2''$, die Krümmungshalbmesser daher umgekehrt wie diese Strecken (208), so daß gilt

$$G_7'' G_0 = G_2'' M_2'' \frac{O'' G_2''}{O'' G_7''}.$$

Man trage daher auf $O'' G_7''$ die $G_7'' G_8 = O'' G_2''$ auf, so geht die $M_2'' G_8$ durch $G_0$.

Um noch den Krümmungshalbmesser $r'$ *der mittleren Schnittlinie* $k_3''$ (Fig. 180) *in ihren zweiten Scheiteln* $C''$, $D''$ zu ermitteln, beachten wir, daß auf jedem Strahle aus $O''$ ein Punkt der $k_3''$ in der Mitte einer Erzeugenden zwischen $k_1$ und $k_2$, so $P_3''$ in der Mitte von $P_1''P_2''$, liegt. Überträgt man die Figur mit ihren Buchstaben, aber ohne deren oberen Beistriche, in Fig. *b*), zieht den zu $OC$ benachbarten Strahl $OK$, schneidet ihn mit $k_1$, $k_2$, $k_3$ und deren in $C$ gezogenen Tangenten (die von $k_3$ ist $\perp OC$), bezw. in $K_1$, $K_2$, $K$, $T_1$, $T_2$, $T$, und setzt $CK_1 = CT_1 = CK_2 = CT_2 = y$ (diese Größen $= 0^1$ haben Unterschiede $= 0^2$), $CK = CT = y'$, und die senkrechten Abstände der Punkte $K_1$ und $K$ von den zugehörigen Tangenten $X_1K_1 = x$, $TK = x'$, so ist

Fig. 180, b).

$$r = \frac{y^2}{2x}, \quad r' = \frac{y'^2}{2x'}.$$

Es liegt $K$ in der Mitte von $K_1K_2$; und wenn man $TU_1 \parallel OC$ zieht und mit $CT_1$, $CT_2$ bezw. in $U_1$, $U_2$ schneidet, so erhält man $T$ in der Mitte von $U_1U_2$. Da die Abstände der Punkte $U_1$, $K_1$, $T_1$ von einander, sowie diejenigen von $U_2$, $K_2$, $T_2$ von einander $= 0^2$, die ersteren und die entsprechenden letzteren aber nur um $0^3$ von einander verschieden sind, so ist der Abstand $TK = x'$ gleich der Änderung des Abstandes der Geraden $CT$ von einem Punkte, welcher von $U_1$ nach $K_1$ übergeht, und dabei über $T_1$ schreiten soll. Sei $T_1V_1 \perp TU_1$ gefällt, so ist

$$x' = TK = -U_1V_1 + T_1K_1,$$

wobei die $T_1K_1$ ($= 0^2$) und ihre Projektion auf $OC$ um $0^4$ verschieden sind. Setzt man nun die Winkel der $OC$ mit den Tangenten von $k_1$ und $k_2$ in $C$, welche $= CM_1M_2 = CM_2M_1$ sind, $= \alpha$, so ergibt sich $U_1V_1 = U_1T_1 . \cos\alpha = CT_1(TU_1 : OC)\cos\alpha = y(y\cos\alpha : r\sin\alpha)$ $\cos\alpha = y^2\cos^2\alpha : r\sin\alpha$ und $T_1K_1 = X_1K_1 : \sin\alpha = x : \sin\alpha$, daher

$$x' = -\frac{y^2}{r}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{x}{\sin\alpha} = -2x\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{x}{\sin\alpha} = -x\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Außerdem ist, da $CU_1 = CT_1 = y$,

$$y' = CT = CU_1 . \sin\alpha = y\sin\alpha,$$

daher

$$r' = -\frac{y^2\sin^2\alpha\sin\alpha}{2x\cos 2\alpha} = -r\frac{\sin^3\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Fällt man daher $O1 \perp CM_2$, $12 \perp CO$, so ist $C2 = r\sin^3\alpha$; überträgt man dann $C2$ nach $C3$ auf $CT_2$, zieht $3C' \perp CT_2$ bis $C'$ auf $CT_1$, so ist $r' = -CC'$. Demnach ist der Krümmungshalbmesser für $D'' = D''D_0 = -CC'$. $r'$ ist negativ oder positiv, je

nachdem $\alpha \lesseqgtr 45^0$; im ersteren Falle, wie in der Figur, hat $k_8''$ vier Wendepunkte.

**445.** Bemerkenswert sind noch die *Schnittkurven mit denjenigen auf* $\mathbf{P}_1$ *senkrechten Ebenen, welche eine und dann auch noch eine zweite Erzeugende der Fläche enthalten*, deren erste Projektionen daher die Hyperbel des ersten scheinbaren Umrisses der Fläche berühren. Da die gesamte Schnittlinie von der vierten Ordnung ist, und da diese jene zwei Gerade enthält, so ist der Rest, die gesuchte Schnittkurve, von der zweiten Ordnung. Doch läßt sich auch geometrisch leicht erkennen, *daß die zweiten Projektionen der Schnittkurven Kegelschnitte sind, von welchen irgend zwei zu einander perspektiv liegen mit* $O''$ *als Mittelpunkt und* $O''Z''$ *als Axe der Kollineation.* Fig. 180, Fig. 181.

Nennen wir in den verschiedenen Schnittkurven diejenigen Punkte entsprechend, welche auf derselben Erzeugenden liegen, so befinden sich im Aufriß alle entsprechenden Punkte auf je einem Strahle aus $O''$. Nun werden im Grundriß irgend zwei Tangenten der Umrißhyperbeln von allen anderen Tangenten derselben in projektiven Punktreihen geschnitten. Daher werden auch, wenn man zwei dieser Tangenten als erste Projektionen von Erzeugenden, und alle anderen als erste Projektionen unserer Schnittkurven ansieht, in der zweiten Projektion irgend zwei Erzeugende, das sind zwei Strahlen aus $O''$, von allen Schnittkurven in projektiven Punktreihen geschnitten, und diese Reihen liegen außerdem perspektiv, weil entsprechende Punkte in $O''$ zusammenfallen. Daher gehen alle Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte der zwei Strahlen durch ein und denselben Punkt, und dieser liegt auf $O''Z''$, weil diese Gerade die Grenzlinie der Aufrisse der Schnittkurven ist und daher die Grenzlage der Verbindungslinie zweier entsprechenden und in $O''$ zusammenfallenden Punkte bildet. Da also entsprechende Sehnen der Aufrisse irgend zweier Schnittkurven sich in einem Punkte der $O''Z''$ treffen, so ist $O''Z''$ ihre Kollineationsaxe. Demnach sind die Aufrisse aller Schnittkurven unter einander kollinear; und da einer derselben ein Kreis ist (jeder der beiden Leitkreise), so sind sie alle, und daher auch die Kurven selbst, Kegelschnitte, w. z. b. w.

Von diesen Kegelschnitten sind in Fig. 180 *a*) im Grundriß diejenigen 1, 2 ... 7, 8, 7′ ... 2′, 1′ angegeben, während im Aufriß 3, 4, 3′, 4′ weggelassen wurden; in Fig. 181 *a*) sind in beiden Projektionen 1, 2 ... 5, 6, 5′ ... 2′, 1′ gezeichnet. Von jedem der Kegelschnitte liegt die eine Axe in der Symmetrieebene der Fläche, und deren Scheitel in den Erzeugenden $A_1A_2$ und $B_1B_2$. Die andere

Axe hat zum Grundriß einen Punkt der $M_1'M_2'$ und kann mittelst der durch diesen Punkt gelegten Erzeugenden (Tangente an den hyperbolischen Umriß), wenn diese Erzeugende reell ist, bestimmt werden, wie dies Fig. 180 für 7′ und Fig. 181 für 2′ zeigt. Die Erzeugende gibt nämlich den entsprechenden Punkt des Leitkreises an; in diesem zieht man an sie die Tangente, so ist die durch deren Schnittpunkt mit $O''Z''$ senkrecht zu $O''Z''$ gelegte Gerade die entsprechende Scheiteltangente der Schnittkurve, welche auf der Erzeugenden den Scheitel einschneidet. Alle Kegelschnitte treffen die Kollineationsaxe in denselben beiden reellen oder imaginären Punkten $C''$, $D''$, und alle werden durch die beiden reellen oder imaginären Leitkreistangenten $O''G_1''$, $O''H_1''$ berührt. Ist die Kurve eine Hyperbel, wie die 2 in Fig. 180, die 5′ ($= P_1P_2$) in Fig. 181, so zieht man ihre Asymptoten aus ihrem Mittelpunkte $M_3$ parallel zu den beiden Flächenerzeugenden der Schnittebene, wobei zu beachten, daß die zu ihnen parallelen Erzeugenden (wie $Q_1Q_2$) die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve liefern. Die Erzeugenden der Schnittebene selbst schneiden die Schnitthyperbel in Punkten des Grundrißumrisses $u$. Es sind nun die Asymptoten reell, und es ist die Schnittkurve eine *Hyperbel*, wenn die Schnittebene zwei reelle Erzeugende enthält, sie ist eine *Ellipse* oder *Parabel*, wenn sie bezw. keine reellen oder zwei zusammenfallende Erzeugende enthält. Der letztere Fall tritt für $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ ein, bei 5 und 5′ der Fig. 180 und bei 4 und 4′ der Fig. 181.

*Übungsaufg. Für die Wölbfläche des schrägen Durchgangs die Striktionslinie und die Umrißlinie zu ihrer Projektion auf die Kreuzrißebene zu konstruiren,* d. i. für die parallel zur Leitgeraden und senkrecht zur Symmetrieebene der Fläche gelegte Ebene.

## VIII. Die windschiefe Schraubenfläche.

### a) Die Schraubenfläche und die Regelschraubenfläche im allgemeinen.

**446.** Eine *Schraubenfläche* wird von einer Linie $e$ erzeugt, welche eine Schraubenbewegung vollführt, oder auch von einer Linie $e$, welche mit einer Schraubenlinie eines Umdrehungscylinders fest verbunden ist, während sich diese in sich selbst bewegt. Wir haben gesehen (344), daß dabei alle Punkte der Erzeugenden $e$ Schraubenlinien von derselben Axe, derselben Ganghöhe $h$ und demselben Sinne der Windung beschreiben. Die Schnittlinie der Schraubenfläche mit einer durch die Axe gehenden Ebene heißt ihre *Meridian-*

*kurve*, ihre Schnittlinie mit einer zur Axe senkrechten Ebene ihre *Normalkurve*. Jede dieser Linien, sowie jede andere Linie der Fläche, welche alle ihre Schraubenlinien trifft, kann als Erzeugende angesehen werden und durch Schraubenbewegung die Fläche erzeugen. Es ergibt sich daraus, daß alle Meridiankurven nnter einander und alle Normalkurven unter einander kongruent sind, da sie als Erzeugende in einander übergehen.

Eine Schraubenfläche heißt *geschlossen*, wenn ihre Axe von der Erzeugenden $e$ getroffen wird, sonst *offen*. Bei der ersteren gehört die Axe zur Fläche, bei der letzteren nicht; im letzteren Falle erzeugt der der Axe zunächst liegende Punkt der Erzeugenden die Schraubenlinie vom kleinsten Halbmesser, die s. g. *Kehlschraubenlinie*.

**447.** Kann eine Schraubenfläche durch eine Gerade als Erzeugende $e$ entstehen, so ist sie eine *Regelfläche* und heißt *Regelschraubenfläche*; sie ist *im allgemeinen windschief*. Man nennt sie *rechtwinklig* oder *schiefwinklig*, oder kürzer *gerade* oder *schief*, je nachdem $e$ senkrecht oder geneigt zur Axe $a$ steht. Ist $r$ der kürzeste Abstand der $e$ von der $a$, also der Halbmesser der Kehlschraubenlinie, so ist die Neigung $\sigma$ ($< 90^0$) derselben gegen die (zur Axe senkrechte) Normalebene durch

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{h}{2\pi r} = \frac{h_0}{r}$$

(335) ausgedrückt. Bezeichnet man andererseits mit $\varepsilon$ ($< 90^0$) die Neigung der Erzeugenden gegen die Normalebene, so ergibt sich die Fläche als *abwickelbar*, wenn $\sigma = \varepsilon$ ist, indem dann die Erzeugenden Tangenten der Kehlschraubenlinie sind.

Da die Benennungen „gerade“ und „schief“ nur auf *Regelschraubenflächen* anwendbar sind, so heißt eine solche Fläche:

1) eine *geschlossene gerade Schraubenfläche* (oder axial-normale), auch *Wendelfläche*, wenn $r = 0$, $\varepsilon = 0$,

2) eine *geschlossene schiefe Schraubenfläche*, wenn $r = 0$, $\varepsilon > 0$,

3) eine *offene gerade*, wenn $r > 0$, $\varepsilon = 0$,

4) eine *offene schiefe*, wenn $r > 0$, $\varepsilon > 0$; dabei ist sie *abwickelbar*, wenn $\varepsilon = \sigma$.

**448.** Suchen wir zu der *allgemeinen Regelschraubenfläche*, also zur offenen schiefen, die asymptotische Fläche und die Striktionslinie. Der *Richtkegel* derselben ist ein Umdrehungskegel, dessen Axe zu $a$ parallel läuft. Stehe von der Schraubenfläche die Axe Fig. 182.
$a\,(M', a'') \perp \mathrm{P}_1$, sei $e_1$ $(e_1', e'')$ eine zu $\mathrm{P}_2$ parallele Erzeugende, $\varepsilon$ ihre Neigung gegen die Normalebene $\mathrm{P}_1$, $M'B_1' = r_1$ ihr Halbmesser, $B_1A_1$ $(B_1'A_1', B''A_1'')$ die Kehlschraubenlinie, so mag vom

Richtkegel die Axe $a$, die Spitze $(M', B'')$, die zu $e_1$ parallele Erzeugende $(M'E_0', B''E'')$ sein. Die Berührungsebene des Richtkegels nach dieser Erzeugenden ist parallel zur Berührungsebene der Schraubenfläche in dem unendlich fernen Punkte der parallelen Erzeugenden $e_1$, und da sie die $e_1$ selbst enthält, ist sie die *asymptotische Ebene* für $e_1$. Zieht man in dieser Ebene Parallele zu $e_1$, wie $e_2, e, \ldots$ welche von $a$ die Abstände $r_2, r, \ldots$ besitzen, und läßt sie Schraubenbewegungen, übereinstimmend mit derjenigen von $e_1$, ausführen, so beschreibt jede eine Schraubenfläche, darunter die $e$ eine abwickelbare, wenn, wie hier, ihr Halbmesser

$$r = \frac{h}{2\pi \operatorname{tg} \varepsilon}$$

ist. Jene asymptotische Ebene ist von allen beschriebenen Schraubenflächen die asymptotische Ebene für ihre Erzeugenden $e_2 \ldots$, und von der abwickelbaren die Berührungsebene für $e$. Da bei der gemeinsamen Schraubenbewegung von $e_1, e_2, e \ldots$, alle diese Gerade in jeder Lage stets in derselben, die abwickelbare Fläche berührenden Ebene liegen, so ist die letztere die *asymptotische* (*abwickelbare*) *Fläche* aller beschriebenen windschiefen Schraubenflächen (383).

Die *Centralebene* der Fläche für $e_1$ steht senkrecht auf der asymptotischen Ebene (384), ist daher die erste projicirende Ebene der $e_1$. Dieselbe enthält die Tangente der Kehlschraubenlinie in $B_1$, berührt daher die Fläche in diesem Punkte, so daß derselbe der *Centralpunkt* von $e_1$ ist. *Die Striktionslinie einer Regelschraubenfläche liegt daher in ihrer Kehlschraubenlinie*, und wird bei der geschlossenen Fläche zur *Axe*.

**449.** *Aufg. Von der offenen schiefen Schraubenfläche die Normalkurve zu konstruiren.*

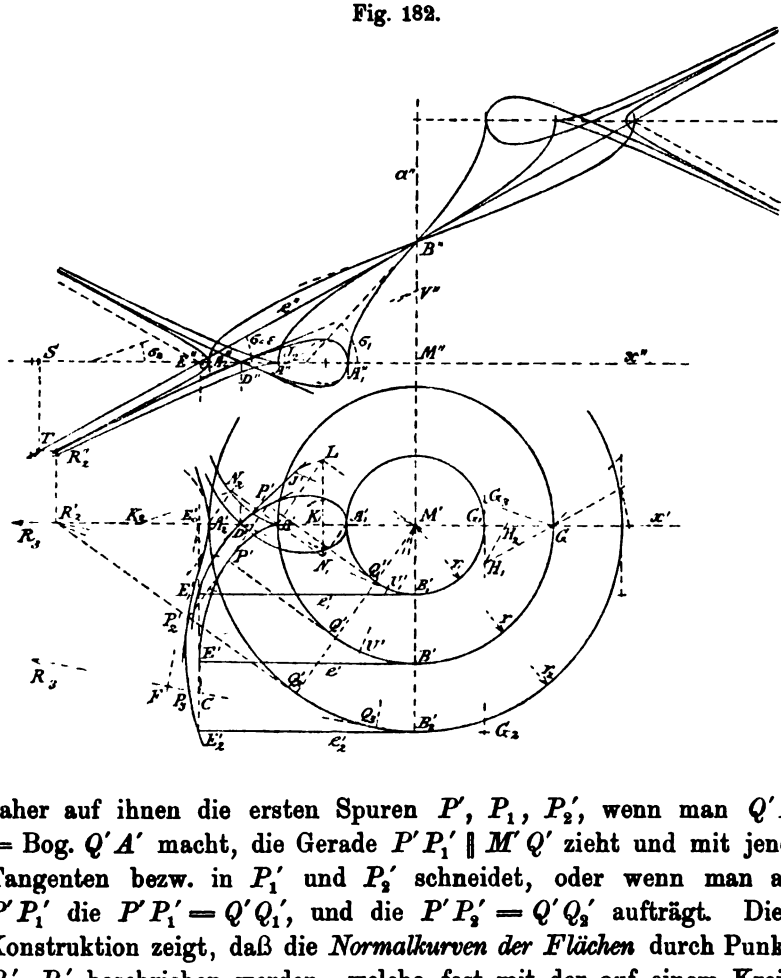
Fig. 182. *Aufl.* Wir wollen unter den Annahmen der vor. Nr. gleichzeitig drei Schraubenflächen betrachten, für welche gilt

$$h = 2\pi r \operatorname{tg} \varepsilon, \qquad r_1 < r < r_2.$$

Von den rechtsgewundenen Kehlschraubenlinien seien $B_1 A_1$, $BA$, $B_2 A_2$ die von $B''$ abwärts gerichteten Viertelsgänge, durch deren untere Enden $A_1, A, A_2$ die $\mathrm{P}_1$ gelegt sei. Als *Normalkurven* werden die ersten Spuren der Flächen konstruirt. Von der abwickelbaren Fläche $(a, e)$ ist die erste Spur die *Kreisevolvente* $A'E'$ (344), und man erhält einen Punkt $P'$ derselben, wenn man an den Kreis $(M', r)$ in $Q'$ die Tangente $Q'P'$ zieht und $Q'P' =$ Bog. $Q'A'$ macht; ebenso ist Tangente $B'E' =$ Bog. $B'A'$. In Bezug auf die anderen Flächen beachte man, daß bei der gemeinschaftlichen

Schraubenbewegung der fest verbundenen Erzeugenden $e$, $e_1$, $e_2$ die Berührungspunkte derselben mit den zugehörigen Kehlschraubenlinien, wie $B$, $B_1$, $B_2$, auf einer die $a$ senkrecht schneidenden Geraden, und sie selbst in ein und derselben Ebene bleiben. Sind im Grundriß $Q'$, $Q_1'$, $Q_2'$ drei solche zusammengehörige Berührungspunkte, die also mit $M'$ auf einer Geraden liegen, so sind die Erzeugenden Senkrechte zu dieser Geraden in jenen Punkten, und ihre ersten Spuren liegen in einer zu der Geraden $M'Q'$ parallelen Geraden, der ersten Spur der Ebene der Erzeugenden. Man erhält

Fig. 182.




daher auf ihnen die ersten Spuren $P'$, $P_1$, $P_2'$, wenn man $Q'P' =$ Bog. $Q'A'$ macht, die Gerade $P'P_1' \parallel M'Q'$ zieht und mit jenen Tangenten bezw. in $P_1'$ und $P_2'$ schneidet, oder wenn man auf $P'P_1'$ die $P'P_1' = Q'Q_1'$, und die $P'P_2' = Q'Q_2'$ aufträgt. Diese Konstruktion zeigt, daß die *Normalkurven der Flächen* durch Punkte $P_1'$, $P_2'$ beschrieben werden, welche fest mit der auf einem Kreise abrollenden Tangente verbunden sind, daß sie also die *verschlungene oder geschweifte Kreisevolvente* bilden, je nachdem $r_1$ oder $r_2 <$ oder $> r$ ist (327—330). Daher gehen ihre Normalen in $P'$, $P_1'$, $P_2'$ alle durch

$Q'$ (308), und man kann nach Nr. 309 und 310, 6), Fig. 135 die *Krümmungsmittelpunkte* bestimmen. Indem wir denselben für $A_1'$ bestimmen wollen, müssen wir ihn vorher für einen außerhalb $A'A_1'$ liegenden, sonst aber beliebigen Punkt ermitteln. In Fig. 135 ist dies der Punkt $P$; denselben rücken wir zweckmäßig auf der dort willkürlich durch $A$ gezogenen Geraden $AP$ ins Unendliche. Da auch $M'$ als Krümmungsmittelpunkt der rollenden Geraden ins Unendliche fällt, so gilt dies auch von $N$, und $K$ rückt in den Fußpunkt $K''$ der von $M$ auf $AP$ gefällten Senkrechten. Daher ziehe man in Fig. 182 durch $A'$ die beliebige Gerade $A'L$, ferner $M'L \perp A'L$, $A'N_1 \perp A'L$, $A_1'N_1 \parallel A'L$; dann schneidet $LN_1$ die $A'A_1'$ im Krümmungsmittelpunkte $K_1$ für $A_1'$. Entsprechend findet man $K_2$ zu $A_2'$ mittelst $L$ und $N_2$.

Da auch $Q_1'P_1' = Q_2'P_2' = Q'P' =$ Bog. $Q'A'$, und da $Q'A' = \varkappa_1 . Q_1'A_1' = \varkappa_2 . Q_2'A_2'$, wenn $\varkappa_1 = r : r_1$, $\varkappa_2 = r : r_2$ unveränderlich (und zwar in unserem Falle $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 < 1$), so gilt auch

$$Q_1'P_1' = \varkappa_1 . Q_1'A_1', \qquad Q_2'P_2' = \varkappa_2 . Q_2'A_2'.$$

*Daher entstehen diese Kurven auch, wenn man auf jeder Tangente eines Kreises die Bogenlänge zwischen dem Berührungspunkte und einem festen Punkte des Kreises, multiplicirt mit einer unveränderlichen Zahl $\varkappa$, aufträgt, und zwar die gemeine, verschlungene oder geschweifte Kreisevolvente, je nachdem $\varkappa = 1, > 1, < 1$.*

**450.** *Aufg. Von der offenen schiefen Schraubenfläche die Meridiankurve zu bestimmen.*

Fig. 182. *Aufl.* Gelten alle Bezeichnungen der vor. Nr., so bestimmt man einen Punkt des (mit $\mathrm{P}_2$ parallelen) Hauptmeridianes, indem man eine Erzeugende $Q_2P_2$ mit der Hauptmeridianebene in $R_2$ schneidet und beachtet, daß der Abstand des $R_2$ von der $\mathrm{P}_1$ $= P_2'R_2' . \operatorname{tg} \varepsilon$ ist. Dieser Abstand ist hier eine Tiefe unter $\mathrm{P}_1$, weil $R_2$ mit $Q_2$ auf entgegengesetzter Seite von der ersten Spur $P_2$ liegt, $Q_2$ aber eine Höhe über $\mathrm{P}_1$ besitzt. Daher trage man auf $x''$ im Sinne des Fallens der $e''$ die $E''S = P_2'R_2'$ auf, ziehe $ST \perp x''$ bis $T$ auf $e''$, $TR_2'' \parallel x''$, $R_2'R_2'' \perp x''$, so schneiden sich die beiden letzteren Linien in einem Punkte $R_2''$ des Meridianes. Auf derselben Geraden $R_2'R_2''$ erhält man Punkte der anderen Kurven, wenn man aus $R_2'$ auch Tangenten an die Kreise $(r)$, $(r_1)$ zieht und ihre Schnittpunkte mit den zugehörigen Normalkurven an der Stelle von $P_2'$ benutzt. Die mit $\mathrm{P}_2$ parallelen Erzeugenden ($e'$, $e_1'$, $e_2'$; $e''$) liefern für die Meridiane der drei Flächen als gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt denjenigen von $e''$; und da die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche $(a, e)$ entlang $e$ Asymptotenebene

der beiden anderen Flächen $(a, e_1)$ und $(a, e_2)$ ist (449), dieselben also im Unendlichen berührt, so ist die zweite Spur dieser Ebene, d. i. $e''$, die Asymptote der drei Meridiankurven.

Die Meridianlinien haben unendlich viele unter einander kongruente Äste. Jeder derselben hat eine Spitze $(A'')$, einen Doppelpunkt $(D')$, oder keines von beiden, vielmehr einen offenen (hyperbelartigen) Verlauf, je nachdem das Gleiche bei dem Normalschnitte auf dem beiderseits sich erstreckenden Viertelsgange stattfindet, also je nachdem $r_1 \overline{\gtrless} r$ oder $\varkappa = r : r_1 \overline{\lessgtr} 1$ ist; die *Fläche* ist dann *abwickelbar*, *verschlungen oder geschweift*, wie wir sie in den letzteren Fällen nennen wollen. *Bei der geschweiften Schraubenfläche schmiegen sich an die hyperbelartige Meridiankurve deren Asymptoten von innen, wie in der Figur, oder von außen, wie bei der Hyperbel, an, je nachdem $r_1 \lessgtr 2r$, oder $\varkappa \gtrless \frac{1}{2}$ ist.* Denn der Punkt $T$ der Asymptote liegt im Inneren oder Äußeren des Meridianastes, je nachdem $TR_2'' \lessgtr 0$ ist, wenn der Sinn $M''E''$ als positiv angenommen wird. Es ist aber $TR_2'' = SE'' + E_0'R_2' = R_2'P_2' - R_2'E_0'$. Um über das Anschmiegen im Unendlichen zu entscheiden, ziehen wir im Grundriß die zu $B_2'E_2'$ benachbarte Erzeugende $Q_3P_3$, welche die $E_0'E'$ und die Hauptmeridianebene bezw. in $C$ und $R_3$ trifft, und auf welche aus $E_0'$ eine Senkrechte mit dem Fußpunkte $F$ gefällt werde, wobei $CF = B_2'Q_3$. Es treten dann jene Fälle ein, je nachdem das zu denkende $TR_3'' = R_3P_3 - R_3E_0' \lessgtr 0$ ist. Der aus $R_3$ durch $E_0'$ gezogene Kreis geht aber durch die Mitte von $FC$ (I, 236, 7)); es ist daher $R_3E_0' = R_3F + \frac{1}{2}FC = R_3F - \frac{1}{2}B_2'Q_3$. Ferner ist $R_3P_3 = R_3F + FP_3$; und da wegen $B_2'Q_3 = CF$ auch $B_2'E_2' = Q_3F$, und andererseits nach der Konstruktion der Kurve $B_2'E_2' - Q_3P_3 = \varkappa \,.\, B_2'Q_3$, daher auch $Q_3F - Q_3P_3 = P_3F = \varkappa \,.\, B_2'Q_3$, so ist auch $R_3P_3 = R_3F - \varkappa \,.\, B_2'Q_3$. Daraus ergibt sich aber $TR_3'' = R_3P_3 - R_3E_0' = -\varkappa \,.\, B_2'Q_3 + \frac{1}{2}B_2'Q_3$, wonach $TR_3' \lessgtr 0$, je nachdem $-\varkappa + \frac{1}{2} \lessgtr 0$ oder $\varkappa \gtrless \frac{1}{2}$ ist, w. z. b. w.

*Die Tangenten der Meridiankurve in ihrem Doppelpunkte $D''$* erhält man aus denen der Normalkurve in $D'$. Die letzteren erhält man, wenn man aus $D'$ eine Erzeugende als Tangente $D'U_1'$ an den Kreis $(r_1)$ zieht und den Halbmesser des Berührungspunktes $U_1'$ über diesen hinaus bis zu $U'$ auf dem Kreise $(r)$ verlängert, dann ist $D'J' \perp D'U'$ eine der Tangenten in $D'$. Die Berührungsebene der Schraubenfläche in $D$ ist nun durch ihre erste Spur $D'J'$ und die Erzeugende $DU_1$ bestimmt und ihr Schnitt $D''V''$ mit der Hauptmeridianebene ist die gesuchte Tangente. Man findet sie,

wenn man in der Berührungsebene die Parallele $M'J'$ zur Erzeugenden $U_1'D'$ bis zu $J'$ in der ersten Spur zieht, die $M'J' = M''J_0$ auf $x''$ aufträgt, und $J_0V'' \parallel e''$ bis $V''$ auf $a''$ zieht; dann ist $D''V''$ bestimmt.

**451.** *Die Krümmungshalbmesser $r_n$ und $r_m$ der Normal- und der Meridiankurve in ihren Scheiteln* lassen sich leicht bestimmen. Für die ersteren ergibt sich dabei eine zweite Konstruktion (449).

Nimmt man $A_1'$ als Ursprung und $A_1'R_3$ als $+x$Axe, zieht in dem um den unendlich kleinen Bogen $r_1\varphi$ von $A_1'$ entfernten Punkte des Kreises $A_1'Q_1'$ die Tangente, und trägt auf ihr die Länge $\varkappa r_1\varphi = r\varphi$ auf, so hat der Endpunkt offenbar die Koordinaten (wobei $\cos\varphi^2 = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$) $x = -r_1 + r_1\cos\varphi + \varkappa r_1\varphi\sin\varphi = r_1\varphi^2(\varkappa - \frac{1}{2})$, $y = r_1\sin\varphi - \varkappa r_1\varphi\cos\varphi = r_1\varphi(1-\varkappa)$; daher

$$r_n = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x} = r_1\frac{(1-\varkappa)^2}{2\varkappa-1} = \frac{(r_1-r)^2}{2r-r_1}.$$

Die Kreistangente in jenem dem $A_1'$ benachbarten Punkte ist die Projektion einer Erzeugenden der Schraubenfläche und der Punkt der Normalkurve ihre erste Spur; hieraus ergeben sich die Koordinaten ihres Schnittpunktes mit der Hauptmeridianebene und dann $r_m$:

$$x = \frac{r_1}{\cos\varphi} - r_1 = \frac{1}{2}r_1\varphi^2,$$

$$z = (r_1\operatorname{tg}\varphi - \varkappa r_1\varphi)\operatorname{tg}\varepsilon = r_1\varphi(1-\varkappa)\operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$r_m = \frac{1}{2}\frac{z^2}{x} = r_1(1-\varkappa)^2\operatorname{tg}^2\varepsilon = \frac{(r_1-r)^2}{r_1}\operatorname{tg}^2\varepsilon.$$

Der positive Krümmungshalbmesser hat den Sinn von $+x$, ist also von $M$ weg gerichtet. Es ist daher $r_n \gtrless 0$, je nachdem $2r \gtrless r_1$; der Übergang geschieht durch $r_n = \infty$. Dagegen ist stets $r_m > 0$. — Zur Konstruktion für den Scheitel $A_1$ ziehe man, wenn $G$, $G_1$ die diametralen Gegenpunkte von $A'$, $A_1'$, die $G_1G_2 \perp M'G_1$, mache $G_1G_2 = 2r - r_1 = GA' - M'A_1'$, ziehe $GG_3 \perp GG_2$ bis $G_3$ auf $G_1G_2$, so ist $r_n = G_1G_3$. Andererseits ziehe man $GH_1 \parallel B''E''$ bis $H_1$ auf $G_1G_2$ und $H_1H_2 \perp M'H_1$ bis $H_2$ auf $M'G_1$, so ist $r_m = G_1H_2$. — Für $A_2'$ sind die entsprechenden Linien gezeichnet.

### b) Die geschlossene schiefe Schraubenfläche.

**452.** Die Axe teilt die Fläche in *zwei Äste*, in den oberen und unteren, wenn die Axe aufrecht steht.

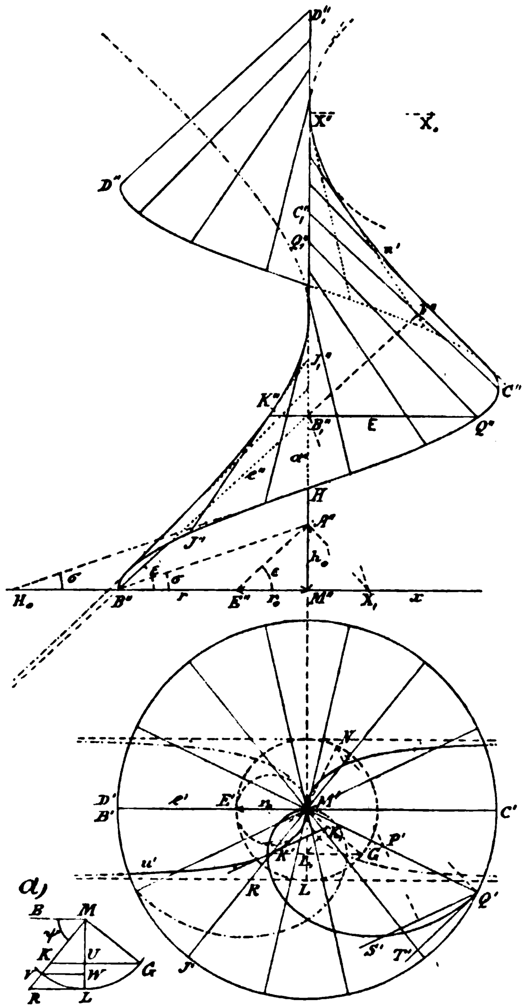
*Aufg. Den unteren Ast eines Ganges der geschlossenen schiefen Schraubenfläche darzustellen.*

Fig. 183. *Aufl.* Sei $a(M', a'')$ die auf $\mathbf{P}_1$ senkrechte Axe, $e$ eine mit $\mathbf{P}_2$

parallele Erzeugende von der Neigung $\varepsilon$ gegen $\mathrm{P}_1$, sei $(M', B_1'')$ ihr Schnittpunkt mit der Axe, $B$ ein anderer Punkt derselben, durch welchen die $\mathrm{P}_1$ gelegt werde, $BCD$ ein Gang der auf der Fläche durch $B$ gelegten (rechtsgängigen) Schraubenlinie, deren Neigung $= \sigma$. Dieselbe ist von $B$ aus in 14 gleiche Teile geteilt, und durch die Teilungspunkte sind Erzeugende gezogen; sie schneiden auf der Schraubenaxe Stücke von $\frac{1}{14}$ der Ganghöhe $h$ $(= B_1''D_1'' = B''D'')$ ab. Der Einfachheit halber wurde $B_1''$ in der Höhe eines Teilungspunktes $Q$ der Schraubenlinie angenommen.

Die *Meridiankurve* besteht aus zwei Schaaren paralleler Erzeugenden; in der Hauptmeridianebene ist die eine Schaar parallel zu $B''B_1''$, die andere zu $C''C_1''$. Die Schnittpunkte der Geraden verschiedener Schaaren, wie $F''$, beschreiben die *Doppelschraubenlinien* der Fläche.

Fig. 183.




Die *Normalkurve* soll in der $\perp a$ durch $B_1$ gelegten Ebene $\mathrm{E}$ bestimmt werden. Schneidet $\mathrm{E}$ die Erzeugende $(M'Q', Q_1''Q'')$ in $Q$, und ist $\sphericalangle B'M'Q' = \varphi$, $M'Q' = r$, so wächst proportional mit dem Drehungswinkel $\varphi$ der Erzeugenden der Abstand ihres Schnittpunktes mit der Axe $a$ von $\mathrm{E}$, daher auch der Leitstrahl $r$, so *daß die Normalkurve der geschlossenen schiefen Schraubenfläche eine Archimedische Spirale ist* (331). Ihre Gleichung ergibt sich, indem man beachtet, daß

$$B_1''Q_1'' = h\frac{\varphi}{2\pi} \text{ und } r = M'Q' = B_1''Q_1''.\cot\varepsilon;$$

dann ist $$r = h\frac{\varphi}{2\pi}\cot\varepsilon = h_0\varphi\cot\varepsilon = r_0\varphi.$$

Es ist dies die Gleichung einer Archimedischen Spirale, deren *Parameter* $r_0 = h_0 \cot\varepsilon$, worin $h_0$ die *reducirte Ganghöhe* oder den *Parameter der Schraubenbewegung* bedeutet.

Dies Ergebnis für die *geschlossene* Fläche stimmt mit den Ergebnissen der Nr. 449 überein, nach welchen die Normalkurve der *offenen* Regelschraubenfläche eine *verschlungene Kreisevolvente* ist, da man die Archimedische Spirale als besonderen Fall derselben ansehen kann (330), in welchem $r_0$ ($r_1$ der Nr. 449) $= 0$, und $\varkappa = \infty$ geworden ist. Die Gestalt, welche die Fig. 182 für $r_0 = 0$ annimmt, ergibt den

*Satz: Die Fußpunkte* ($P_1'$) *der aus dem Mittelpunkte* ($M'$) *des Grundkreises einer Kreisevolvente auf deren Tangenten gefällten Senkrechten bilden eine Archimedische Spirale, deren Scheitel in dem Kreismittelpunkte liegt.*

*Übungsaufgabe.* Den Schnitt einer beliebigen Ebene mit der Schraubenfläche zu bestimmen. Man erhält Kurven, welche auf jedem Gange der Fläche zwei Asymptoten, oder eine unendlich ferne Tangente oder keinen unendlich fernen Punkt besitzen, je nachdem die Neigung der Schnittebene gegen die Normalebene $>$, $=$ oder $< \varepsilon$ ist.

**453.** *Die Berührungsebene in einem gegebenen Punkte $Q$ oder $P$ der Fläche* enthält die Erzeugende des Punktes, und die Tangente der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie der Fläche. Ihr Schnitt mit der durch $Q$ gelegten Normalebene E ergibt sich auch als Tangente $Q'T'$ der Normalkurve der Fläche in $Q'$, einer Archimedischen Spirale. Diese Tangente zieht man senkrecht zur Normale $Q'N$, und letztere erhält man (332), wenn man zum Leitstrahle $M'Q'$ die Senkrechte $M'N$ im Sinne der Öffnung der Spirale zieht (also bei unserem unteren Aste einer rechtsgängigen Schraubenfläche nach links, wenn man von $M$ gegen $Q$ schaut), und auf ihr den Parameter $r_0 = M'N$ aufträgt. Um $r_0$ zu bestimmen, zeichnet man im Aufriß eine zu $P_2$ parallele Tangente der Schraubenlinie, etwa die nächste bei $B$, indem man auf $a''$ nach oben die $M''H = \frac{1}{4}h$, und auf $x$ nach links die $M''H_0 = \frac{1}{4}$ Umfang des durch $B'$ gehenden Grundkreises aufträgt; dann ist $\sphericalangle M''H_0H = \sigma$ bestimmt. Die Parallele $B''A''$ zu $H_0H$ schneidet dann auf $a''$ die $M''A'' = r \operatorname{tg}\sigma = h_0$, und die Parallele $A''E''$ zu $e''$ auf $x$ die $M''E'' = h_0 \cot\varepsilon = r_0$ ab.

Da alle Normalschnitte kongruente Archimedische Spiralen mit demselben Parameter $r_0$ sind, so bleibt der Punkt $N$ ungeändert für alle Punkte der Erzeugenden $M'Q'$, so daß für irgend einen solchen Punkt $P'$ die $P'N$ die Normale der durch $P$ gelegten Normalkurve ist, und daß die $\perp P'N$ durch $Q'$ gehende $Q'S'$ den Schnitt der $\mathbf{E}$ mit der Berührungsebene der Fläche in $P$ bildet. Dabei wird anschaulich, wie mit der Reihe der Berührungspunkte $P$ auf der Erzeugenden $MQ$ das Strahlenbüschel $N$ und daher auch dasjenige $Q'$ der Spuren $Q'S'$ der Berührungsebenen, und daher das dieser Ebenen selbst projektiv ist. — Es wird sich als vorteilhaft erweisen, den *Parameterkreis* (331) aus $M'$ durch $N$ zu zeichnen.

**454.** *Den Umriß u der senkrechten Projektion der geschlossenen schiefen Schraubenfläche auf eine zur Axe a parallele Ebene* findet man durch Umkehrung der Aufgabe der vor. Nr. Ist $\mathbf{P}_2$ jene Ebene, so wird der Umriß der zweiten Projektion gesucht, und es ist jede zu legende Berührungsebene $\perp \mathbf{P}_2$, oder der Umriß ist der Ort des Punktes $K$ der Fläche, in welchen die Tangente der durch den Punkt gehenden Archimedischen Spirale $\perp \mathbf{P}_2$, also ihre Normale $\parallel x$ läuft. Sucht man auf einer Erzeugenden ($M'J'$, $J_1''J''$) den Punkt $K$, so ziehe man aus $M' \perp M'J'$ im Sinne der Öffnung der Spirale die $M'G = r_0$ und dann die $GK' \parallel x$; durch sie wird $K'$ bestimmt. Eine zweite Konstruktion ist ebenso kurz. Ist die $M'L \perp x$ und $= r_0$, $LR \parallel x$ oder eine Tangente des Parameterkreises, und schneidet sie die Erzeugende $M'J'$ in $R$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke $GM'K'$ und $M'LR$ offenbar kongruent, so daß $M'K' = LR$. Daher erhält man den Punkt $K'$ auch, wenn man die $M'J'$ mit der $LR$ in $R$ schneidet und $M'K' = LR$ macht. Setzt man $M'K' = r_1$, $\sphericalangle B'M'K' = \psi$, so folgt hieraus die *Polargleichung der ersten Projektion u' des zweiten Umrisses*

$$r_1 = r_0 \cot \psi.$$

Zieht man die Erzeugende $\perp x$, so wird $M'K' = LR = 0$, so daß diese Erzeugende die Kurve berührt; zieht man sie $\parallel x$, so fällt $K'$ ins Unendliche, und es sind die beiden zu $x$ parallelen Tangenten des Parameterkreises die *Asymptoten* der Kurve, da von ihnen der Kurvenpunkt $K'$ denselben Abstand, wie der Kreispunkt $G$ besitzt, der letztere aber beim Fortschreiten von $K'$ beliebig klein wird.

Um die *Tangente der Kurve* in $K'$ nach dem Verfahren der ähnlichen Figur (I, 204) zu bestimmen, denke man sich auf $RL$ gegen $L$ und auf $K'M'$ gegen $M'$ zwei gleiche unendlich kleine Strecken $RR'$, $K'K''$ aufgetragen, und die Gerade $R'M'$ mit dem

aus $M'$ durch $K''$ gezogenen Kreise in $K_0$ geschnitten; dann ist $K'K_0$ ein Element der Kurve. Die $R'M'$ schneidet aber auf $K'G$ ein unendlich kleines Stück $K'L_0$ ab. Um nun die Figur $K'K''K_0L_0$ mit dem Ähnlichkeitspunkte $K'$ zu vergrößern, ersetze man die unter einander gleichen Strecken $RR'$, $K'K''$ durch die unter einander gleichen $RL$, $K'M'$; dann entspricht dem Kreiselemente $K''K_0$ die zu $M'K'$ Senkrechte $M'K_1$, $L_0$ rückt in den Schnittpunkt $L_1$ von $LM'$ mit $K'G$, und der $L_0K_0$ entspricht die mit $K'M'$ Parallele $L_1K_1$. Daher ist $K'K_1$ die Tangente.

*Der Krümmungshalbmesser der ersten Projektion u′ des zweiten Umrisses in ihrem Scheitel M′ ist* $= \frac{1}{2} r_0$. Denn wenn der $\sphericalangle LM'R$ unendlich klein wird, ist er zugleich Umfangswinkel des Krümmungskreises und Mittelpunktswinkel des Kreises $(M', r_0)$, während die Bogen $M'K'$ und $LR$ der beiden Kreise unter einander gleich sind. Daher gehört zu den gleichen Bögen ein doppelt so großer Mittelpunktswinkel des Krümmungs- als des Parameterkreises, folglich ist sein Halbmesser halb so groß, als der des letzteren.

Die Figur *a*) mit übereinstimmenden Buchstaben (ohne Striche) zeigt noch, daß $\triangle MVW \simeq \triangle GMU$, daher $VW = MU$ ist; und dadurch ergibt sich eine neue, später zu benutzende Konstruktion.

Die Punkte der zweiten Projektion oder des *scheinbaren zweiten Umrisses u″* erhält man durch Hinaufprojiciren der Punkte $K'$ auf die zweiten Projektionen der zugehörigen Erzeugenden nach $K''$. Sie besteht aus unendlich vielen hyperbelartigen Ästen, welche $a''$ berühren und die zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Erzeugenden zu Asymptoten haben. Der Teil der Kurve ist strichpunktirt, welcher auf der Fortsetzung des dargestellten Flächenteiles liegt.

Um den *Krümmungshalbmesser* $r_1 = X''X_0$ *des zweiten scheinbaren Umrisses u″ in einem Scheitel X″* zu bestimmen, denke man sich auf $LR$ von $L$ aus ein Linienelement $y'$ aufgetragen; der nach dessen zweitem Endpunkte aus $M'$ gezogene Strahl schneidet dann auf $u'$ von $M'$ aus das gleiche Element ab. Die zweite Projektion des Endpunktes dieses Elementes auf $u''$ hat einen Abstand von $X'' = y''$, und daher besteht das Verhältnis der Krümmungshalbmesser $\frac{1}{2} r_0$ von $u'$ und $r_1$ von $u''$ in ihren Scheiteln (208)

$$\tfrac{1}{2} r_0 : r_1 = y'^2 : y''^2.$$

$y''$ besteht aber aus der Bahn des Schnittpunktes der über $y'$ hingleitenden Erzeugenden auf der Schraubenaxe, und diese ist $= y'(h_0 : r_0)$, und aus der Projektion des $y'$ der Grundrißerzeugenden auf die Aufrißerzeugende, und diese ist ebenfalls $= y'(h_0 : r_0)$, so daß $y'' = 2y'(h_0 : r_0)$. Daraus folgt aber mit Hilfe obiger Gleichung

$$r_1 = 2\frac{h_0^2}{r_0} = 2r \operatorname{tg}\sigma \operatorname{tg}\varepsilon.$$

Diese Formel wird mittelst des Punktes $X_1$ der $x$ konstruirt, für welchen $A''X_1 \perp E''A''$ oder $B''X_1 \perp B''A''$; es ist dann $r_1 = X''X_0 = 2M''X_1$ *).

*Übungsaufg.* Man suche eine Tangentenkonstruktion für $u'$ nach dem Verfahren der ähnlichen Figur aus der Eigenschaft $VW = MU$ (Fig. 183 *a*)). Die Einfachheit der Beziehung verspricht eine sehr einfache Auflösung, die ich unberührt lassen will, um die Erfindungsfreude des Lesers nicht zu stören.

### c) Die Schattengrenzen der geschlossenen schiefen Schraubenfläche.

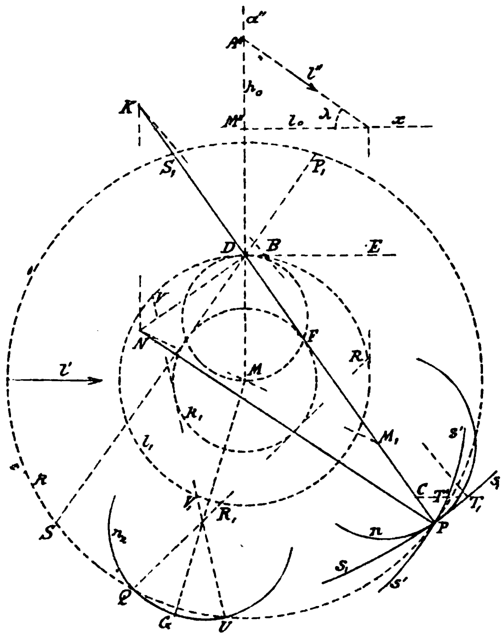
**455.** Die bei Parallelbeleuchtung entstehende *Eigen- und Schlagschattengrenze einer beliebigen Schraubenfläche* werden mit Hilfe einiger wichtigen *Sätze von Burmester* **) aus der Normalkurve leicht konstruirt. Es sei $\mathbf{P}_1$ senkrecht auf der Schraubenaxe $a$ ($M$, $a''$), Fig. 184.
$\mathbf{P}_2$ parallel mit dem Lichtstrahle $l$, $\lambda$ dessen Neigung gegen $\mathbf{P}_1$, $h$ die Höhe, $h_0 = h : 2\pi$ die reducirte Höhe des Schraubenganges. Die Schraubenfläche sei rechtsgewunden, ihre Normalkurve in $\mathbf{P}_1$ sei $n$. Läßt man die $n$ durch Schraubenbewegung die Fläche erzeugen, so gibt es in der Ebene der $n$ einen aus $M$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis $l_1$, dessen Punkte Schraubenlinien beschreiben, an welche ein Lichtstrahl $l$ eine Tangente sein kann; sein Halbmesser ist $l_0 = h_0 \cot\lambda$ (341). Der Schatten dieser Schraubenlinie auf jede zu $a$ senkrechte Ebene ist eine gemeine Cykloide, deren Bahnlinie die Projektion jenes berührenden Lichtstrahles, also eine der beiden mit $l'$ parallelen Tangenten des Kreises $l_1$, bei unserer rechtsgewundenen Fläche die $DE$, ist. Während $l_1$ und $n$ fest mit einander verbunden die Schraubenbewegung ausführen, rollt der Schatten des $l_1$ auf $\mathbf{P}_1$, der ein mit $l_1$ gleicher Kreis ist, auf der Geraden $DE$ hin, und bewegt sich der fest mit diesem Schattenkreise verbundene Schatten von $n$ mit; die Einhüllende $s_1$ desselben, oder seine Hüllbahnkurve ist die *Schlagschattengrenze* der Schraubenfläche auf $\mathbf{P}_1$.

*) Herr *Tesař* hat auf kinematischem Wege die Evolute der Kurve $u''$ bestimmt und dabei auch den Krümmungshalbmesser für den Scheitel vermittelst der Linie $B_1''X_1$ der obigen Figur konstruirt. Es geschah dies in seiner Abhandlung: „Die Kontourevolute axialer Schraubenflächen“ (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 94, Abt. 2, 1886).

**) *Burmester*, „kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben. Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 18, 1873, S. 185.

Ist nun $n$ eine beliebige Lage des Normalschnittes und ist durch sie die $\mathbf{P}_1$ gelegt, so ist $l_1$ sein eigener Schatten und $D$ der Berührungspunkt dieses rollenden Kreises mit seiner Bahnlinie $DE$. Man erhält dann den Berührungspunkt $P$ der Hüllbahnkurve von $n$, oder der Schlagschattengrenze, als Fußpunkt $P$ der aus $D$ zu $n$ gezogenen Normale $DP$ (311). Weil $n$ der Fläche angehört, ist $P$ auch ein Punkt der Eigenschattengrenze. Andererseits ist im Grundriß der Punkt $D$ unveränderlich, welche Lage $n$ auch einnehmen mag; dieser Punkt von besonderer Wichtigkeit heißt der *Ausgangspunkt*; er ist durch $MD \perp l'$ und $= l_0 \cot \lambda$ und noch dadurch bestimmt, daß er auf derjenigen Seite von $M$ liegt, auf welcher eine Tangente der von $D$ beschriebenen Schraubenlinie mit $l$ parallel läuft. Wir können daher den *Satz von Burmester* aussprechen: *Die Projektion $s'$ der Eigenschattengrenze $s$ einer Schraubenfläche auf eine Normalebene $\mathbf{P}_1$ ist der Ort derjenigen Punkte der sich um die Schraubenaxe drehenden Projektion der Normalkurve $n$ der Fläche, in welchen deren Normalen durch den Ausgangspunkt $D$ gehen.*

Fig. 184.




**456.** Da es meist leichter ist, in einem Punkte einer Kurve $n$, als aus einem außerhalb derselben liegenden Punkte, eine Normale zu ihr zu ziehen, so *findet man Punkte $P$ der $s'$*, wenn man in irgend einem Punkte $Q$ einer Lage $n_2$ der $n$ eine Normale $QR$ zu $n_2$ zieht, sie mit dem Kreise $l_1$ in $R$ und $R_1$ schneidet und dann um $M$ dreht, bis $R$ oder $R_1$ nach $D$ gelangt. $Q$ kommt dann nach $P$ oder $P_1$, und diese zwei Punkte gehören der $s'$ an und liegen auf dem aus $M$ durch $Q$ geführten Kreise $k$. Die neuen Lagen $DP$, $DP_1$ erhält man entweder durch Übertragen der Sehne $RR_1$ auf $l_1$ von $D$ aus nach beiden Seiten, oder als die beiden aus $D$ gezogenen Tangenten des Kreises $k_1$, der aus $M$ berührend an $QR$ gelegt wird.

Man findet die Punkte der $s'$ auf einem beliebig aus $M$ gezogenen Kreise $k$ aus dessen Schnittpunkten $Q$, $U$ mit $n_2$. Ist $n_2$ symmetrisch in Bezug auf eine durch $M$ gehende Gerade $MG$, so liegen $Q$ und $U$ symmetrisch in Bezug auf $MG$; die Normalen der $n_2$ in $Q$ und $U$ berühren dann denselben Kreis $k_1$, und die aus $D$ an $k_1$ gezogenen Tangenten liefern auf $k$ zwei in Bezug auf $MD$ symmetrische Punktepaare der $s'$, nämlich $P$, $S$ und $P_1$, $S_1$. Da außerdem aus der Symmetrie der $n_2$ in Bezug auf $MG$ auch die Symmetrie der mit $MG$ in derselben Ebene liegenden Meridianlinie der Fläche in Bezug auf $MG$ folgt, weil bei der Schraubenbewegung aus $Q$ und $U$ offenbar zwei derart symmetrische Punkte der Meridianlinie entstehen, und da andererseits das Umgekehrte gilt, so folgt: *Ist die Normalkurve einer Schraubenfläche symmetrisch in Bezug auf eine Meridianebene, so ist es auch die Meridiankurve in Bezug auf eine Normalebene, und umgekehrt. In diesem Falle ist die Projektion $s'$ der Eigenschattengrenze $s$ auf eine Normalebene symmetrisch in Bezug auf die zur Lichtstrahlprojektion $l'$ senkrechte Durchmesserlinie $MD$.*

Da ferner der Punkt $F$ der Berührung der $PS_1$ mit $k_1$ auf dem über $MD$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liegt, so folgt: *In dem bezeichneten Falle der Symmetrie werden die durch den Ausgangspunkt $D$ gehenden Sehnen der $s'$ von dem Kreise halbirt, dessen Durchmesser $MD$ ist.*

**457.** Den *Krümmungsmittelpunkt $K$ der Schlagschattengrenze $s_1$* in ihrem Punkte $P$ erhält man, indem man beachtet, daß $s_1$ die Hüllbahnkurve der beweglichen Kurve $n$ ist, wenn diese mit dem auf $BE$ hinrollenden Kreise $l_1$ fest verbunden bleibt. Er fällt daher mit dem Krümmungsmittelpunkte $K$ derjenigen Kurve zusammen, welche bei dieser Bewegung von dem Krümmungsmittelpunkte $M_1$ der $n$ in $P$ beschrieben wird (311). Diesen Punkt $K$ findet man (309) auf der Normale $PD$, wenn man $M_1M$ mit der zu $PD$ Senkrechten $DN$ in $N$ schneidet, und $NK \perp DE$ oder $\perp l'$ zieht. Zugleich ergibt sich dann $PN$ *als Normale des Grundrisses $s'$ der Eigenschattengrenze* $s$. Denn sind $T$, $T'$, $T_1$ die dem $P$ benachbarten Punkte bezw. der $s, s', s_1$, derart daß $TT' \perp P_1$ und $T_1$ der Schatten des $T$, also $T'T_1 \parallel l'$ ist, und schneidet die Normale $T_1K$ der $s_1$ die $DE$ in $B$, so ist $B$ der zu dem Punkte $T_1$ der Rolllinie $s_1$ gehörige Punkt der Berührung des rollenden Kreises $l_1$ mit der Bahnlinie $DE$; zugleich ist $T'T_1 = DB$, weil beide Linien die Schatten der Steigungshöhe der $n$ von $P$ zu $T$ bilden. Schneidet ferner $T_1T'$ die $PK$ in $C$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $KDN$ und $T_1PC$ (deren Seiten paarweise aufeinander senkrecht stehen) und der Dreiecke $KCT_1$ und $KDB$, unter Beachtung, daß für $PT_1 = 0$, $KC = KP$ wird,

$$\frac{KD}{KN} = \frac{T_1 P}{T_1 C} \text{ und } \frac{KC}{KD} = \frac{T_1 C}{BD} \text{ oder } \frac{KP}{KD} = \frac{T_1 C}{T_1 T'},$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen

$$\frac{KP}{KN} = \frac{T_1 P}{T_1 T'}.$$

Demnach ist $\triangle KPN \sim \triangle T_1 PT'$, und da zweimal zwei entsprechende Seiten dieser ähnlichen, nicht rechtwinkligen Dreiecke auf einander senkrecht stehen, so gilt dies auch von den letzten $PN$ und $PT'$, w. z. b. w.

**458.** *Aufg. Die Eigenschattengrenze s der geschlossenen schiefen Schraubenfläche bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen*).*

Fig. 185.

Fig. 185.

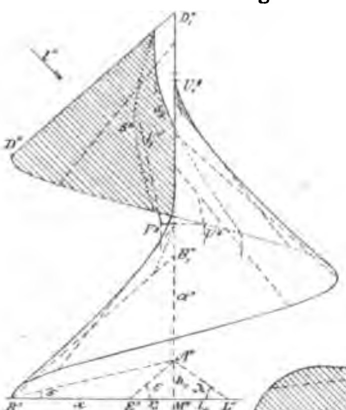
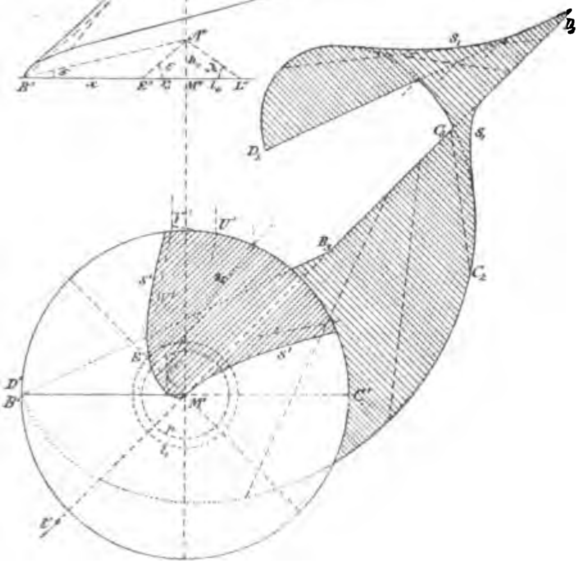


Fig. 186.



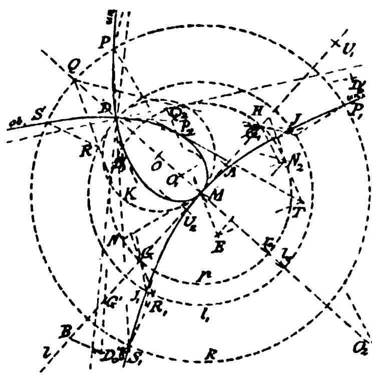
*Aufl.* Seien Begrenzung, Stellung und Bezeichnung dieselben wie in Nr. 452, insbesondere wieder $M''A'' = h_0$ die reducirte Ganghöhe, $M''E'' = r_0$ der Parameter der Archidischen Spirale des Normalschnittes, sei $l$ der Lichtstrahl, $A''L''$ parallel zu dem um $a$ parallel zu $\mathbf{P}_2$ gedrehten Lichtstrahle, so ist $M''L'' = h_0 \cot \lambda = l_0$. Wir können nun nach den vorhergehenden Nummern die Eigenschattengrenze im Grundriß allein konstruiren, der in Fig. 186 in vergrößertem Maßstabe, unter Weglassung der Striche bei den Buchstaben, verzeichnet ist,

*) Eine eingehende vorwiegend analytische Bearbeitung dieses Gegenstandes hat Herr *de la Gournerie* geliefert in seinem Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des héliçoides gauches (Journ. de l'école polyt., t. 20, cah. 34, 1851).

und worin insbesondere der Parameterkreis $p$ mit dem Halbmesser $r_0$ und der Kreis $l_1$ mit demjenigen $l_0$ eingetragen sind. Auf letzterem liegt (455) der Ausgangspunkt $D$, wobei $MD \perp l$ auf der Seite gezogen wurde, auf welcher der Lichtstrahl die durch $l_1$ dargestellte Schraubenlinie berührt.

Man findet nun nach Nr. 456 auf einem aus $M$ gezogenen Kreise $k$ die Punkte der Eigenschattengrenze beider Flächenäste, wenn man auf $k$ einen Punkt $Q$ annimmt, welchen wir auf dem einseitig aus $M$ gezogenen Strahle $MD$ wählen wollen, durch diesen die Normalkurve, also hier die beiden Äste einer Archimedischen Spirale vom Parameter $r_0$ gelegt denkt, deren Normalen $QG$ und $QG_1$ zieht, wobei $MGG_1 \perp MQ$ und $MG = MG_1 = r_0$ (453), und ferner $QG$ und $QG_1$ mit $l_1$ in vier Punkten, wie $R$, $R_1$, schneidet; dann geben die vier Strahlen, wie $MR$, $MR_1$, auf $k$ vier Kurvenpunkte $S$, $S_1$, $P$, $P_1$ an. Denn dreht man z. B. $QR_1$ um $M$, bis $R_1$ nach $D$ gelangt, so gelangt $Q$ nach $P_1$, weil $\triangle R_1MQ \cong \triangle DMP_1$. Dabei liegen $P$ und $S_1$, sowie $P_1$ und $S$ mit $D$ auf einer Geraden, weil $DP$, $DP_1$, $DS$, $DS_1$ gleiche und paarweise gleich gerichtete Winkel mit $MD$ bilden, nämlich die Winkel $MRR_1 = MR_1R \ldots$ Da für die Spirale auf dem unteren Aste der rechtsgängigen Fläche $QG$ die Normale ist, und bei deren Drehung $R$ oder $R_1$ nach $D$ gelangen muß, so gelangt dann $Q$ nach $P$ oder $P_1$, und diese beiden Punkte gehören daher dem unteren Aste an; $S$, $S_1$ dagegen gehören dem oberen an.

Fig. 186.



Schneidet die Gerade $DPS_1$ den Kreis $p$ in $N$ und $N_1$, so gelangt bei der bezeichneten Drehung das rechtwinkige Dreieck $GMQ$ nach $NMP$, daher ist $\sphericalangle NMP$ und ebenso $\sphericalangle N_1MS_1 = 90^0$. Hierdurch ist eine *Konstruktion gegeben für die Kurvenpunkte auf einem durch D gezogenen Strahle* $DPS_1$ mittelst seiner Schnittpunkte $N$, $N_1$ mit $p$ und der Linien $MP \perp MN$ und $MS_1 \perp MN_1$, und *auf einem durch M gezogenen Strahle* $MP$ mittelst der Linien $MN \perp MP$ und $ND$, und entsprechend eines zweiten.

Schneidet endlich $DPS_1$ den über $MD$ als Durchmesser gezogenen Kreis außer in $D$ noch in $K$, so ist $KP = KS_1$ (456).

Sodann ist $MD$ eine *Symmetrielinie* des Grundrisses der Eigenschattengrenze, weil ein Strahl aus $M$ Symmetrielinie der Normal-

kurve, d. i. der Archimedischen Spirale ist (456), wie es aber auch die Konstruktion unmittelbar zeigt.

**459.** Die vier Punkte auf dem Kreise $l_1$ werden, da für ihn $Q$ in $D$ fällt, unmittelbar durch die Strahlen $DG$, $DG_1$ geliefert, nämlich zwei getrennte Punkte $J$, $J_1$ und zwei in $D$ vereinigte; daher ist $D$ ein Doppelpunkt mit $DG$, $DG_1$ als Tangenten. Die vier Punkte auf dem aus $M$ mit dem Halbmesser Null gezogenen Kreise fallen in $M$ zusammen; daher ist auch $M$ ein *Doppelpunkt*, und zwar mit $l$ als *Doppeltangente*, weil auf dem aus $M$ benachbart zu $l$ gezogenen Strahle nach dem gegebenen Verfahren beiderseits von $M$ je ein dem $M$ benachbarter Punkt der Kurve gefunden wird.

*Die Kurve ist von der vierten Ordnung*, weil jeder aus einem der Doppelpunkte $D$ und $M$ gezogene Strahl außerdem noch zwei Punkte enthält.

*Die beiden aus D an den Kreis p gezogenen Tangenten sind Asymptoten der Kurve.* Denn auf jeder derselben fallen die beiden Schnittpunkte mit $p$, $N$ und $N_1$, zusammen; daher werden die beiden $\perp MN$ und $\perp MN_1$ durch $M$ gezogenen Strahlen parallel zur Tangente und liefern auf ihr zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte, woraus der Satz folgt. Daß gerade jene Tangente an $p$ und nicht eine mit ihr Parallele die Asymptote ist, folgt auch daraus, daß, so lange $DN$ endlich, bei einer unendlich kleinen Verschiebung von $N$ auf $p$ sich die Tangente um $0^2$, der mit ihr parallele Strahl aus $M$ um $0^1$ dreht, der Schnittpunkt beider daher oder der dem unendlich fernen Punkte benachbarte Punkt der Kurve in die Tangente fällt.

Die *Tangente der Kurve* in einem allgemeinen Punkte $P_2$ derselben ($P_2MN_2 = 90^0$) findet man nach dem Verfahren der ähnlichen Figur, wenn man den rechten Winkel $P_2MN_2$, dessen Schenkel $MP_2$ den Kreis $p$ in $Q_2$ (und einem zweiten Punkte) schneidet, um $M$ um einen unendlich kleinen Winkel dreht, wodurch $Q_2$ und $N_2$ auf $p$ in demselben Sinne Elemente von derselben Größe $s$ beschreiben, dann das bei $Q_2$ liegende Element aus $M$ auf die zu ihm parallel durch $P_2$ ($\perp MP_2$) gedachte Gerade in $x$, und das bei $N_2$ liegende aus $D$ auf die zu ihm parallele $P_2M$ in $y$ projicirt, und von den zweiten Endpunkten der $x$ und $y$ Parallele bezw. zu $MP_2$ und $DP_2$ zieht. Diese Parallele schneiden sich in einem zu $P_2$ benachbarten Punkte der Kurve, d. i. auch in einem Punkte der gesuchten Tangente. Wenn man $x$ und $y$ ohne Änderung ihres Verhältnisses zu $x'$ und $y'$ vergrößert, so kann man unmittelbar nach dieser Anleitung konstruiren; man erhält aber eine einfachere Konstruktion mit Hilfe einiger Proportionen. Wir gehen von derjenigen Lage aus, bei welcher sich $P_2$ auf einem der Kurvenbogen $M,D$

(im Inneren des Kreises vom Durchmesser $MD$) befindet, daher $N_2$ auf demjenigen Viertel des Kreises $p$, welcher von $G_1$ (oder $G$) begrenzt ist, dem $D$ gegenüber und mit $P_2$ auf derselben Seite von $MD$ liegt, und nehmen $Q_2$ als den auf eben dieser Seite liegenden Schnittpunkt von $MP_2$ mit $p$ an. Man beschreibe nun das bei $Q_2$ liegende Element $s$ im Sinne des mit ihm parallelen Halbmessers $MN_2$, so wird das bei $N_2$ liegende $s$ im Sinne von $Q_2M$ beschrieben. Die übereinstimmenden Sinne haben dann bezw. auch $x$ und $y$. Setzen wir nun $MP_2 = m$, $DP_2 = d$, $DN_2 = n$, ($MN_2 = r_0$), so ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken

$$x = s\frac{m}{r_0}, \quad y = s\frac{d}{n},$$

woraus

$$y = x\frac{r_0 d}{m n}.$$

Ersetzen wir $x$ und $y$ durch $x'$ und $y'$, von denen die eine, etwa $x'$, willkürlich angenommen wird, so scheint es vorteilhaft, $x' = m$ oder $= n$ zu nehmen. Ich fand es aber zweckmäßiger, zu setzen

$$x' = r_0, \quad \text{wodurch } y' = \frac{r_0^2}{f}, \quad f = \frac{mn}{d}.$$

Man findet nun $y' = ME$, wenn man $N_2E \perp MD$ bis $E$ auf $MP_2$ zieht. Denn zieht man in Gedanken $N_2F \parallel MD$ bis $F$ auf $MP_2$, so ist wegen ähnlicher Dreiecke $MF = mn : d = f$, und da $N_2E \perp MD$ und $\perp N_2F$, so ist $ME = r_0^2 : f = y'$. Zugleich liegt $MF$ im Sinne von $MQ_2$, daher $ME$ im Sinne von $Q_2M$ oder $y'$. Trägt man daher in Gedanken von $P_2$ aus auf der Senkrechten zu $MP_2$ im Sinne von $MN_2$ die $x' = r_0$ auf und zieht durch ihren Endpunkt die Parallele zu $MP_2$, so ist dies zugleich die Tangente $N_2T$ des $p$ in $N_2$. Und trägt man von $P_2$ aus auf $P_2M$ in deren Sinne die $ME$ auf und zieht durch ihren Endpunkt die Parallele zu $P_2N_2$, so schneidet diese auf $N_2T$ die $N_2T = ME$ ab, und $T$ ist ein Punkt der gesuchten Tangente. *Diesen Punkt $T$ der gesuchten Kurventangente erhält man daher, wenn man die Tangente $N_2T$ des Kreises $p$ zeichnet, und dann $N_2E \perp MD$ bis $E$ auf $MP_2$, und $ET \parallel MN_2$ bis $T$ auf $N_2T$ zieht;* oder, was einleuchtet, *wenn man $N_2T$ mit $MG$ in $H$ schneidet und $N_2T = HN_2$ macht.* Diese Konstruktion bleibt unter allen Umständen richtig, wenn in dem Falle der Umkehrung des Sinnes von einer der Größen $x', y'$ (die Umkehrung beider kommt nicht vor) auch eine der Größen $MN_2$, $N_2T$, einerlei welche, vermöge der Konstruktion ihren Sinn umkehrt; oder, da wir dem $MN_2$ stets seinen Sinn belassen, wenn in jenem Falle $N_2T$ seinen Sinn umkehrt. Gelangt nun $N_2$ zwischen $G_1$ und die benachbarte Kurvenasymptote, so gehen $Q_2$ und $P_2$ auf die andere Seite von $MD$; dann

behält $x'$ seinen Sinn bei und $y'$ kehrt ihn um. Gelangt ferner $N_2$ zwischen die Asymptote und $MD$, so bleibt $Q_2$ jenseits und $P_2$ kommt nach diesseits zurück; dann behält $y'$ den ursprünglichen Sinn bei und $x'$ kehrt ihn um. In beiden Fällen aber nimmt $N_2T$ den zum ursprünglichen entgegengesetzten Sinn an.

Um den *Krümmungshalbmesser* $r$ *der beiden Kurvenäste in ihrem Scheitel* $M$ zu bestimmen, ziehe man durch $M$ einen Strahl (wie $MS_1$), der mit $l$ den unendlich kleinen Winkel $\varphi$ bildet; die darauf Senkrechte (wie $MN_1$) bildet mit $MD$ den Winkel $\varphi$ und schneidet auf dem Kreise $p$ an zwei Stellen, von $MD$ aus, den Bogen $r_0\varphi$ ab, deren aus $D$ auf $MS_1$ gebildete Projektionen bei $M$ Kurvenelemente von der Größe

$$s = r_0\varphi\,\frac{l_0}{r_0 \pm l_0}$$

ausmachen. Außerdem ist $s = 2r\varphi$; daher

$$r = \frac{l_0}{2}\,\frac{r_0}{r_0 \pm l_0}.$$

Man konstruirt demnach die Krümmungsmittelpunkte $O_1$, $O_2$, indem man (s. Fig.) $MO = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}l_0$, $G_1U_1 = -G_1U_2 = l_0$ macht und $G_1O_1 \parallel U_1O$, $G_1O_2 \parallel U_2O$ zieht.

Um die beiden *Krümmungshalbmesser* $DD_0 = DD_0' = r_1$ *der Kurve in ihrem Doppelpunkte* $D$ zu erhalten, denke man sich aus $D$ einen zur Kurventangente $DG_1$ unter dem unendlich kleinen Winkel $\varphi$ geneigten Strahl gezogen. $\varphi$ schließt ein Element $s$ der Kurve ein, so daß $r_1 = s : 2\varphi$. Man erhält $s$ durch Konstruktion des Kurvenpunktes auf dem zweiten Schenkel von $\varphi$. Dieser schneidet von dem Kreise $p$ von $G_1$ aus ein Element $= g\varphi : \sin\delta$ ab, wenn man $\sphericalangle MDG_1 = \delta$, $DG_1 = g$ setzt. Trägt man dies Element in seinem Sinne auf $p$ von $MD$ aus auf, so schneidet der durch seinen Endpunkt aus $M$ gezogene Strahl auf der Kurve von $D$ aus das Element $s = (g\varphi : \sin\delta)\,(l_0 : r_0) : \sin\delta$ ab. Daher ist

$$r_1 = \frac{1}{2}\,\frac{g\,l_0}{r_0\sin^2\delta} = G'G_1\,\frac{l_0}{e} = G'G_1\,\frac{DG'}{2r_0}.$$

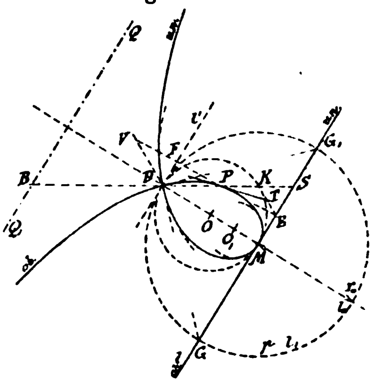
Darin ist $G'$ der Schnittpunkt der $DD_0$ ($\perp DG_1$) mit $GG_1$, $e$ die auf $DG$ liegende Sehne des $p$; es ist dann $G'G_1 = g : \sin\delta$, $e = 2r_0\sin\delta$, $DG' = l_0 : \sin\delta$. Nach jeder der letzteren Formeln kann man $r_1$ konstruiren, z. B. nach der zweiten, indem man auf $l$ die $G'A = 2r_0 = GG_1$ (in der Fig. gegen $M$ hin), dann in entgegengesetztem Sinne die $AB = G_1G'$ aufträgt und $BD_0 \parallel AD$ zieht. Man erhält offenbar $A$ und $B$ etwas kürzer vermöge $G_1A = G'B = GG'$. Nimmt man den Sinn der $G'A$ als $G'A'$ von $M$ weg, so

erhält man $A'$ und $B'$ durch $G'A' = G_1 G$, $A'B' = G'G_1$, oder $B'$ in $G$, so daß auch $GD_0 \parallel DA'$ ($A'$ in der Fig. nicht angegeben), was etwas kürzer, jedoch weniger genau ist.

**460.** *Die Kurve nimmt verschiedene Gestalten an*, je nachdem $D$ außerhalb, auf oder innerhalb des Kreises $p$ liegt, oder je nach- Fig. 186 a
dem $r_0 \lesseqgtr l_0$, oder $\varepsilon \gtreqless \lambda$ ist. In Fig. 185 und 186 war $\varepsilon > \lambda$ angenommen.

Ist $\varepsilon = \lambda$, so fallen die Kreise $p$ und $l_1$ in einander, und der Ast $P_1 M S_1$ wird zur Geraden $l$, welche der Kurve angehört. Denn für den aus $M$ gezogenen Strahl $l$ fällt der Punkt $N$ (Fig. 186, $MN \perp l$) in $D$, und wird $DN$ unbestimmt und liefert jeden Punkt von $l$ als Punkt der Kurve. Räumlich aufgefaßt ist $l$ die Erzeugende, welche mit einem Lichtstrahle zusammenfällt. Schneidet nun ein Strahl aus $D$ die Kurve in den zwei Punkten $P$, $S$, so wird $PS$ durch den Kreis vom Durchmesser $MD$ in $K$ halbirt (458) und hierdurch ist eine einfachere Entstehungsart der Kurve gegeben. — Dieselbe wird *Strophoide* genannt, und ist, mit Ausschluß der Geraden $l$, von der dritten Ordnung*), da die gesamte Linie von der vierten ist (vor. Nr.).

Fig. 186 a.



*Asymptote der Kurve* ist die zu $l$ in Bezug auf $D$ symmetrische (also parallele) Gerade $QQ_1$. Denn der schiefe Abstand $BP$ eines Kurvenpunktes $P$ von $QQ_1$ ist $= DS + DP = 2 . DK$, und nähert sich beliebig der Null, wenn sich $DP$ den Parallelen zu $l$ nähert. Die beiden durch $D$ laufenden Asymptoten der allgemeinen Kurve gehen hier in die Parallelen $GG_1$, $QQ_1$ über, und laufen nicht mehr

*) Nimmt man $D$ als Ursprung, $DM$ als $x$Axe, setzt $DP = r$, $MDP = \varphi$, $DM = a$, so ist, da $DP + DS = 2 . DK$, die Polargleichung der Kurve

$$r + \frac{a}{\cos\varphi} = 2a\cos\varphi \quad \text{oder} \quad r = \frac{a}{\cos\varphi}(2\cos^2\varphi - 1).$$

Für rechtwinklige Koordinaten gilt

$$r\cos\varphi = x, \quad r\sin\varphi = y, \quad \text{woraus} \quad \cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2};$$

daher die Gleichung der Kurve

$$x + a = 2a\frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad (x + a)(x^2 + y^2) = 2ax^2.$$

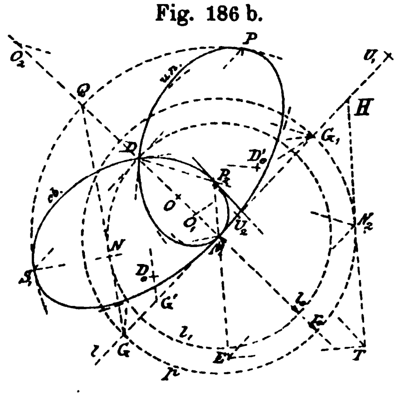
durch $D$, weil in dieser Grenzlage die Strecke $DN$ (vor. Nr., Fig. 186) aufhört endlich zu sein.

Um die *Tangente der Kurve* in einem Punkte $P$ noch in anderer als der allgemeinen Weise zu bestimmen, ziehe man die Tangente des Kreises $MD$ in $K$, schneide sie mit $l$ in $E$ und ziehe $EP$. Nun denke man sich aus einem zu $S$ benachbarten Punkte $S'$ der $l$ einen Strahl nach $D$ und eine Parallele zu $SD$ gezogen; man erhält dann einen zu $P$ benachbarten Punkt der Kurve, wenn man auf der Parallelen bis auf $EP$ geht (wodurch man ihr Stück von $S'$ bis zum Kreise $MD$ verdoppelt) und von dort in einer Parallelen zu $KE$ bis $S'D$. Die letztere Strecke ist gleich dem zwischen den beiden Parallelen liegenden Stücke der $KE$ (das man an $D$ verschoben denke), vervielfacht mit dem Verhältnisse $SP:SD$. Vergrößert man $SS'$ zu $SE$, so ist der Weg auf jener Parallelen zu $SD$ gleich Null, jener Weg auf der Parallelen zu $EK$ ist $= EK(SP:SD) = EK(EP:EF)$, wenn $F$ der Schnittpunkt von $EP$ und $l'$ ($\parallel l$ durch $D$). Zieht man nun $PT \parallel FK$ bis $T$ auf $EK$, so ist $ET$ jener Weg, und zugleich $PT$ die gesuchte Tangente. Man zeichne demnach für alle Tangenten $DF \parallel l$, ziehe die Kreistangente $KE$ bis $E$ auf $l$, dann $EP$ bis $F$ auf $l'$, so ist $PT \parallel FC$. Oder auch, man ziehe $DV \parallel EK$ bis $V$ auf $EP$, so ist $PT \parallel VS$; dabei trat $DV$ an die Stelle von $KE$.

Die *Krümmungshalbmesser* $r$ für $M$ sind wegen $r_0 = l_0$, $r = \infty$ und $r = \frac{1}{4} l_0$ (vor. Nr.). Die Krümmungsmittelpunkte für $D$ fallen in $G$ und $G_1$, weil $G'G_1 = 2r_0$ wird (vor. Nr.).

Fig. 186 b. **461.** Ist $\varepsilon < \lambda$, liegt also $D$ innerhalb $p$, so sind die Tangenten aus $D$ an $p$ nicht reell, und die Kurve hat keine reellen Asymptoten und unendlich fernen Punkte. Der größte aus $M$ gezogene Kreis, auf welchem sich noch Punkte, $P, S_1$, befinden, wird erhalten, wenn man die aus $G$ an $l_1$ gezogene Tangente, deren Berührungspunkt $N$ ist, mit $MD$ in $Q$ schneidet und aus $M$ durch $Q$ den Kreis $k$ legt. $MN$ schneidet den $k$ in $S_1$. Größere Kreise liefern nämlich (458) keine Punkte $N$ und $S_1$ oder $P$ mehr.

Fig. 186 b.



**462.** Auf die Weise, wie in Fig. 186, ist die *Eigenschattengrenze $s'$ im Grundriß* der Fig. 185 gezeichnet. Der *Aufriß $s''$* derselben wird durch Übertragen der Schnittpunkte der $s'$ mit den

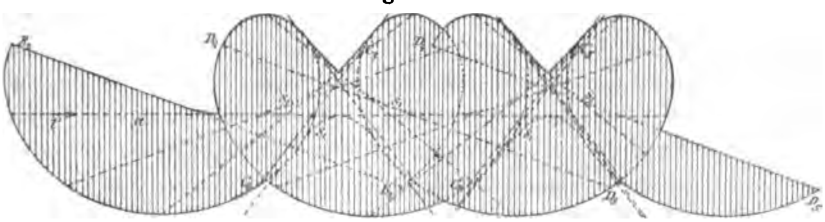
Erzeugenden der Fläche in den Aufriß ermittelt. Die *Punkte der Axe* $a''$ liegen auf den Erzeugenden, deren Grundriß $l'$ ist. Mit der *Asymptote* $VV_1$ der $s$ läuft parallel die Erzeugende $UU_1$ des Punktes $U$ der Schraubenlinie, deren Aufriß man aus $U''$ als Tangente an den Umriß der Fläche zieht, oder durch Bestimmung ihres Punktes $U_1''$ der Axe $a''$ bestimmt. $VV_1$ liegt in der asymptotischen Ebene der Schraubenfläche für die Erzeugende $UU_1$, und diese Ebene steht senkrecht auf der Meridianebene $Ua$. Sie enthält daher die auf $Ua$ senkrechte (zu $\mathbf{P}_1$ parallele) $UV$ ($U'V' \perp M'U'$, $U''V'' \parallel x$), und auf $U''V''$ wird $V''$ aus $V'$ bestimmt. Dann zieht man $V''V_1'' \parallel U''U_1''$.

Um den *Schlagschatten der Fläche auf* $\mathbf{P}_1$ zu erhalten, verzeichne man den Schlagschatten $B'C_2D_2$ der Schraubenlinie, d. i. eine verschlungene Cykloide (341), für welche der Kreis $B'C'$ der beschreibende, $l_1$ der wälzende Kreis, und die Tangente des letzteren in $E$ die Bahnlinie ist; sodann verzeichne man den Schatten $B_3C_3D_3$ der Schraubenaxe $a$, verbinde die zusammengehörigen Punkte durch die Schatten der Erzeugenden, wie $B'B_3$, $C_2C_3$, $D_2D_3$, und zeichne die Einhüllende $s_1$ an die letzteren als Umriß des Schattens der Fläche oder als Schlagschatten der $s$.

Der *Schlagschatten* $s_2$ *der Grenzerzeugenden* $DD_1$ *auf die untere Seite unseres Flächenastes* ist vermittelst der Schnittpunkte des Schlagschattens $D_2D_3$ der $DD_1$ und derjenigen der beschatteten Erzeugenden auf $\mathbf{P}_1$ bestimmt, wie es durch einige projicirende Linien angedeutet ist.

Zur vollständigeren Erkenntnis der Formen ist in Fig. 187 in Fig. 187.
verkleinertem Maßstabe der Schlagschatten zweier Gänge unserer Schraubenfläche auf $\mathbf{P}_1$ verzeichnet, denen noch die oberen Flächen-

Fig. 187.



äste in der Ausdehnung der unteren zugefügt sind. $B_2C_2D_2C_4D_4$ und $B_3C_3D_3C_5D_5$ sind die Schatten bezw. der unteren und der oberen begrenzenden Schraubenlinie. Die Äste der Schlagschattengrenze $s_1$ der Fläche haben auf beiden Seiten des Schattens $a_1$ der Schraubenaxe verschiedene Formen; ihre Asymptoten sind die Schatten der Asymptoten der Eigenschattengrenze $s$.

### d) Die Lichtgleichen der Schraubenfläche, insbesondere der geschlossenen schiefen.

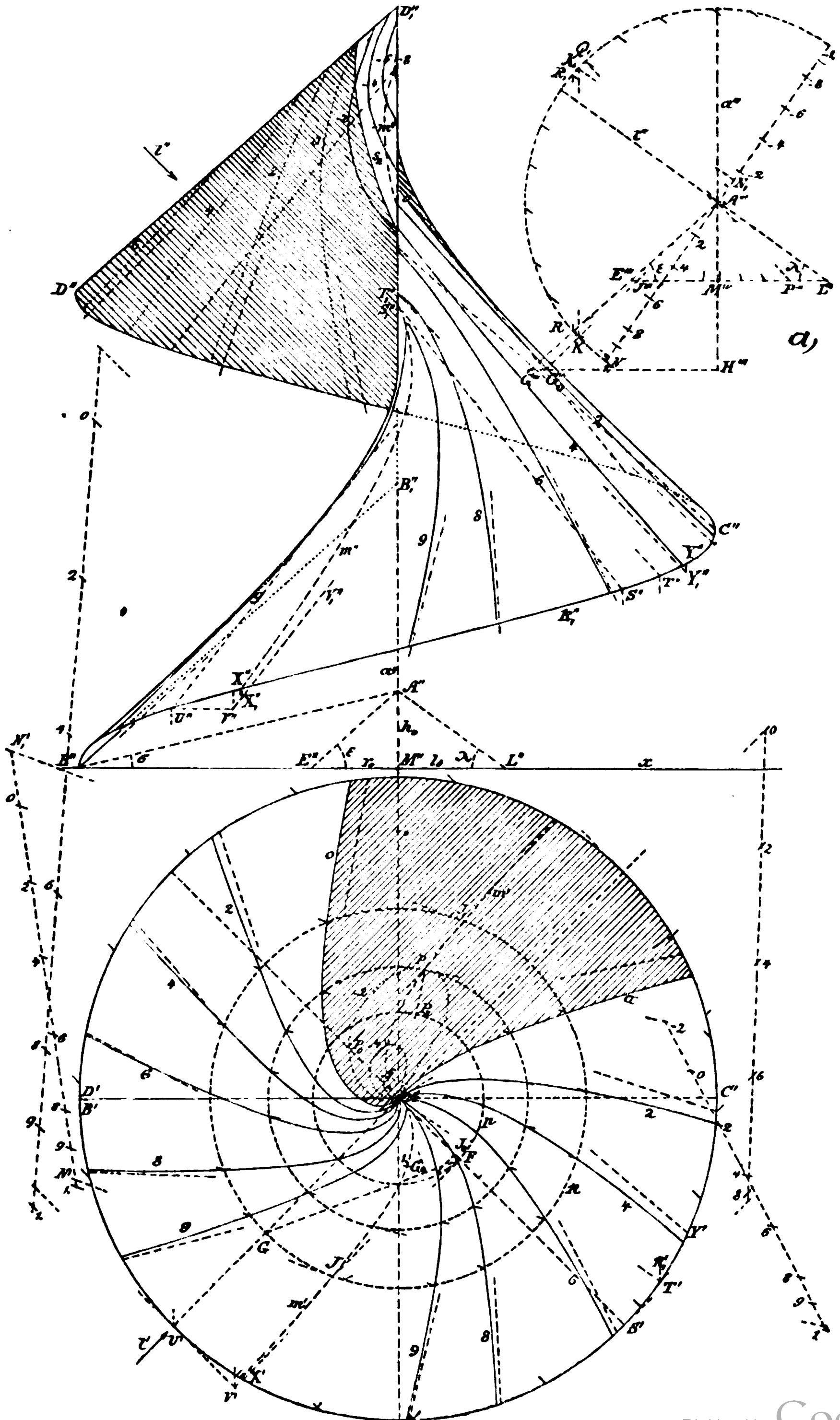
**463.** *Aufg. Die Lichtgleichen einer beliebigen Schraubenfläche zu bestimmen.*

*Aufl.* Um die Punkte der Lichtgleichen auf einer beliebigen Schraubenlinie einer Schraubenfläche, zu deren Axe die Grundrißebene senkrecht gestellt sei, zu finden, denken wir uns in einem Punkte $P$ jener Schraubenlinie die Berührungsebene $\mathbf{T}$ der Fläche, sodann in $\mathbf{T}$ und durch $P$ die Linie des größten Falles $f$ der $\mathbf{T}$ gegen die Grundrißebene und die Tangente $t$ des Meridians der Fläche gelegt; dann sind bei der Bewegung des Punktes $P$ auf derselben Schraubenlinie offenbar unveränderlich: 1) die Neigung der Berührungsebene $\mathbf{T}$ gegen die Axe und gegen die Grundrißebene, 2) der Winkel der durch $P$ gehenden Linien $f$ und $t$, und 3) die Projektion $f't' = \delta$ dieses Winkels auf die Grundrißebene. Ein Richtkegel der Fläche ist ein Umdrehungskegel, dessen Axe $\parallel a$, dessen Berührungsebenen $\parallel \mathbf{T}$, und dessen Erzeugenden $\parallel f$; und denjenigen Richtkegel, welcher über dem Grundriß jener Schraubenlinie, einem Kreise $k$, in demselben Sinne der Neigung gegen $a$, welchen die Fläche entlang dieser Schraubenlinie besitzt, beschrieben wird, wollen wir den *Hilfskegel* nennen. Zieht man nun im Grundriß in einem Punkte $P'$ des $k$ jene Falllinie $f'$ (senkrecht zum Normalschnitte in $P$), die Meridiantangente $t'$ (ein Halbmesser des $k$), und die mit $f'$ parallele Erzeugende des Kegels, so ist der Winkel der letzteren zwei Linien ebenfalls $= \delta$, und die Beleuchtungsstärke der Schraubenfläche in $P$ und der Kegelfläche in der zu $f$ parallelen Erzeugenden und in deren Punkte auf $k$ sind gleich. Man erhält also im Grundriß die Lichtgleichenpunkte der Schraubenfläche auf $k$ aus denen des Kegels auf $k$ durch Drehung des $k$ um seinen Mittelpunkt um den Winkel $\delta$ (im Sinne von $f'$ gegen $t'$) oder auch: *Die Punkte des Grundrisses der Lichtgleichen der Schraubenfläche auf einem Kreise $k$, welcher der Grundriß einer Schraubenlinie ist, fallen mit denen des Hilfskegels zusammen, welcher über $k$ im Sinne des durch die Schraubenlinie gehenden Flächenastes beschrieben ist, wenn die Richtung des Lichtstrahles für den Kegel aus demjenigen für die Schraubenfläche durch Drehung um die Schraubenaxe um den Winkel $\delta = f't'$ entstanden ist.*

**464.** *Aufg. Die Lichtgleichen der geschlossenen schiefen Schraubenfläche zu bestimmen.*

Fig. 188. *Aufl.* Es sei wieder ein Gang des unteren Astes der rechtsgängigen Schraubenfläche dargestellt, $a$ ($M'$, $a''$) die auf $\mathbf{P}_1$ senk-

Fig. 188.



rechte Axe, $BCD = k_1$ die begrenzende Schraubenlinie, $BB_1$ eine zu $\mathbf{P}_2$ parallele Erzeugende, $B$ und $M$ die ersten Spuren der $k_1$ und der $a$, $B''A''$ die Parallele zu einer zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Tangente der $k_1$, $A''$ ihr Schnittpunkt mit $a''$, daher $M''A'' = h_0$ die reducirte Ganghöhe, $l$ der Lichtstrahl. Um Überladung zu vermeiden, zeichne man in einer Nebenfigur $a$) die $M'''A'''$ $(a''')$ # $M''A''$, $M'''E''' \parallel x$, $A'''E''' \parallel A''E'' \parallel B_1''B''$, so ist $M'''E''' = M''E'' = r_0 =$ dem Parameter der Archimedischen Spirale der Fläche, womit als Halbmesser man aus $M'$ den Parameterkreis $p$ zeichne; man ziehe ferner $l'''$ als $A'''L''' \parallel A''L''$ in der Richtung des um $a$ parallel zu $\mathbf{P}_2$ gedrehten Lichtstrahles und konstruire zur weiteren Benutzung mit einem im Verhältnis zum Grenzkreise $k_1'$ nicht zu kleinen Kreise das Tangentialbüschel, dessen geteilter Durchmesser 1. — 1. also auf $l'''$ senkrecht steht.

Um nun die Punkte der *Grundrißlichtgleichen* auf einem beliebigen aus $M'$ gezogenen Kreise $k$ zu erhalten, schneide man $k$ mit dem aus $M'$ gegen die Lichtquelle hin (wie wir annehmen wollen) gezogenen Strahle $l'$ in $G$, ziehe den zu $M'G$ senkrechten Halbmesser $M'F$ des $p$ auf der Seite der Erweiterung der durch $G$ gehenden Archimedischen Spirale der Fläche, so ist $GF$ die Normale dieser Spirale in $G$ (449), also auch der Grundriß der Falllinie $f$ der Berührungsebene der Fläche in $G$. Diese Ebene enthält noch die Erzeugende $GM'$ (als Meridiantangente $t$) und wird von der durch den Schnittpunkt der $GM'$ mit der $a$ gelegten horizontalen Ebene in der zu $GF$ senkrechten Geraden $M'G_0$ geschnitten. Bestimmt man nun auf der Erzeugenden $A'''E'''$ den Punkt $G'''$ so, daß sein Abstand $H'''G'''$ von $a''' = M'G$ ist, trägt auf $H'''G'''$ die $H'''G_0''' = G_0G$ auf, so besitzt $A'''G_0'''$ dieselbe Neigung gegen $a'''$, wie die Falllinie $GG_0$ gegen $a$. Andererseits ist $\sphericalangle G_0GM' = f't' = \delta$; und dreht man das $\triangle M'GG_0$ um $M'$ in $M'JJ_0$, so daß $M'G_0$ in $M'J_0$ auf $M'F$, daher $G_0G$ in $J_0J \parallel l'$ kommt, so ist $M'J$ der im Grundriß um $\delta = f't'$ gedrehte Lichtstrahl $l'$. Kürzer erhält man $J$ auf $k$, wenn man beachtet, daß sein Abstand von $l'$ gleich demjenigen des $M'$ von $GF$ ist.

Nun bestimmt man nach dem Verfahren der Nr. 204 auf dem Hilfskegel, dessen Grundkreis $k$, dessen Axe $a$, und bei dem die Neigung der Erzeugenden gegen $a = H'''A'''G_0'''$ ist, die Punkte der Grundrißlichtgleichen auf $k$, wenn $M'J$ den Grundriß und $\lambda$ die Grundrißneigung der Lichtstrahlen bezeichnen. Schneidet $A'''G_0'''$ den Einheitskreis des Tangentialbüschels in $K$ und ist $K_1$ der Punkt dieses Kreises, für welchen $KK_1 \parallel a'''$, so fällt man aus $K$ und $K_1$ Senkrechte auf den zu $l'''$ senkrechten Stärkemaßstab nach $N$ und

$N_1$, zieht an $k$ zwei parallele Tangenten in $J$ und $J_1$, und legt die Länge $NN_1$ mit dem auf ihr befindlichen Stücke des Stärkemaßstabes, oder ein Vielfaches (hier Zweifaches) davon, zwischen die Parallelen, so daß $N$ nach $N'$ in die Tangente in $J$, $N_1$ nach $N_1'$ in die Tangente in $J_1$ gelangt, zieht aus den Teilungspunkten von $N'N_1'$ Parallele zu jenen Tangenten, so schneiden diese den Kreis $k$ in den gesuchten Punkten der Grundrißlichtgleichen.

**465.** Um die *Tangenten der Grundrißlichtgleichen in $M'$* zu erhalten, beachte man, daß die Berührungsebenen der Fläche in den Schnittpunkten der Lichtgleichen mit $a$ die $a$ enthalten, also ein Büschel von Ebenen bilden, deren erste Spuren die gesuchten Tangenten sind. In Bezug auf die Beleuchtung bilden aber diese ersten Spuren die Strahlen des Tangentialbüschels $M'$, in welchen die Berührungsebenen jenes Hilfskegels übergehen, dabei geht $A'''G_0'''$ in $a'''$ über, und hierdurch ist das zu benutzende Stück (wie $NN_1$) des Stärkemaßstabes bestimmt, das (in dreifacher Größe) zwischen die zu $l'$ parallelen Tangenten etwa des Kreises $k_1'$ geschoben wird, indem $l'$ den Nullstrahl bildet. Wegen der Symmetrie genügt die Hälfte. Die aus $M'$ nach den Teilpunkten des $k_1'$ gezogenen Strahlen bilden die gesuchten Tangenten.

Um *die unendlich fernen Punkte und die Asymptoten der Grundrißlichtgleichen* zu erhalten, lasse man $G$ auf $l'$ ins Unendliche rücken. Dann rückt $J_0$ in $F$, und $J$ auf der durch $F$ parallel zu $l'$ gezogenen Geraden ins Unendliche. Daraus folgt, daß für den unendlich großen Kreis $k$ der (für alle Helligkeiten gleiche) Drehungsbogen $GJ$ zu $M'F = r_0$ wird; zugleich geht $G_0$ in $F$, daher $G_0'''$ in $G'''$, und der Hilfskegel in den Asymptotenkegel über, dessen Grundrißlichtgleichen daher die unendlich fernen Punkte derjenigen unserer Fläche bestimmen. Daher gilt: *Die Asymptote einer Grundrißlichtgleiche der geschlossenen Regelschraubenfläche ist diejenige Tangente des Parameterkreises, welche gegen den unendlich fernen Punkt der Kurve auf der Seite der Öffnung der Archimedischen Spirale des Flächenastes gezogen wird.* Für beide Flächenäste erhält man dieselbe Asymptote, weil beim Wechsel des Astes sich sowohl der Sinn nach dem unendlich fernen Punkte als die Seite der Öffnung der Spirale umkehren. Da die Asymptote der Lichtgleiche selbst in der Asymptotenebene liegt, und der Parameterkreis die erste Projektion derjenigen Schraubenlinie ist, welche die Rückkehrkante der asymptotischen Fläche bildet (448), *so sind die Asymptoten der Lichtgleichen der geschlossenen Regelschraubenfläche und, wie wir sogleich sehen werden, von jeder windschiefen Fläche die Erzeugenden der asymptotischen Fläche von übereinstimmender Helligkeit.*

Fig. 188. Der Satz gilt in der angegebenen Allgemeinheit. Denn hat man auf irgend einer Fläche zwei benachbarte Lichtgleichen (von unendlich kleinem Helligkeitsunterschiede), so kann man zu einem Punkte der einen Kurve einen benachbarten Punkt der andern Kurve so angeben, daß die Berührungsebenen der Fläche in beiden Punkten sich in der Tangente der beiden in einander gerückten Lichtgleichen schneiden. Alle zu dem unendlich fernen Punkte einer Lichtgleiche einer windschiefen Fläche benachbarten Punkte der benachbarten Lichtgleiche sind aber unendlich ferne Punkte der Fläche; die Berührungsebenen in denselben sind daher benachbarte Asymptotenebenen, ihre Schnittlinie ist eine Erzeugende der asymptotischen Fläche, und diese ist die Asymptote an jene beiden in einander gerücken Lichtgleichen. — Diese Asymptoten werden durch den *Richtkegel* konstruirt. Wird derselbe zu einer *Richtebene*, so haben, wie wir beim Konoide sahen (397), alle je zwischen gewissen Grenzen liegenden Lichtgleichen diejenigen *Kanten* zu Asymptoten, deren *Kuspidalpunkte unendlich ferne* sind.

Die Grundrißlichtgleichen des Asymptotenkegels sind in der Figur auf dem Kreise $k_1$, über welchem der Hilfskegel errichtet gedacht wird, mittelst der Hilfspunkte $R$, $R_1$ des Einheitskreises und des entsprechenden Stückes des Stärkemaßstabes bestimmt, das (in vierfacher Größe) zwischen den $\perp l'$ an $k_1$ gezogenen Tangenten eingeschaltet wurde.

**466.** *Die Maximalkurve.* Wir haben auf einem beliebigen Kreise $k$ einen vergleichungsweise hellsten Punkt $J$ auf der oberen (positiven) Flächenseite erhalten, welchem symmetrisch in Bezug auf $M'$ ein hellster auf der unteren (negativen) Flächenseite gegenüber liegt. Die Kurve $m$, $-m$ aller dieser Punkte heißt die *Maximalkurve* der Fläche; und da in jedem ihrer Punkte $J$ die Tangente der Normalschnitte der Fläche $\perp l'$ ist, da also alle diese Tangenten senkrecht auf der Ebene $la$ stehen, so ergibt sich:

*Für jede Schraubenfläche ist die Maximalkurve zugleich ihre Umrißlinie oder Eigenschattengrenze für eine auf der Axe a und dem Lichtstrahle l senkrechte Seh- bezw. Lichtrichtung.*

Für unsere Fläche ist es die in Nr. 454 bestimmte Linie.

Um die Punkte der Lichtgleichen auf $m$ zu bestimmen, beachte man zunächst, daß wenn die $A'''G_0'''$ die $M'''E'''$ in $J'''$ schneidet, $M'''J''' = M'G_0 = M'J_0$ ist. Denn aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgt

$$GM' : GG_0 = M'F : M'G_0$$

und $$H'''G''' : H'''G_0''' = M'''E''' : M'''J'''.$$

Da aber die drei ersten Glieder dieser Proportionen einander paarweise durch Konstruktion gleich sind, so müssen es auch die beiden letzten sein. Will man nun einen Punkt $P$ der $m$ von einer bestimmten Helligkeit, z. B. $= -2$, erhalten, so nimmt man auf dem Einheitskreise $Q_1$ (als $K_1$) in $-2$ an, zieht $A'''Q_1$ bis $P'''$ auf $M'''E'''$, legt die $M'''E'''$ in $M'F$, so daß $M'''$ nach $M'$, $E'''$ nach $F$, und dann $P'''$ nach $P_0$ kommt, zieht durch $P_0$ eine Parallele zu $l'$, so trifft diese die $-m$ in $P$. Dieser Punkt ist noch dadurch bestimmt, daß der Schnittpunkt $P_2$ der $M'P$ mit $p$ von dem zu $l'$ senkrechten Durchmesser $M'F$ des $p$ einen Abstand $= M'P_0 = M'''P'''$ besitzt (454).

Eine Grundrißlichtgleiche wird in ihren Schnittpunkten mit $m'$ von einem aus $M'$ gezogenen Kreise berührt, weil in den beiderseits benachbarten Punkten dieses Kreises kleinere Helligkeiten stattfinden.

*Die Verzeichnung der Grundrißlichtgleichen* dürfte nun am genauesten und kürzesten dadurch geschehen, daß man ihre Tangenten in $M'$, ihre Asymptoten, ihre Punkte (wie $P$) auf der Maximalkurve, und dann diejenigen auf einigen passend verteilten Kreisen $k$, welche zweckmäßig durch Punkte, wie $P$, gelegt werden, ermittelt. Man erhält dadurch zugleich die Eigenschattengrenze. Hat man diese aber vorher auf andere Weise gezeichnet, so könnte man sie zur Gewinnung des Nullpunktes der Teilung für die Kräftemaßstäbe der einzelnen Kreise $k$ benutzen. Doch empfiehlt es sich am meisten, ihren innerhalb des Kreises $p$ (oder des $l_1$) liegenden, mittelst Krümmungskreisen verzeichneten Teil zum Anhalte für die anderen Lichtgleichen zu benutzen, ihre entfernteren Teile aber zur größeren Stetigkeit in der Schaar aller Kurven mit diesen in gleicher Weise zu konstruiren.

**467.** Die *Aufrißlichtgleichen* erhält man durch Hinaufprojiciren der Punkte der Erzeugenden (von denen nur die Hälfte der benutzten angegeben ist) und der Punkte der begrenzenden Schraubenlinie. Die *Punkte auf der Axe* $a''$ bestimmt man mittelst der Tangenten der Grundrißlichtgleichen in $M'$. So wird die Lichtgleiche 8 in $M'$ von der Erzeugenden $M'T'$ berührt, deren Aufriß $T''T_1''$ die $a''$ in dem gesuchten Punkte $T_1''$ schneidet. Ist $SS_1$ die nächst liegende angegebene Erzeugende, so ist $S_1''T_1'' = \text{Bog.}\, S'T' \,.\, \text{tg}\, \sigma$ leicht mit dem Zirkel abzugreifen. Übrigens berührt die Aufrißgleiche in ihrem Punkte $T_1''$ der Axe nicht die durchgehende Erzeugende, obgleich es im Grundriß stattfindet, weil die Berührungsebene der Fläche in $T_1 \perp \mathbf{P}_1$ steht.

Die *Asymptoten der Aufrißlichtgleichen* werden aus denen des

Grundrisses bestimmt, wie die der Eigenschattengrenze in Nr. 462 bestimmt wurde. In gleicher Weise geschieht es für die Maximalkurve $m$; die Asymptote $V''V_1''$ der $m''$ wird demgemäß parallel zu der Erzeugenden von $U''$ durch $V''$ gezogen. Nachdem so die Asymptote einer der Kurven bestimmt ist, erhält man diejenigen der übrigen etwas einfacher, wenn man beachtet, daß die durch den Schnittpunkt $X'$ oder $Y'$ einer Grundrißasymptote mit dem $k_1'$ gezogene Senkrechte zu $\mathbf{P}_1$ stets das gleiche Stück zwischen der Schraubenlinie $k_1$ und der Asymptote enthält. Man macht daher z. B. $Y''Y_1'' = X''X_1''$. Jedoch kann man diese Größe auch unmittelbar bestimmen durch $X''X_1'' = \text{Bog.}\, U'X' . \operatorname{tg} \sigma - V'X' . \operatorname{tg} \varepsilon$, was leicht mit dem Zirkel abzugreifen ist.

Den *Schlagschatten* $s_2$ *der Kante* $DD_1$ auf die Fläche könnte man, wie in Nr. 462, mittelst des Schlagschattens der in Betracht kommenden Erzeugenden auf $\mathbf{P}_1$ bestimmen. Da aber letztere in der Figur nicht schon vorhanden sind, ist es hier zweckmäßiger, die Schatten der $DD_1$ auf die Meridianebenen der beschatteten Erzeugenden, d. i. die Verbindungslinien der Schatten von $D$ auf diese Ebenen mit dem Punkte $D_1$, jedesmal mit den Erzeugenden derselben Ebene zum Schnitt zu bringen.

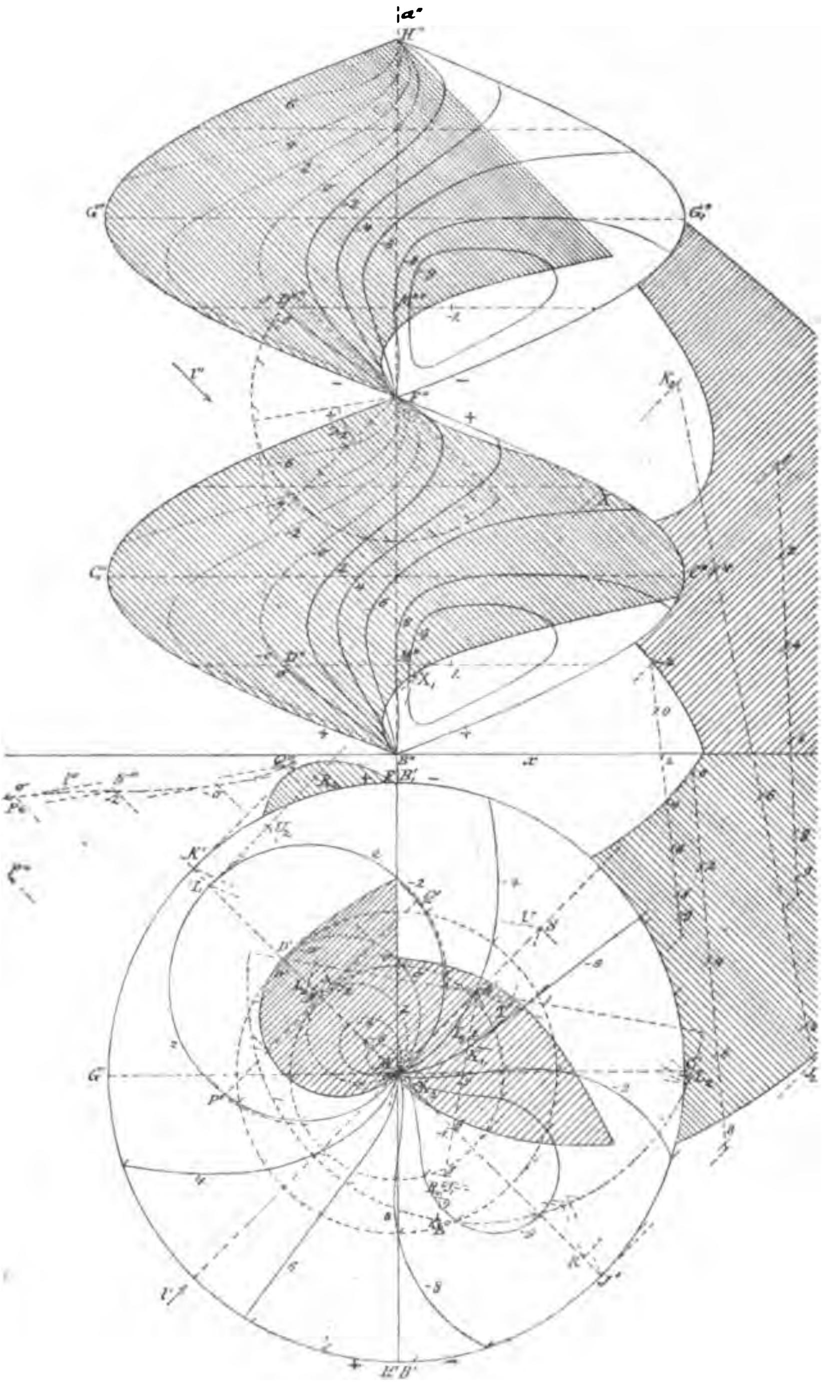
### e) Die geschlossene gerade Schraubenfläche, ihre Schattengrenzen und Lichtgleichen.

**468.** *Aufg. Von der geschlossenen geraden Schraubenfläche (Wendelfläche) bei Parallelbeleuchtung die Eigenschattengrenze, den Schlagschatten auf die Projektionsebenen* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, *und auf die Fläche selbst, und die Lichtgleichen zu bestimmen.*

Fig. 189. *Aufl.* Stehe die Schraubenaxe $a$ $(M', a'') \perp \mathbf{P}_1$, sei ein Gang der rechtsgängigen Fläche gezeichnet, der durch einen koaxialen Cylinder, also durch die einfachen Gänge zweier gegenüberstehenden Schraubenlinien $BCFGH$ und $B_1C_1F_1G_1H_1$ (in der Figur nicht alle angegeben), und durch zwei auf $\mathbf{P}_2$ senkrechte Erzeugende $BB_1$, $HH_1$ begrenzt ist. $l$ sei der Lichtstrahl. Man ziehe $l'$ durch $M'$, $M'D' \perp l'$, trage auf $l'$ die $M'A' = h_0 = B''F'' : 3{,}141$ auf, bestimme $D'$ auf $M'D'$ so, daß $\measuredangle M'D'A' = \lambda =$ der Neigung von $l$ gegen $\mathbf{P}_1$, also $M'D' = l_0$ und $D'$ der *Ausgangspunkt* (455), daß also die Fläche in den durch $D'$ dargestellten Punkten von $l$ berührt wird.

Die *Normalkurve* ist die gerade Erzeugende, die Eigenschattengrenze im Grundriß daher der Ort der Fußpunkte der von $D'$ auf die sich um $M'$ drehende Gerade gefällten Senkrechten; d. h.: *die Eigenschattengrenze im Grundriß ist der Kreis über* $M'D'$ *als Durchmesser.*

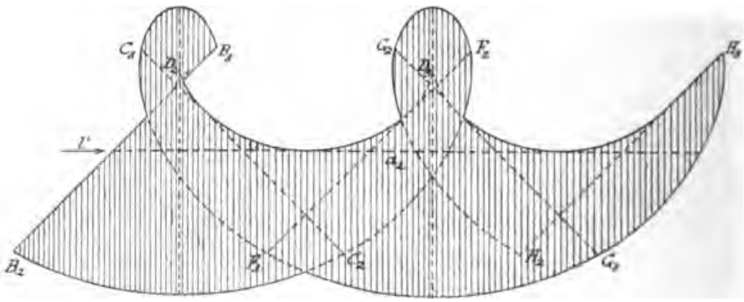
Fig. 189.



*Die Eigenschattengrenze selbst ist eine Schraubenlinie von der halben Ganghöhe der Fläche.* Denn der von dem Punkte auf dem Kreise $M'D'$ beschriebene Bogen ist mit seiner Steigung proportional, weil beide mit dem Drehungswinkel der Erzeugenden proportional sind; dabei wird dieser Kreis $M'D'$ bei einer halben Drehung der Erzeugenden ganz durchlaufen. Jeder Umdrehungscylinder, welcher $a$ zu einer Erzeugenden hat, schneidet die Fläche in einer solchen Schraubenlinie.

Der *Schlagschatten* der Fläche auf $\mathbf{P}_1$ erscheint in der Figur nur Fig. 190. in geringer Ausdehnung und ist deswegen in Fig. 190 gesondert in halber Größe dargestellt. Die Schlagschattengrenze ist der Schatten

Fig. 190.



der Eigenschattengrenze, also jener Schraubenlinie von der halben Ganghöhe. Da diese von $l$ berührt wird, ist ihr Schatten eine *gemeine Cykloide* (341); die Schatten der beiden begrenzenden Schraubenlinien sind zwei *allgemeine*, in der Figur verschlungene *Cykloiden*; die Schatten der Erzeugenden sind Tangenten jener gemeinen Cykloide, deren Mittelpunkt auf dem Schatten $a_2$ von $a$ um eine mit ihrer Drehung in unveränderlichem Verhältnis stehende Länge Fig. 189. fortschreiten. Vom Schlagschatten auf $\mathbf{P}_2$ ist in Fig. 189 wenig ersichtlich; er wird am sichersten als affine Figur zum Schlagschatten auf $\mathbf{P}_1$ konstruirt. Die Schlagschatten auf die Fläche sind durch das Verfahren der Schnitte der Schatten der schattenwerfenden und der beschatteten Linien (insbesondere der Erzeugenden) auf $\mathbf{P}_1$ konstruirt. Die *Grenzpunkte* der Eigen- und Schlagschattengrenzen sind die Punkte $D$, in welchen die Eigenschattengrenze von $l$ berührt wird.

**469.** Bei der Bestimmung der *Grundrißlichtgleichen* beachte man, daß die Erzeugende $M'D'$ die *Maximalkurve* ist, weil $r_0 = \infty$ wird, oder weil in den Punkten der $MD$ die Berührungsebenen der Fläche senkrecht auf der Ebene $al$ stehen (466). Sie bilden ein Ebenenbüschel mit $MD$ als Axe; und die Neigung $\nu$ der Berührungsebene

der Fläche in irgend einem Punkte $J$ der $MD$ gegen die $\mathbf{P}_1$ ist durch $\operatorname{tg} v = h_0 : M'J'$ gegeben, so daß $v = \sphericalangle M'A'J'$. Daher ist auch das Büschel der Strahlen, welche aus $A'$ nach den Punkten der $M'D'$ gezogen werden, einem senkrechten Schnitte jenes Ebenenbüschels kongruent, wobei jeder Strahl den Berührungspunkt der durch ihn dargestellten Ebene mit der Fläche enthält. Die Helligkeit jeder dieser Ebenen, sowie der Fläche in ihrem Berührungspunkte, erhält man daher durch das Tangentialbüschel $A'$, in welchem $A'D'$ den Lichtstrahl darstellt. Man trage daher von $A'$ aus auf einer Senkrechten zu $A'D'$ fünf gleiche Teile als halben Stärkemaßstab bis $E$ auf, ziehe den Einheitskreis aus $A'$ durch $E$, schneide ihn mit den durch die Teilungspunkte $\perp A'E$ gezogenen Geraden, so bilden die aus $A'$ nach den Schnittpunkten gezogenen Strahlen das Tangentialbüschel, welches auf $M'D'$ die Punkte der gesuchten Lichtgleichen einschneidet, insbesondere durch $A'E$ den *hellsten Punkte* 1..

Um sodann die Punkte auf einem beliebigen aus $M'$ gezogenen Kreise, z. B. dem begrenzenden, zu erhalten, bestimme man die Helligkeit in seinen Schnittpunkten $J'$ und $K'$ mit $M'D'$ vermittelst der Punkte $J_1$, $K_1$ des Stärkemaßstabes, derart, daß auf $J_1K_1 = A'J_1 \pm A'K_1$ der Nullpunkt $A'$ enthalten ist oder nicht, je nachdem der gewählte Kreis $J'K'$ die Eigenschattengrenze (Kreis $M'D'$) schneidet oder nicht. Zwischen die parallel zu $l'$ durch $J'$, $K'$ gezogenen Geraden schalte man dann die Strecke $J_1K_1$ oder ein Vielfaches desselben (in der Figur das fünffache) als $J_2K_2$ ein, und übertrage darauf kongruent oder ähnlich die auf $J_1K_1$ enthaltenen Teilungspunkte des Maßstabes. Die durch diese übertragenen Teilungspunkte zu $l'$ gezogenen Parallelen schneiden auf dem Kreise $J'K'$ die Punkte der Lichtgleichen ein. Es ist vorteilhaft die Kreise durch Punkte der Lichtgleichen auf $M'D'$ zu legen, wie in der Figur durch 0 und $-2$ geschehen ist. — Die *Tangenten der Kurven* in $M'$ werden (465) durch das Stück eines Stärkemaßstabes bestimmt, dessen Hälfte der in $l'$ liegende Halbmesser des Einheitskreises bildet, und dessen Teilung sich auf diejenige von $A'E$ senkrecht projicirt.

Indem die beiden Flächenäste durch Verschiebung $\parallel a$ um die halbe Ganghöhe zur Deckung gebracht werden können, fallen die Grundrißlichtgleichen derselben zusammen. Jede derselben ist symmetrisch zu $M'D'$, während bei der schiefen Schraubenfläche nur die Kurve des einen Astes mit der des andern symmetrisch war.

**470.** Da die Grundrißlichtgleichen, welche der kreisförmigen Nulllinie benachbart sind, der Kreisgestalt nahe kommen, so ist es

erwünscht, ihre *Krümmungskreise* in ihren Scheiteln benutzen zu können. Wir haben dieselben daher bestimmt, und zwar *mit Hilfe des Verfahrens der ähnlichen Figur*, das wir bisher nur auf die Bestimmung von Tangenten anwendeten. Um so den Krümmungshalbmesser $r_1$ der Lichtgleiche 2 in ihrem Scheitel $L$ zu ermitteln, denkt man sich auf $LM'$ die unendlich kleine Strecke $LL' = x$ in einem solchen Sinne aufgetragen, daß der aus $M'$ durch $L'$ gezogene Kreis $k$ die Lichtgleiche 2 schneidet; wir können die zwei unendlich nahe bei $L$ liegenden Schnittpunkte dadurch erhalten, daß wir auf dem von $L'$ ausgehenden Durchmesser des $k$ den Stärkemaßstab auftragen, welcher zur Bestimmung der Lichtgleichenpunkte auf $k$ dient (469), und im Punkte $2 = L''$ desselben die Senkrechte zu $ML'$ ziehen; dieselbe enthält die beiden Schnittpunkte der Lichtgleiche 2 mit $k$. Sei nun $L'L'' = x_1$, und geben wir dieser stets gegen $M'$ gerichteten Strecke das positive Zeichen, wodurch das Zeichen von $x$ als positiv oder negativ bestimmt ist, sei ferner $r = M'L = M'L'$ (ihr Unterschied $= 0^1$), so erhalten wir (208)

$$r_1 = r \frac{x_1}{x_1 + x}.$$

Nun ist $x_1$ von $x$ in der Art abhängig, daß der Unterschied der Helligkeiten auf $LM'$ an den Endpunkten von $x$, also in $L$ und $L'$, gleich ist dem Unterschiede der Helligkeiten auf dem Kreise $k$ in $L'$ und in jenen Schnittpunkten mit 2, oder gleich dem Unterschiede der Angaben des Stärkemaßstabes des $k$ in den Endpunkten des $x_1$, also in $L'$ und $L''$. Man erhält den Helligkeitsunterschied von $L$ und $L'$, wenn man $x$ aus $A'$ auf den Einheitskreis als Element desselben bei $L_2$ projicirt, und hierauf dieses Element senkrecht auf den Stärkemaßstab $A'E$ in $y$. $x_1$ steht dann zu $y$ in demselben Verhältnisse, wie der Durchmesser $LR$ des Kreises $k$ zu dem Stücke $L_1R_1$ ($= A'R_1 \underline{(+)} A'L_1$) des Stärkemaßstabes $A'E$, welches dem $LR$ zugehört.

Um nach diesen Bestimmungen die Konstruktionen ausführen zu können, vergrößere man $x$, $y$, $x_1$ in ein und demselben Verhältnisse zu den endlichen Strecken $x'$, $y'$, $x_1'$, und nehme $x' = LM'$ an. Die verhältnismäßig vergrößerte Projektion auf das verlängerte Element des Einheitskreises bei $L_2$ erhält man, wenn man zuerst aus $A'$ die $LM'$ auf die parallel zu ihr durch $L_2$ geführte Gerade in $L_2S$ projicirt, und $L_2S$ durch eine Parallele zu $LA'L_2$ auf die Tangente des Einheitskreises in $L_2$, welche Projektion gleich dem senkrechten Abstande $ST$ des $S$ von $LA'L_2$ ist. $y'$ ist dann die Projektion von $ST$ auf $A'E$, oder es ist $y' = TU$, wenn $SU \perp A'E$, $TU \parallel A'E$. Bestimmt man nun $L_1R_1$ auf $A'E$ aus $LR$ so, wie

$K_1 J_1$ aus $K'J'$ bestimmt wurde, zieht aus $L$ eine beliebige Gerade, etwa $\perp M'L$, trägt auf ihr $LU_2 = TU$, $LR_2 = L_1 R_1$ auf, und zieht $U_2 X_2 \parallel R_2 R$ bis $X_2$ auf $LR$, so ist $LX_2 = x_1'$, weil

$$x_1' : y' = x_1 : y = LR : L_1 R_1 .$$

Da ferner $r_1 = r x_1' : (x_1' + x')$, so erhält man $r_1 = LL_0$, wenn man auf $LU_2$ die $LX_1 = LX_2 = x_1'$ in irgend einem Sinne, und $X_1 X = x' = LM'$ in gleichem oder entgegengesetztem Sinne mit $x_1'$ aufträgt, je nachdem $x_1$ denselben oder den entgegengesetzten Sinn mit $x$ hat, und wenn man $X_1 L_0 \parallel XM'$ bis $L_0$ auf $LM'$ zieht.

*Übungsaufg.* Man suche durch ähnliche Betrachtungen die Tangente der Grundrißlichtgleiche zu bestimmen; aus ihr ergibt sich dann diejenige der Aufrißlichtgleiche.

**471.** Die *Aufrißlichtgleichen* erhält man durch Hinaufprojiciren der Grundrißpunkte auf den verzeichneten Erzeugenden, von denen nur die Hälfte der benutzten angegeben ist. Ihre Punkte auf der Axe $a''$ erhält man durch Hinaufprojiciren der Tangenten der Grundrisse in $M'$; und da einer Lichtgleiche im Grundriß zwei solche Tangenten zukommen, und diese einerseits in Bezug auf $M'D'$, andererseits in Bezug auf die dazu senkrechte $M'A'$ symmetrisch sind, so gehören zu einer Lichtgleiche im Aufriß zwei Punkte der $a''$, welche einerseits in Bezug auf $M''D''$, andererseits in Bezug auf die davon um $\frac{1}{4}$ Ganghöhe entfernte Erzeugende symmetrisch liegen, daher auch symmetrisch in Bezug auf $M''$ und auf jeden von $M''$ um eine ganze Anzahl von $\frac{1}{4}$ Ganghöhen entfernten Punkt der $a''$.

Die *Tangenten der Aufrißlichtgleichen in den Punkten* $B''$, $F''$, $H''$ *der Axe* werden durch ein Tangentialbüschel mit $l''$ als Projektion des Lichtstrahles und der Neigung $\lambda_2$ (hier $= \lambda$) des $l$ gegen $\mathbf{P}_2$ bestimmt, wie es in der Figur für $F''$ angegeben ist.

Bezeichnet man die von oben sichtbare Seite der von dem einseitigen Strahle $MB$ beschriebenen Flächenhälfte als *positiv*, so ist die von oben sichtbare von $MB_1$ beschriebene *negativ.* Im Grundriß ist dann die linke sichtbare Hälfte $+$, die rechte $-$, im Aufriß die obere sichtbare Hälfte $-$, die untere $+$.

Eine senkrecht zur Erzeugenden $M^{*\prime\prime} D^{*\prime\prime}$ gelegte Schnittebene $\mathbf{P}_3$, in $\mathbf{P}_1$ umgelegt, schneide diese Erzeugende in $N$, die Fläche in der Kurve $PNQ$, welche von oben gesehen, auf der $+$ Seite der Fläche liegt, und bemerken läßt, daß die Lichtstrahlen auf der einen Seite von $N$ die $+$ Seite, auf der andern die $-$ Seite der Fläche berühren, und so eine Lichtgleiche $+0$ und $-0$ erzeugen; daß ferner die Lichtgleiche 2 zwischen beiden Nullpunkten $-$, außerhalb $+$ ist.

**472.** *Übungsaufgabe.* Unter einem *gewundenen Kreiscylinder* versteht man eine Schraubenfläche, deren Normalkurve ein zur Schraubenaxe $a$ excentrischer Kreis ist. Diese Fläche begrenzt die in der Baukunst gebrauchte *gewundene Säule*, wobei der Abstand der Axe $a'$ von dem Mittelpunkte des Kreises etwa gleich $\frac{1}{8}$ von dessen Halbmesser, die Höhe des Ganges etwa gleich dem doppelten Durchmesser ist. Unter dieser Annahme sollen von der Fläche der Grundriß ($P_1 \perp a$), der Aufriß, der zweite Umriß in jeder Projektion, die Eigenschattengrenze, der Schlagschatten und die Lichtgleichen mit der Maximalkurve bestimmt werden (vergl. 455, 456, 463).

## f) Die Schraube, ihre Schattengrenzen und Lichtgleichen.

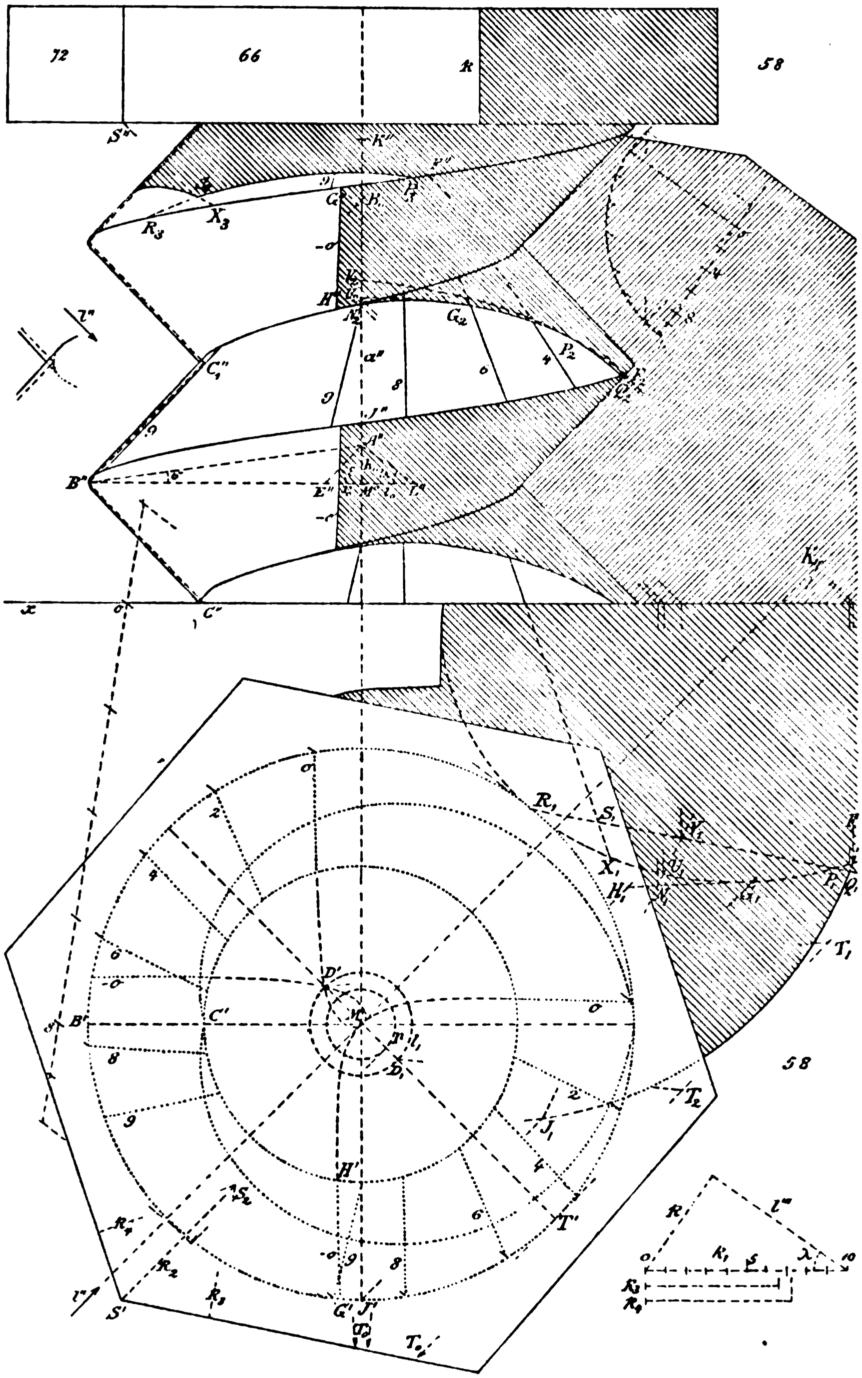
**473.** Die *Schraube* ist ein Körper, der durch eine begrenzte Fläche erzeugt wird, wenn diese eine Schraubenbewegung vollführt. Gewöhnlich enthält die Schraube als einen Bestandteil den Körper eines Umdrehungscylinders, und dieser heißt der *Kern*. Der übrige Bestandteil heißt das *Gewinde*, und kann stets erzeugt werden durch die ebene Figur eines Meridianschnittes, welche mit einer geraden Seite auf einer Erzeugenden der Kernoberfläche aufliegt und eine Schraubenbewegung um dessen Axe $a$ vollführt, derart daß zwischen den Gängen des Gewindes Lücken bestehen bleiben. Jede gerade oder krumme Seite der beschreibenden Figur erzeugt eine Schraubenfläche, welche für jede mit $a$ parallele Seite in einen Cylinder übergeht. Ein Körper, der einen Hohlraum besitzt, in welchen die Schraube hineinpaßt, heißt *Schraubenmutter*.

Ist diese beschreibende Figur ein mit der Grundlinie auf der Seite des Kerns aufsitzendes *gleichschenkliges Dreieck*, und ist die Ganghöhe gleich der Grundlinie, so entsteht die *einfache Schraube mit*
Fig. 191. *dreieckigem oder scharfem Gewinde;* ist die Figur eine Reihe zweier oder mehrerer solcher kongruenten, mit den Enden ihrer Grundlinien an einander stoßenden Dreiecke, und ist die Ganghöhe gleich der Summe der Grundlinien, so entsteht die Schraube mit doppel-
Fig. 192. tem oder mehrfachem Gewinde. Ist die Figur ein *Rechteck*, und die Ganghöhe größer als die mit $a$ parallelen Seiten, gewöhnlich doppelt so groß, so entsteht die *einfache Schraube mit viereckigem oder flachem Gewinde*, die entsprechend eine solche mit mehrfachem Gewinde werden kann. Die in beiden Fällen beschriebenen Schraubenflächen sind windschief, gechlossen, und bezw. schief oder gerade.

**474.** *Aufg. Die Schraube mit scharfem Gewinde mit ihren Eigenschatten, Schlagschatten und Lichtgleichen zu verzeichnen.*

Fig. 191. *Aufl.* Ihre Axe $a$ sei $\perp P_1$, und im Hauptmeridiane sei $CBC_1$

Fig. 191.



$(BC = BC_1)$ das Dreieck, welches das Gewinde erzeugt. Man verzeichne zuerst die Schraubenlinien, welche $B$, $C$ und $C_1$ beschreiben; letztere beide fallen zusammen. Die zweiten Umrisse der Schraubenflächen sind bei ihren vorhandenen Erstreckungen schwach gekrümmte Linien, die als gerade oder als fast gerade Berührende an die äußere und innere Schraubenlinie gezeichnet werden können. Seitwärts ist das teilweise Verdecken der Umrisse an der Stelle $C_1''$ durch eine Zeichnung von doppelter Größe deutlich gemacht. Die Schraube besitzt einen Kopf von der Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas. Die beiden horizontalen Grenzebenen schneiden die Schraubenflächen in den verzeichneten Stücken von Archimedischen Spiralen (452).

Zur Bestimmung der *Eigenschattengrenze* sind (wie in Nr. 458, Fig. 185, 186), aus $h_0 = M''A''$ die $r_0 = M''E''$ und $l_0 = M''L''$ bestimmt, mit diesen als Halbmessern die Kreise $p$ und $l_1$ gezeichnet, die Asymptoten und die Punkte der Kurve auf dem größten Kreise ermittelt, durch welche unter Benutzung des Doppelpunktes $D'$ und der Tangenten oder der Krümmungskreise in $D'$ die bestehenden Stücke der Eigenschattengrenze schon gezeichnet werden können.

Man zeichne nun den *Schlagschatten* der äußeren Schraubenlinie auf $\mathbf{P}_1$ unter Benutzung der Krümmungshalbmesser in den Scheiteln, welche (342) $= T'T_1$ und $= T'T_2$ sind $(T'T_0 = T'M'$, $\sphericalangle T_0D'T_1 = \sphericalangle T_0D_1T_2 = 90^0)$, wobei $F_1G_1$ der Schatten von $FG$ $(F''G'')$ ist; ferner die Schlagschatten der Eigenschattengrenzen, so $G_1H_1$ von $GH$, und die des Schraubenkopfes, so können durch Rückwärtsziehen der Lichtstrahlen aus den Schnittpunkten dieser Schlagschatten, die Grenzpunkte der auf die Oberfläche des Schraubengewindes fallenden Schlagschatten ermittelt werden, so aus $F_1$ der Schatten $F_2$ des $F$ auf die äußere Schraubenlinie. Weiter bestimme man von einer Erzeugenden $JK$ der Schraubenfläche den Schatten $J_1K_1$ auf $\mathbf{P}_1$. Sind $J, K$ die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der äußeren Schraubenlinie und der Axe $a$, ebenso $B$ und $B_0$ die entsprechenden Schnittpunkte der Erzeugenden $BC_1$, so ist der Höhenunterschied von $J$ und $K$ gleich demjenigen von $B$ und $B_0$, so daß, wenn wie hier, $J''K''$ in $a''$ fällt, $K''$ aus $J''$ durch $J''K'' = M''B_0$ bestimmt wird. Schneidet nun $J_1K_1$ die Linien $G_1H_1$, die verlängerte $F_1G_1$ und den benachbarten Schatten einer Schraubenkopfkante bezw. in in $N_1$, $U_1$, $V_1$, so ermittelt man hieraus im Aufriß auf $J''K''$ die Punkte $N_2$, $U_2$, $V_2$ als Punkte der Schlagschatten bezw. der Eigenschattengrenze $GH$, der äußeren Schraubenlinie und einer Schraubenkopfkante. Unter Benutzung einer weiteren Erzeugenden erhält man so die zusammengesetzte Linie $H''N_2G_2P_2Q_2$ als Schatten jener

drei Linien auf eine Fläche des Gewindes; sie hat bei $P_2$ eine Ecke, bei $G_2$ nicht. Ebenso bestimmt man aus den Schattenpunkten auf $\mathbf{P}_1$: $P_1, R_1, X_1$ und dem Schatten einer zwischenliegenden Erzeugenden die Schlagschatten $P_3S_3R_3$, $X_3S_3$ des Schraubenkopfes auf die oberste Fläche des Gewindes.

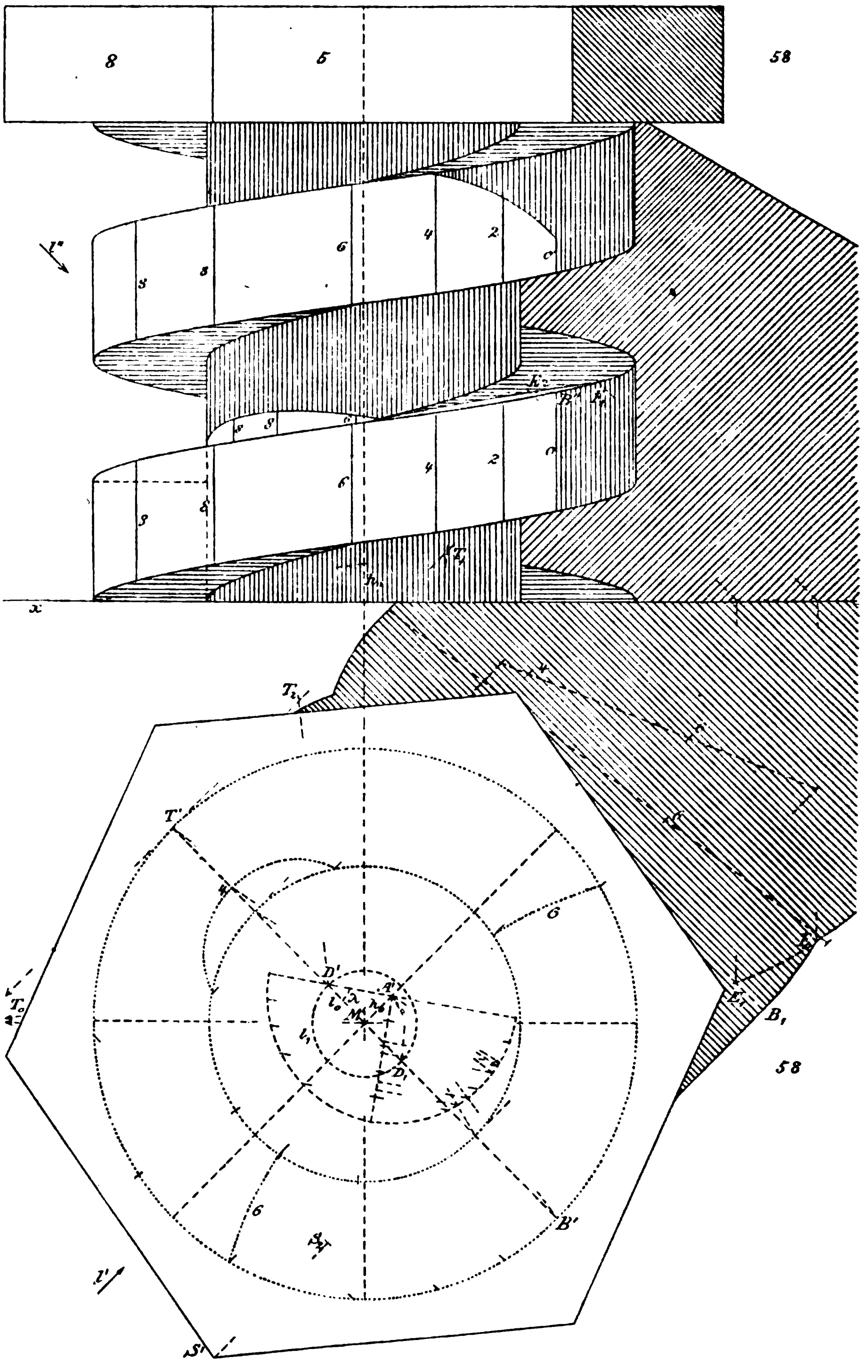
Von den *Lichtgleichen* sind nach Nr. 464, Fig. 188, mittelst des verzeichneten Tangentialbüschels die Punkte auf der äußeren Schraubenlinie bestimmt, wobei der Hilfskegel von dem Richtkegel nicht mehr unterschieden werden kann. Hierdurch werden auch die Punkte der Nulllichtgleiche genauer, als durch die (kleinen) Kreise $p$ und $l_1$, erhalten. Mittelst dieser Punkte allein können im Grundriß und daraus im Aufriß die kurzen Stücke der Lichtgleichen gezeichnet werden, da ihre Asymptoten (als Tangenten an $p$) und ihr Krümmungssinn (siehe Fig. 188) in Gedanken noch Anhalt bieten.

Die *Helligkeiten* der (ebenen) Seitenflächen des Schraubenkopfes sind nach I, 501 bestimmt, wobei $k$ die Länge ihrer vertikalen Kanten, $k_2 = S'S_2$ die Länge von deren Schatten auf $\mathbf{P}_1$, und $k_1$ die Länge des Schattens einer in der projicirenden Ebene eines Lichtstrahles senkrecht zu ihm gestellten Strecke $k$ ist. Dann ergibt sich die Helligkeit der mittleren und der linken Seitenfläche des Schraubenkopfes, und die der $\mathbf{P}_1$ (hier auch der $\mathbf{P}_2$) bezw. $= k_3 : k_1 = 0{,}66$, $k_4 : k_1 = 0{,}72$, $k : k_1 = 0{,}58$.

**475.** *Aufg. Die Schraube mit flachem Gewinde mit ihren Eigenschatten, Schlagschatten und Lichtgleichen zu verzeichnen.*

*Aufl.* Das Gewinde der Schraube und ihre Lücke, das ist auch Fig. 192. das Gewinde der Schraubenmutter, werden von kongruenten Rechtecken beschrieben; die vier Schraubenlinien der Eckpunkte sind, soweit sichtbar, verzeichnet. Man sieht nur kleine Stücke der oberen und der unteren Wendelfläche. Es sei wieder ein sechseckig prismatischer Schraubenkopf aufgesetzt. Die Schatten der Schraubenlinien auf $\mathbf{P}_1$ sind verschlungene Cykloiden mit $l_1$ als rollendem Kreise, dessen Halbmesser $M'D' = l_0$ aus $M'A' = h_0$ und $\lambda$ bestimmt ist. Von diesen Kurven sind nur kleine Bogen bei den Scheiteln notwendig, welche als Teile der Krümmungskreise verzeichnet werden können, deren Halbmesser $= T'T_1$ und $= T'T_2$ durch $T'T_0 = T'M'$, und $\sphericalangle T_0D_1T_1 = \sphericalangle T_0D'T_2 = 90^0$ (342) bestimmt sind. Der Schlagschatten des Kopfes und der Schraubenlinien auf die cylindrischen Flächen wird mittelst des Grundrisses, der Schlagschatten $F_2E_2$ auf die eine obere Wendelfläche mittelst der Schlagschatten auf $\mathbf{P}_1$ mit Zuhilfenahme einer Erzeugenden $BE$ der Wendelfläche bestimmt. Eine *Eigenschattengrenze der Wendelfläche* tritt nicht hervor; dagegen die beiden, jedoch verdeckten,

Fig. 192.



Lichtgleichen 4 und 6, deren Punkte auf dem Symmetriemeridiane $M'D'$ und auf dem größten und kleinsten Kreise nach Nr. 469 mittelst des Tangentialbüschels $A'$ verzeichnet sind. Die Lichtgleichen auf den Cylindern sind angegeben. Die Helligkeiten der ebenen Flächen sind wie in der vorigen Nr. bestimmt, und da die Maße in beiden Figuren übereinstimmen, wurde nur in der neuen Figur $S'S_2$ gezeichnet, und die Abstände des $S_2$ von den beiden benachbarten Seitenflächen des Schraubenkopfes abgegriffen, auf dem $k_1$ der vorhergehenden Figur gemessen und bezw. $= 0{,}5$ und $0{,}8$ erhalten.

*Übungsaufg.* Die *Schraubenmuttern* zu den beiden betrachteten Schrauben darzustellen, in deren Inneres man sieht, indem man die vordere durch die Hauptmeridianebene getrennte Hälfte entfernt denkt, und in ihnen die Schattengrenzen und Lichtgleichen zu verzeichnen.

# XI. Abschnitt.

## Die Krümmung der Flächen.

### I. Die Krümmung der Normal- und der schiefen Schnitte.

**476.** Die Krümmung einer Fläche F, die wir immer als stetig voraussetzen, in einem Punkte $P$ derselben ist durch die Krümmungen aller durch $P$ gehenden Kurven der F im Punkte $P$ bezeichnet.

*Satz. Die Krümmung aller Kurven einer stetigen Fläche* F *in einem Punkte $P$ derselben ist durch die Krümmung dreier dieser Kurven in $P$ bestimmt, von denen nicht zwei eine gemeinschaftliche Tangente in $P$ besitzen.*

*Bew.* Jede durch $P$ gehende Kurve $k$ der Fläche hat in $P$ dieselbe Krümmung, wie die Schnittkurve $k_1$ der F mit der Schmiegungsebene der $k$ in $P$, weil drei in $P$ zusammenrückende Punkte der $k$ stets auch der Schnittkurve der Ebene der drei Punkte mit der F angehören, und weil diese drei Punkte für $k$ und $k_1$ dieselben Kreise, also auch dieselben Grenzlagen derselben, d. h. dieselben Krümmungskreise bestimmen. Legt man nun außer jenen drei Kurven eine vierte $k$ durch $P$, und schneidet eine mit ihrer Schmiegungsebene in $P$ parallele und ihr unendlich nahe Ebene die F in einer Kurve $k_2$, so besitzt diese wegen der Stetigkeit der Fläche eine von derjenigen der $k$ nur unendlich wenig abweichende Krümmung bei $P$. Trifft diese letztere Ebene die drei ursprünglich gegebenen Kurven in den Punkten $Q$, $R$, $S$, und ihre Krümmungskreise für $P$ bezw. in den Punkten $Q_1$, $R_1$, $S_1$, so weichen die Halbmesser $r$ und $r_1$ der Kreise $QRS$ und $Q_1R_1S_1$ nur unendlich wenig von einander ab. Es sind nämlich die Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{s}{\varphi}, \qquad r_1 = \frac{s_1}{\varphi_1},$$

wenn man den Abstand der Mitten der Elemente $QR$ und $RS$ mit $s$, den von $Q_1R_1$ und $R_1S_1$ mit $s_1$ bezeichnet und

$$\pi - \sphericalangle QRS = \varphi, \qquad \pi - \sphericalangle Q_1R_1S_1 = \varphi_1$$

setzt. Da die Tangenten der drei gegebenen Kurven in $P$ nach der

Voraussetzung endliche Winkel mit einander bilden, so sind $QR$, $Q_1R_1, \ldots$ sowie $s$ und $s_1 = 0^1$, und ebenso sind im allgemeinen $\varphi$ und $\varphi_1 = 0^1$, im besonderen 0 von höherer Ordnung $= 0^n$. Dagegen sind die Abstände $QQ_1$, $RR_1$, $SS_1 = 0^3$ (I, 237); daher ist einerseits $s - s_1 = 0^3$, und andererseits ist der Winkel von $QR$ und $Q_1R_1 = (QQ_1 - RR_1) : QR = 0^3 : 0^1 = 0^2$, ebenso der von $RS$ und $R_1S_1$, daher auch $\varphi - \varphi_1 = 0^2$. Hieraus folgt, daß im allgemeinen Falle $s = s_1$, $\varphi = \varphi_1$ und $r = r_1$ ist. Andererseits ist im besonderen Falle ($\varphi = 0^n$, $n > 1$) $r = 0^1 : 0^n = \infty$; dann ist $\varphi_1 = \varphi + 0^2 = 0^2$, daher $r_1 = 0^1 : 0^2 = \infty$, also wieder $r = r_1$. Und da auch der Krümmungshalbmesser jener vierten durch $P$ gehenden Kurven $k$ von $r_1$ und daher auch von $r$ unendlich wenig verschieden, d. h. mit $r$ gleich ist, so ist auch er durch die drei gegebenen Kurven bestimmt, w. z. b. w.

Daraus folgt der *Satz: Zwei Flächen, welche sich in einem gemeinschaftlichen Punkte P berühren, werden von jeder durch P gelegten Ebene in zwei Kurven geschnitten, welche in P dieselbe Krümmung besitzen, wenn dies für drei solche Ebenen der Fall ist, von denen keine zwei eine Tangente der Flächen in P gemein haben. Man sagt dann, beide Flächen besitzen in P dieselbe Krümmung, oder die eine Fläche ist eine sich in P anschmiegende oder oskulirende Fläche oder eine Schmiegungsfläche der andern.*

Die beiden Flächen haben bei $P$ nach jeder Seite hin zwei Flächenelemente gemein, weil ihre Schnittlinien mit jeder durch $P$ gelegten Ebene zwei Linienelemente gemein haben.

**477.** *Satz. Es gibt eine dreifach unendliche Schaar von Flächen zweiten Grades* $\mathbf{F}^2$, *welche sich einer beliebig gegebenen Fläche* $\mathbf{F}$ *in einem Punkte P anschmiegen.*

Denn legt man durch $P$ eine die $\mathbf{F}$ schneidende Gerade und durch diese drei Ebenen, bestimmt ihre Schnittlinien mit $\mathbf{F}$, nimmt auf der Geraden außerhalb $P$ einen willkürlichen Punkt $Q$ an und legt durch diesen in der ersten jener Ebenen eine willkürliche Gerade $t$, in der zweiten eine solche $t_1$, legt dann in jeder der drei Ebenen durch $P$ und $Q$ einen Kegelschnitt, wovon jeder mit der in derselben Ebene liegenden Schnittlinie der $\mathbf{F}$ denselben Krümmungskreis in $P$ besitzt und von denen die erste in $Q$ die $t$, die zweite die $t_1$, die dritte die Ebene $tt_1$ berührt (wobei jeder durch fünf Punkte gegeben ist), so bestimmen diese drei Kegelschnitte eine Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$ (87), welche sich der $\mathbf{F}$ in $P$ anschmiegt. Wegen der Willkürlichkeit in der Wahl von $Q$, $t$, $t_1$ gibt es dreifach unendlich viele solcher $\mathbf{F}^2$, während die Wahl der durch $P$ gelegten Geraden die Anzahl der Schmiegungsflächen nicht vermehrt,

da jede solche Gerade von jeder $F^2$ in einem zweiten Punkte $Q$ geschnitten wird.

Die Schaar der anschmiegenden $F^2$, welche in $P$ einen *Scheitel* besitzen, ist *einfach unendlich.* Um eine solche zu erhalten, legt man $PQ$ als Normale der $F$ in $P$ und zieht $t$ und $t_1 \perp PQ$; dann ist $PQ$ eine Axe der $F^2$. Durch die Wahl von $Q$ oder des Mittelpunktes $M$ der $PQ$, welcher auch der Mittelpunkt der $F^2$ ist, und durch die Krümmungshalbmesser $r$, $r'$, $r''$ der drei Normalschnitte der $F$ in $P$ ist $F^2$ bestimmt. Dabei enthält der zu $PM$ senkrechte Hauptschnitt der $F^2$ in den drei Normalschnitten Halbdurchmesser $d$, $d'$, $d''$, und diese sind, wenn die Halbaxe $MP = MQ = c$ gesetzt wird, bestimmt durch (I, 250)

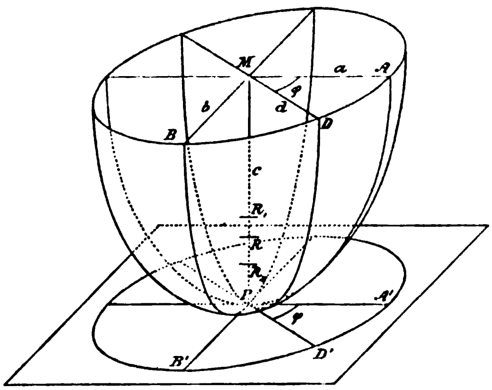
$$d^2 = cr, \qquad d'^2 = cr', \qquad d''^2 = cr''.$$

Durch diese drei (reellen oder imaginären) Halbdurchmesser (nämlich durch fünf von den sechs Endpunkten der drei Durchmesser) ist der Kegelschnitt bestimmt, welcher den auf $PQ$ senkrechten Hauptschnitt der $F^2$ bildet, und damit dessen Axen $2a$ und $2b$, und die $F^2$ selbst.

Fig. 193. Sind die Krümmungshalbmesser der durch $MA = a$ und $MB = b$ gelegten Normalschnitte in $P$ bezw. $r_1 = PR_1$ und $r_2 = PR_2$, so ist

$$a^2 = r_1 c, \qquad b^2 = r_2 c,$$

Fig. 193.




woraus folgt, daß bei wechselndem $c$ die Hauptschnitte $AMB$ aller anschmiegenden $F^2$ das Verhältnis $a : b$ nicht ändern, also unter einander ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte bilden. Ergeben sich $a$ und $b$ beide imaginär, so kann man sie durch Umkehrung des Sinnes von $c$ reell machen.

**478.** Eine parallel zur Berührungsebene der $F$ in $P$ und unendlich nahe bei $P$ gelegte Ebene schneidet die $F$ und die sich anschmiegende $F^2$ in Kurven $i'$, $i$, deren unendlich nahe bei $P$ liegenden Teile zusammenfallen, weil jede durch $P$ gelegte Ebene beide Flächen in Kurven $k$ und $k_1$ von gemeinschaftlichen Krümmungskreisen trifft. Sind nämlich die benachbarten Schnittpunkte

jener parallelen Ebene mit $k$, $k_1$ und ihrem gemeinschaftlichen Krümmungskreise bezw. $R$, $R_1$, $R_0$, wobei $R$ und $R_1$ bezw. auf $i'$ und $i$ liegen, so sind $RR_0$ und $R_1R_0$, daher auch $RR_1 = 0^2$, wenn $PR = 0^1$ ist. Denn die Abstände der $k$ und $k_1$ von ihrem Krümmungskreise sind bei $R$ in der Richtung der Normale in $P = 0^3$ (I, 237), daher in der Richtung der Tangente in $P$, weil diese einen Winkel $0^1$ mit den Tangenten der Kurven bei $R$ bildet, $= 0^3 : 0^1 = 0^2$. Wenn aber $RR_1 = 0^2$, $PR = 0^1$, so fallen $R$ und $R_1$, oder die Punkte der $i'$ und der $i$ zusammen. Dasselbe gilt auch von ihren Tangenten in $R$ und $R_1$. Denn sind $S$, $S_1$ die bezw. den $R$, $R_1$ benachbarten Punkte der $i'$, $i$, wobei wegen $PR = 0^1$, $RS$ und und ebenso $R_1S_1$ nur $0^2$, so ist die Änderung des $RR_1$ zu $SS_1$ oder $RR_1 - SS_1 = 0^3$, daher der Winkel der Elemente $RS$, $R_1S_1$ oder der Tangenten der $i'$, $i$ in $R$, $R_1$, $= (RR_1 - SS_1) : RS = 0^3 : 0^2 = 0^1$. Da nun der Schnitt $i$ auf der Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$ ein mit deren parallelem Hauptschnitte $MAB$ ähnlicher Kegelschnitt ist, so können wir sagen:

*Eine parallel und unendlich nahe zu der Berührungsebene einer Fläche* **F** *in ihrem Punkte P gelegte Ebene schneidet die* **F** *in einer Kurve, welche mit ihren dem P unendlich nahen Punkten und ihren Tangenten in denselben mit einem Kegelschnitte i zusammenfällt, der unendlich kleine Axen besitzt; derselbe heißt die Indikatrix*) der* **F** *in P.* Man stellt denselben dar durch die senkrechte Projektion $PA'B'$ des Hauptschnittes $MAB$ auf die (mit ihm parallele) Berührungsebene der **F** in $P$ und nennt auch diese Projektion die *Indikatrix.* Für ihre Axen $a$, $b$ gilt das Verhältnis (477)

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Die Größen der Axen wechseln mit $c$ und sind daher willkürlich; aber alle Indikatrixen sind unter einander koncentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen.

**479.** Durch die sich der **F** in $P$ mit einem Scheitel anschmiegende Fläche $\mathbf{F}^2$, oder vermittelst einer Indikatrix und des ihr zugehörigen $c$, kann man leicht die *Krümmungshalbmesser* aller ebenen Schnitte der **F** in $P$ bestimmen, was zunächst *für die Normalschnitte* geschehen soll.

Die Gleichung des Hauptschnittes $MAB$, wenn man $MA$ als $x$-, $MB$ als $y$Axe annimmt, ist

*) Die Theorie der Indikatrix rührt von *Dupin* her (développements de géométrie, Paris, 1813).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Diese Mittelpunktsgleichung stellt eine Ellipse, eine Hyperbel oder ein Paar paralleler Geraden dar, je nachdem beide Axen reell, eine reell und eine imaginär, oder eine reell und endlich und eine unendlich ist.

Die Normalschnitte $PMA$, $PMB$, $PMD$, wobei $D$ ein Punkt des Kegelschnittes $AB$, für welchen $MD = d$, sind Kegelschnitte mit den Halbaxen $c, a$; $c, b$; $c, d$, und haben zu Krümmungshalbmessern in $P$ bezw.:

$$r_1 = \frac{a^2}{c}, \qquad r_2 = \frac{b^2}{c}, \qquad r = \frac{d^2}{c}. \tag{2}$$

Bezeichnet man $\sphericalangle AMD$ mit $\varphi$, so ist für $D$:

$$x = d \cos\varphi, \qquad y = d \sin\varphi,$$

und nach Gl. (1)

$$\frac{d^2}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{d^2}{b^2}\sin^2\varphi = 1;$$

setzt man darin die aus (2) bestimmten Werte von $d^2 : a^2$ und $d^2 : b^2$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{r_2}\sin^2\varphi. \tag{3}$$

Diese Formel und die Folgerungen aus derselben verdankt man *Euler* *).

Man ersieht aus Gl. (2), daß $r$, $r_1$, $r_2$ stets reell, aber positiv oder negativ sind. Man kann die Gleichung (3) auch schreiben

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\sin^2\varphi,$$

woraus folgt, daß für $\sphericalangle AMD = \varphi$ und $= -\varphi$ die Werte von $r$ übereinstimmen, und daß $r$ stets wächst oder stets abnimmt, während $\varphi$ von 0 zu $\pm 90^0$, $r$ selbst aber von $r_1$ zu $r_2$ übergeht, daß also einer der beiden Werte $r_1$ und $r_2$ ein größter, der andere ein kleinster ist. Daher:

*Unter allen Normalschnitten einer Fläche* **F** *in einem Punkte P derselben gibt es zwei auf einander senkrechte, von denen der eine die größte, der andere die kleinste Krümmung in P besitzt.* Diese beiden Schnitte heißen die *Hauptschnitte*, ihre Ebenen die *Hauptebenen* und ihre Krümmungshalbmeser $r_1$ und $r_2$ die *Hauptkrümmungshalbmesser.*

**480.** *Erörterung der Eulerschen Formel.*

1) Sind die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $r_1$, $r_2$ *endlich*

---

*) *Euler*, Recherches sur la courbure des surfaces. Abhandlungen der Akad. v. Berlin, 1760.

und haben *denselben Sinn*, den wir als den positiven bezeichnen wollen, so ergeben sich nach (2) der vor. Nr., je nachdem man $c$ positiv, unendlich oder negativ wählt, $a$ und $b$ als endlich und reell, unendlich, oder imaginär, also die anschmiegende Fläche $F^2$ als Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid. Die *Indikatrix* ist dann stets eine *Ellipse*, der Punkt heißt ein *elliptischer* und die Fläche ist in diesem Punkte *konvex* (vergl. Nr. 33). Ist $r_1 = r_2$, so haben alle Normalschnitte denselben Krümmungshalbmesser, $c$ wird eine Umdrehungsaxe der $F^2$, welche auch eine Kugel sein kann, die Direktrix wird ein *Kreis*, und der Punkt heißt ein *Kreis*- oder *Nabelpunkt*.

2) Sind $r_1$ und $r_2$ *endlich* und haben *entgegengesetzten Sinn*, wobei die Fläche eine sattelförmige Gestalt besitzt, so ist von den Axen $a$ und $b$ die eine reell, die andere imaginär, welchen Sinn man $c$ auch geben mag; die $F^2$ wird ein einschaliges Hyperboloid, welches für $c = \infty$ in das hyperbolische Paraboloid übergeht. Die Direktrix ist eine *Hyperbel*, der Punkt heißt ein *hyperbolischer* und die Fläche in diesem Punkte *konvex-konkav* oder von entgegengesetzter Krümmung. Indem mit der Veränderung von $\varphi$ der Krümmungshalbmesser $r$ vom positiven zum negativen Werte übergeht, durchläuft er den unendlichen Wert (479, Gl. (3) und (2)) für

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\frac{r_2}{r_1}} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-1}.$$

Dieser Ausdruck ist reell, da $r_2 : r_1$ negativ, und bestimmt den Winkel $\varphi$ der Asymptoten der Direktrix mit der Axe $a$. Ein durch eine der Asymptoten gelegter Normalschnitt der $F$ berührt die Berührungsebene der $F$ dreipunktig, weil sein Krümmungshalbmesser unendlich ist. In diesen beiden Normalebenen erfolgt der Übergang des Krümmungskreises des Normalschnittes von der einen zu der anderen Seite der Berührungsebene. Die Projektionen zweier auf entgegengesetzten Seiten der Berührungsebene liegenden Direktrixen auf diese Ebene liegen in den verschiedenen Winkeln jener Asymptoten und sind bei gleichen Werten von $c$ (s. 479) zu einander konjugirt. Die Asymptoten der Indikatrix in $P$ heißen die *Haupttangenten der Fläche in P.*

3) Ist einer der Hauptkrümmungshalbmesser, etwa $r_1$, *unendlich*, so wird (479, Gl. (2) und (3))

$$a = \infty, \qquad b = \pm \sqrt{r_2 c}, \qquad r = \frac{r_2}{\sin^2 \varphi}.$$

Die Direktrix besteht dann aus *zweien mit a parallelen Geraden*, die anschmiegende $F^2$ wird ein *Cylinder*, von welchem die Tangente an

den Hauptschnitt $ac$ der F (mit unendlichem Krümmungshalbmesser) eine Erzeugende ist. Ein solcher Punkt heißt ein *parabolischer*, weil er den Übergang zwischen den beiden anderen Punktarten bildet, wie im allgemeinen die Parabel zwischen der Ellipse und der Hyperbel, obgleich die Indikatrix keine Parabel ist und nicht sein kann, da ihr Mittelpunkt $P$ im Endlichen liegt. Vielmehr geht die Indikatrix von der Ellipse in die Hyperbel durch jene zwei parallele Gerade über. *Abwickelbare Flächen* haben nur parabolische Punkte.

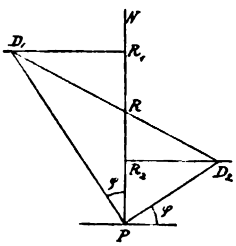
4) Ist ein Hauptkrümmungshalbmesser, etwa $r_1$, *Null*, der andere $r_2$ *endlich*, wie es an der Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche vorkommt, so sind alle $r$ bis auf $r_2$ Null. Sind $r_1$ und $r_2$ Null, so sind alle $r$ Null; wie dies in der Spitze einer Umdrehungsfläche vorkommt, welche durch Drehung einer Kurve um ihre Tangente in ihrer Spitze entsteht.

Die *Haupttangenten* einer Fläche in einem Punkte $P$ derselben, als Asymptoten ihrer Indikatrix, sind entweder reell und getrennt, oder reell und vereinigt, oder imaginär.

**481.** *Konstruktion des Krümmungshalbmessers $r$ eines Normalschnittes aus den beiden Hauptkrümmungshalbmessern $r_1$, $r_2$.*

Fig. 194. *Erstes Verfahren.* Es sei $P$ der gegebene Punkt der Fläche F, $PN$ deren Normale, auf derselben $PR_1 = r_1$, $PR_2 = r_2$, ferner $\sphericalangle NPD_1 = \varphi$ der Winkel, welchen eine andere Normalebene der F in $P$ mit der Hauptebene des $r_1$ bildet. Man ziehe $R_1D_1$ und $R_2D_2$ senkrecht zu $PN$, $PD_2 \perp PD_1$, schneide $PD_1$ mit $R_1D_1$ in $D_1$, $P_2D_2$ mit $R_2D_2$ in $D_2$, so bestimmt die Gerade $D_1D_2$ auf $PN$ den Krümmungsmittelpunkt $R$ und den Krümmungshalbmesser $PR = r$ unseres Normalschnittes. Denn es ist

Fig. 194.



$$\triangle PD_1D_2 = \triangle PD_1R + \triangle PRD_2,$$

daher auch

$$PD_1 \,.\, PD_2 = PD_1 \,.\, PR \,.\, \sin\varphi + PR \,.\, PD_2 \,.\, \cos\varphi .$$

Teilt man durch $PR \,.\, PD_1 \,.\, PD_2$, so erhält man

$$\frac{1}{PR} = \frac{1}{PD_2}\sin\varphi + \frac{1}{PD_1}\cos\varphi ,$$

und bezeichnet man $PR$ mit $r$, und beachtet, das $PD_1 = r_1 : \cos\varphi$, $PD_2 = r_2 : \sin\varphi$, so erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{r_2}\sin^2\varphi .$$

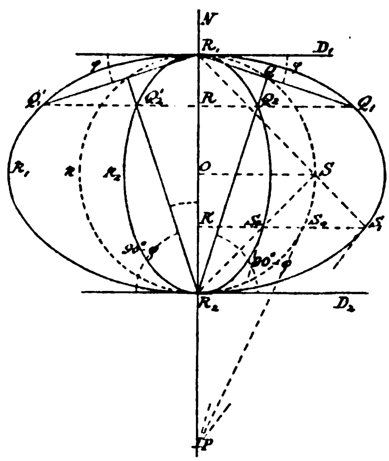
Die Übereinstimmung dieses Ausdrucks mit der Eulerschen Formel

(479, Gl. (3)) zeigt, daß $PR = r$ der gesuchte Krümmungshalbmesser ist*).

Man bemerkt, daß die Geraden $D_1 D_2$ einen *Kegelschnitt einhüllen* (weil $D_1$ und $D_2$ projektive Punktreihen beschreiben), daß $R_1$, $R_2$ Scheitel dieses Kegelschnittes sind, und daß er selbst die Gestalt einer Hyperbel, Ellipse oder Parabel besitzt, je nachdem $P$ ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt der Fläche **F** ist.

**482.** *Zweites Verfahren.* Es seien wieder $PN$ die Normale der Fläche in ihrem Punkte $P$; $R_1$, $R_2$ die Hauptkrümmungsmittelpunkte, $R_1 D_1$ und $R_2 D_2 \perp PN$; dann ziehe man $R_1 Q_1$ unter dem Winkel $\varphi$ gegen $R_1 D_1$; der zu $\varphi$ gehörige Krümmungshalbmesser sei $PR = r$, und es sei $RQ_1 \perp PR$. Wir wollen den geometrischen Ort $k_1$ dieses Punktes $Q_1$ durch Aufstellung seiner Gleichung ermitteln, wobei $R_1 R = x$, $RQ_1 = y$ sei. Es ist Fig. 195.

Fig. 195.



$$y = x \cot \varphi; \qquad (1)$$

aus dieser Gleichung eliminiren wir die Veränderliche $\varphi$ mittelst der Eulerschen Gleichung (479, (3)) und einer Beziehung für $r$, nämlich mittelst

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r_2} \sin^2 \varphi \quad \text{und} \quad r = r_1 - x.$$

Aus der ersteren folgt, weil

$$\cos^2 \varphi = \cot^2 \varphi : (1 + \cot^2 \varphi), \qquad \sin^2 \varphi = 1 : (1 + \cot^2 \varphi),$$

$$\frac{1}{r}(1 + \cot^2 \varphi) = \frac{1}{r_1} \cot^2 \varphi + \frac{1}{r_2},$$

oder
$$r_2 \cot^2 \varphi \, (r_1 - r) = r_1 (r - r_2),$$

oder
$$r_2 x \cot^2 \varphi = r_1 (r_1 - r_2 - x).$$

---

*) Diese Konstruktion gibt Herr *Mannheim* (cours de géométrie descriptive, 1880, S. 281) und leitet sie mittelst der Normalenfläche ab, auf welche er die Theorie der Krümmung der Flächen gründet. Aus der Konstruktion entwickelt er dann in obiger Weise die Eulersche Formel. Eine andere Konstruktion unserer Aufgabe mittelst eines Hilfskegelschnittes gibt *Euler* (Recherches sur la courbure des surfaces in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1760; siehe *de la Gournerie,* tr. de géom. descr., B. 3, 1864, S. 18).

Multiplicirt man diese Gleichung mit der quadrirten Gleichung (1), so erhält man die Gleichung von $k_1$:

$$y^2 = \frac{r_1}{r_2} x(r_1 - r_2 - x). \tag{2}$$

Vergleicht man dieselbe mit der Gleichung der Ellipse von den Halbaxen zu $a_1$, $b_1$, bezogen auf einen Scheitel der Axe $2b_1$:

$$y^2 = \frac{a_1^2}{b_1^2} x(2b_1 - x)$$

(welche man aus der letzten Gleichung von I, 363 erhält, wenn man $a$ mit $b$ vertauscht, und $x$ durch $x - b$ ersetzt), so findet man beide übereinstimmend, wenn

$$2b_1 = r_1 - r_2, \qquad \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Die Kurve $k_1$ ist also eine *Ellipse*, welche, unter der Voraussetzung $r_1 > r_2$, woraus $a_1 > b_1$, die $R_1 R_2$ zur *Nebenaxe* hat und *ähnlich mit der Indikatrix* ist, weil deren Axen das gleiche Verhältnis besitzen (478).

Zieht man andererseits $R_2 Q_2 \perp R_1 Q_1$, also unter dem Winkel $90^0 - \varphi$ gegen $R_2 D_2$, und schneidet $R_2 Q_2$ mit $R Q_1$ in $Q_2$, so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes $k_2$ des Punktes $Q_2$, worin $R_2 R = x$, $R Q_2 = y$ ist, wenn man in der Gleichung (2) $r_1, r_2, \varphi, x$ bezw. durch $r_2$, $r_1$, $90^0 - \varphi$, $r_1 - r_2 - x$ ersetzt,

$$y^2 = \frac{r_2}{r_1} x(r_1 - r_2 - x). \tag{3}$$

Es ist dies wieder die Scheitelgleichung einer *Ellipse* von den Halbaxen $a_2$, $b_2$, wobei

$$2a_2 = r_1 - r_2 = R_2 R_1, \qquad \frac{b_2^2}{a_2^2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

$k_2$ hat daher $R_2 R_1$ zur *Hauptaxe* und ist ebenfalls *der Indikatrix ähnlich.*

Da $R_1 Q_1$ und $R_2 Q_2$ auf einander senkrecht stehen, so ist der Ort ihres Schnittpunktes $Q$ der *Kreis* $k$ vom Durchmesser $R_1 R_2$ und dem Mittelpunkte $O$. Für $\varphi = 45^0$ sei $r = r'$; dann wird $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$, und die Eulersche Gleichung wird

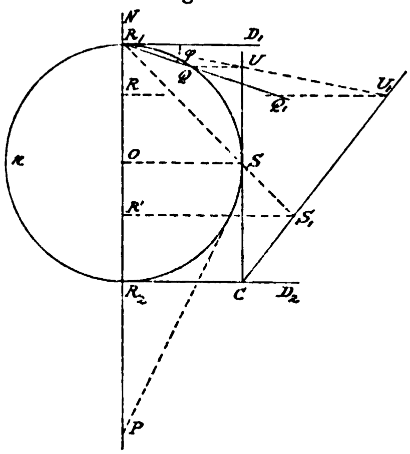
$$\frac{2}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt $R'$ ist dann von $P$ durch $R_1$ und $R_2$ harmonisch getrennt (I, 289), oder die Berührungspunkte der aus $P$ an $k$, $k_1$, $k_2$ gezogenen Tangenten, nämlich $S_0$, $S_1$, $S_2$, liegen auf einer durch $R'$ gehenden, auf $PN$ senkrechten Geraden. Der Schnittpunkt $S$ von $R_1 S_1$ und $R_2 S_2$ liegt auf $k$, und, wegen $\varphi = 45^0$, in der Mitte des Halbkreises $R_1 R_2$, so daß $OS \perp R_1 R_2$. Man erhält

daher die Punkte $S_1$, $S_2$ bezw. von $k_1$, $k_2$, wenn man die Polare $S_0R'$ von $P$ zu $k$ mit den durch $S$, oder unter $45^0$ gegen $R_1D_1$ gezogenen Strahlen $R_1S$, $R_2S$ in $S_1$, $S_2$ schneidet, oder wenn man $R'S_1 = R'R_1$, $R'S_2 = R'R_2$ macht. Dadurch sind $k_1$, $k_2$ als affine Ellipsen zu $k$ bestimmt*).

**483.** Um bei der Konstruktion von $R$ die *Ellipsen entbehren* zu können, benutzen wir die *Kollineation* einer derselben, etwa der $k_1$, mit dem Kreise $k$; wir könnten als solche die Affinität mit der Axe $R_1R_2$ wählen, ziehen aber, wegen Übereinstimmung mit dem Folgenden, die Kollineation vor mit $R_1$ als Mittelpunkt und $R_2D_2$ als Axe. Dann entsprechen sich in $k$ und $k_1$ die aus einem passenden Punkte $C$ der $R_2D_2$ gezogenen Geraden $CS$ und $CS_1$ (in der Figur wurde $CS$ als Tangente an $k$ gewählt). Schneidet nun ein Strahl $R_1Q$ den $k$ in $Q$, so ziehe man $QU \parallel R_2D_2$ bis $U$ auf $CS$, dann $R_1U$ bis $U_1$ auf $CS_1$, so schneidet die Parallele $U_1R$ zu $R_2D_2$ die $R_1Q$ in $Q_1$, einem Punkte der $k_1$, und die $R_1R_2$ in $R$. Fig. 196.

Fig. 196.

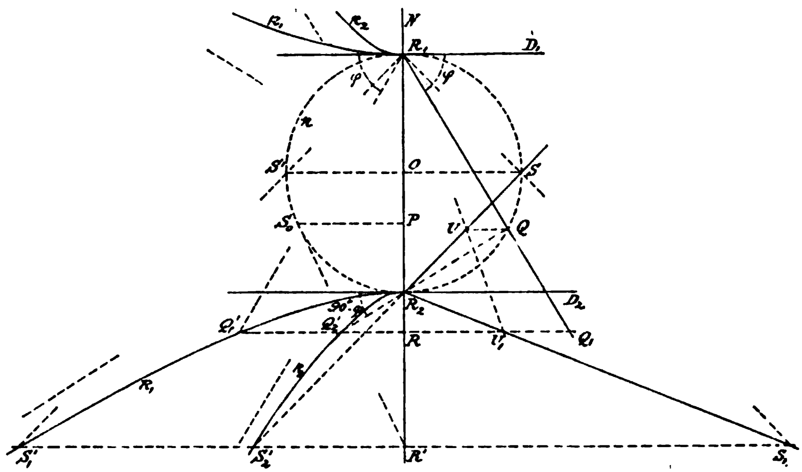



Ist *P ein hyperbolischer Punkt*, so liegt $P$ auf der endlichen Strecke $R_1R_2$ und der von $P$ durch $R_1$, $R_2$ harmonisch getrennte Punkt $R'$ wird durch den Kreis $k$ vom Durchmesser $R_1R_2$ gefunden, wenn man $PS_0 \perp R_1R_2$ bis $S_0$ auf $k$, und in $S_0$ die Tangente an $k$ bis $R'$ auf $R_1R_2$ zieht. $k_1$, $k_2$ werden Hyperbeln mit $R_1R_2$ als reeller Axe, gehen bezw. durch die Punkte $S_1'$, $S_2'$ der Polare $R'S_1'$ von $P$ zu $k$, $k_1$, $k_2$, wenn $R_1S'S_1'$ und $R_2SS_2'$ unter $45^0$ gegen $R_1D_1$ gezogen sind ($R'S_1' = R'R_1$, $R'S_2' = R'R_2$). Die Hyperbeln sind ähnlich mit den konjugirten Hyperbeln der Indikatrix, und haben dieselbe gegenseitige Lage wie die eine Indikatrixhyperbel gegen die um $90^0$ gedrehte andere; ihre Asymptoten stehen daher paarweise auf einander senkrecht. Sie sind als kollineare Kurven zu $k$ mit $R_1$ als Mittelpunkt und $R_2D_2$ als Axe der Kollineation gezeichnet. Zieht man den Strahl $R_1Q_1'$ unter dem Winkel $\varphi$ gegen $R_1D_1$, und schneidet ihn mit $k_1$ in $Q_1'$, zieht $Q_1'R \perp R_1R_2$, Fig. 197.

*) Die Konstruktionen dieser Nr. rühren von meinem Sohne *Hermann Wiener*, Privatdocent in Halle, her.

so ist $R$ der zu $\varphi$ gehörige Krümmungsmittelpunkt. Denselben erhält man auch durch den Strahl $R_2 Q_2'$ unter dem Winkel $90^0 - \varphi$ gegen $R_2 D_2$, durch seinen Schnitt $Q_2'$ mit $k_2$, und durch $Q_2' R \perp R_1 R_2$.

Fig. 197.




Um die *Hyperbeln entbehren* zu können, zieht man unter Benutzung der bezeichneten *Kollineation* zwischen $k$ und $k_1$, in der sich $R_2 S$ und $R_2 S_1$ entsprechen, $R_1 Q$ unter dem Winkel $\varphi$ gegen $R_1 D_1$ bis $Q$ auf $k$, $QU \parallel R_2 D_2$ bis $U$ auf $R_2 S$, $R_1 U$ bis $U_1$ auf $R_2 S_1$, so liefert $U_1 R \parallel R_2 D_2$ auf $R_1 Q$ den Punkt $Q_1$ der $k_1$, und auf $R_1 R_2$ den Krümmungsmittelpunkt $R$ zu $\varphi$.

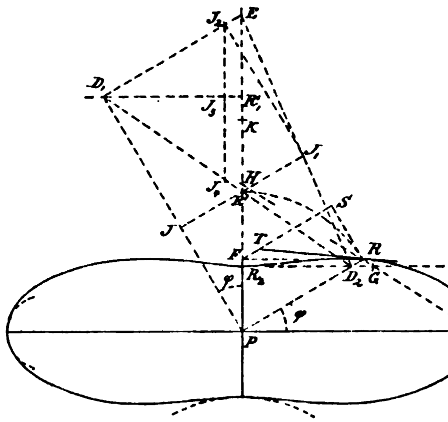
Die Paare der Normalebenen der Fläche in $P$, welche denselben Winkel $\varphi$ mit der zu $r_1$ gehörigen Hauptebene einschließen, bilden eine Involution, deren Doppelebenen die beiden Hauptebenen
Fig. 195. Fig. 197. sind. Die Büschel $R_1$ und $R_2$ der Strahlen $R_1 Q_1$ und $R_2 Q_2$ (oder $R_2 Q_2'$) sind mit dem senkrechten Schnitte dieses Ebenenbüschels kongruent, und erzeugen daher bezw. auf $k_1, k_2$ involutorische Punktreihen, deren Punktepaare aus dem Pole der Involution (dem unendlich fernen Punkte der $R_1 D_1$) auf die Axe der Involution $R_1 R_2$ in die Reihe der Krümmungsmittelpunkte $R$ projicirt wird; daraus folgt (297, 1)):

*Das Büschel der Normalebenen einer Fläche* **F** *in einem Punkte P derselben ist involutorisch und projektiv zu der Reihe der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, wenn man zwei Ebenen des Büschels einander zuordnet, welche gleiche Winkel mit jeder der beiden Hauptebenen bilden, und wenn man ihnen den gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt ihrer Schnittkurven mit* **F** *in P entsprechen läßt. Der zu dem*

*Winkel von* 45° *gehörige Krümmungsmittelpunkt* $R'$ *ist von* $P$ *durch die Hauptkrümmungsmittelpunkte* $R_1$, $R_2$ *harmonisch getrennt.*

**484.** Schneidet man die Berührungsebene mit den Normalebenen der F in $P$ und trägt auf jeder Schnittlinie den Krümmungshalbmesser $PR = r$ des von ihr berührten Normalschnittes nach Fig. 198.
beiden Seiten hin auf, so bilden die Punkte $R$ die Kurve der Krümmungshalbmesser oder die *Eulersche Kurve*, deren Polargleichung die Eulersche Gleichung (479,(3)) ist. Man konstruirt die Kurve aus den auf einander senkrechten Hauptkrümmungshalbmessern $PR_1 = r_1$, $PR_2 = r_2$ (481), indem man auf $PR_2$ die $PR_1' = PR_1$ aufträgt, $R_1'D_1$ und $R_2D_2 \perp PR_2$ und $PD_1 \perp PR$

Fig. 198.



zieht, $D_1D_2$ mit $PR_2$ in $R'$ schneidet und $PR = PR'$ macht. In der Figur wurde $P$ als *elliptischer Punkt* der Fläche angenommen; dann haben $r_1$ und $r_2$ gleichen Sinn, und deswegen wurde auch $PR_1'$ in dem Sinne von $PR_2$ aufgetragen.

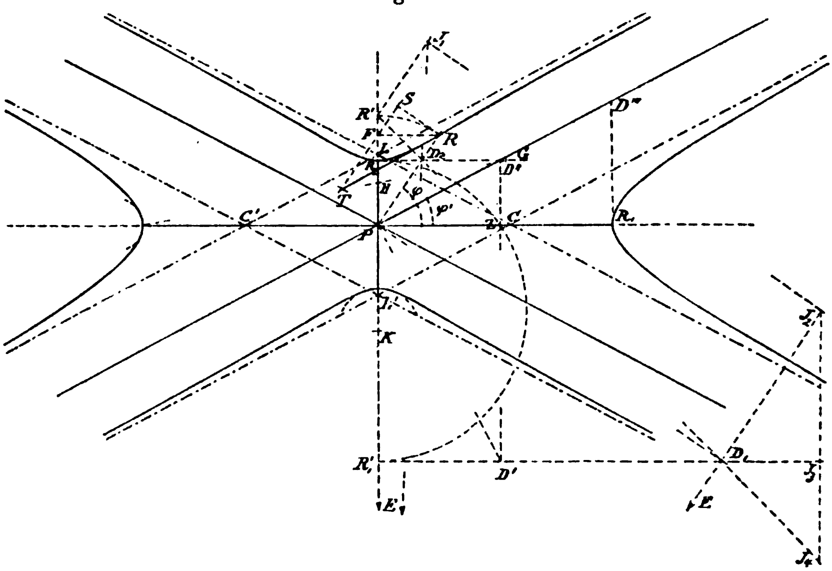
Die *Tangente* im Punkte $R$ bestimmt man nach dem Verfahren der ähnlichen Figur (I, 204). Dreht man den rechten Winkel $D_1PD_2$ um $P$ unendlich wenig im Sinne der Zunahme von $\varphi$ ($= R_1PR$), so verhalten sich die von $D_1$, $D_2$, $R$ beschriebenen Kreisbogen, wie $PD_1 : PD_2 : PR = R_1'D_1 : PR_2 : PF$, wenn $F$ der Fußpunkt der von $R$ auf $PR_2$ gefällten Senkrechten ist. Die letzteren Linien, multiplicirt mit $\cos\varphi$, wollen wir als die verhältnismäßigen Vergrößerungen der unendlich kleinen Wege betrachten. Dieser Weg für $R$ ist daher $RS$, wenn $RS \perp PR$, $FS \perp RS$. Trägt man dann auf $FS$ die noch zu bestimmende zugehörige Verkleinerung von $PR$, d. i. auch den Weg von $R'$ gegen $P$, $= ST$ auf, so ist $RT$ die gesuchte Tangente. Nimmt man vorübergehend $R_1'D_1$, $PR_2$, $PF$ als die Längen der bezw. von $D_1$, $D_2$, $R$ beschriebenen vergrößerten Bogenelemente an, so sind, wie man leicht sieht, die dabei von $D_1$, $D_2$ auf $R_1'D_1$, $D_2R_2$ (in gleichem Sinne) beschriebenen Wege gleich $ED_1$, $D_2P$, wenn $D_1E \perp PD_1$ bis $E$ auf $PR_2$ gezogen wurde. Der dabei auf einer $\parallel R_1'D_1$ durch $R'$ gelegten Geraden von ihrem Schnittpunkte $R'$ mit $D_1D_2$ beschriebene Weg

ist $= J_1 J$, wenn die $\parallel PD_2$ durch $R'$ gezogene Gerade die $PD_1$ in $J$, und die $D_2 E$ in $J_1$ trifft. Zieht man $J_1 J_2 \parallel PD_1$ bis $J_2$ auf $D_1 E$, so ist $J_2 D_1 = J_1 J$, und der zum Wege $RS = PF . \cos\varphi$ gehörige Weg von $R'$ in der Richtung von $R_1' D_1$ ist $J_2 D_1 . \cos\varphi = J_3 D_1$, wenn $J_2 J_3 \parallel PR_2$ bis $J_3$ auf $R_1' D_1$ gezogen wurde. Zieht man sie noch bis $J_4$ auf $D_1 D_2$, so ist der Weg von $R'$ gegen $P$, oder die Abnahme von $r = J_3 J_4$, und diese hat man als $ST$ aufzutragen.

Die Figuren 198, 199, 200 geben die Eulersche Kurve für einen *elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Punkt* $P$ einer Fläche. Die erstere schließt sich einer Ellipse an, die zweite zwei konjugirten Hyperbeln und die letztere zweien in Bezug auf den Scheitel symmetrischen Parabeln.

Fig. 199. Bei der *Eulerschen Kurve für einen hyperbolischen Punkt* wird $r = \infty$, wenn $D_1 D_2$ in die zu $PR_2$ parallele $D'D''$ rückt, wodurch

Fig. 199.



der Schnittpunkt $Z$ der $D'D''$ mit $PR_1$ sich ergibt durch $PZ^2 = -r_1 r_2$, oder als Schnittpunkt mit dem über $R_1' R_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreise. Aus dieser Gleichung folgt

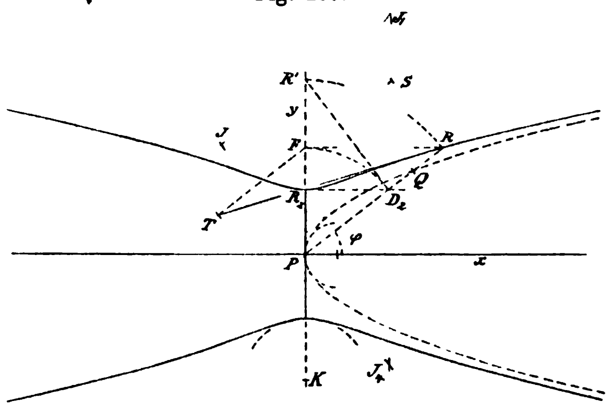
$$\operatorname{tg} ZPD'' = \operatorname{tg}\varphi' = \frac{r_2}{PZ} = \pm \frac{r_2}{\sqrt{-r_1 r_2}} = \pm \sqrt{-\frac{r_2}{r_1}},$$

was bei Vergleichung mit 480, 2) zeigt, daß $PD''$ in die Asymptote der Direktrix fällt, wie es sein mußte. — Die Asymptoten der Eulerschen Kurve sind mit denjenigen der Direktrix parallel, ohne in dieselben zu fallen. Läßt man $\varphi'$ um das unendlich

kleine $\delta$ zunehmen, oder läßt man den rechten Winkel $D'PD''$ sich um $P$ um $\delta$ drehen, so beschreiben $D'$ und $D''$ bezw. auf $D'R_1'$ und $D''R_2$ gleiche und entgegengesetzte Linienelemente, weil sie dieselben auch auf dem Kreise beschreiben, der durch $P, D', D''$ gelegt ist (und $D'D''$ zum Durchmesser hat). Die Gerade $D'D''$ dreht sich daher um $2\delta$, den Centriwinkel, der mit den Peripheriewinkeln $\delta$ auf denselben Bogen ruht. Die Strecke (wie $PR'$), welche dann die gedrehte $D'D''$ auf $PR_2$ abschneidet, ist $= PZ:2\delta$; und trägt man diese auf dem um $\delta$ gedrehten Strahle $PD''$ auf, so ist der Abstand ihres entfernten Endpunktes von $PD'' = \delta(PZ:2\delta) = \frac{1}{2}PZ$. Eine Asymptote unserer Kurve hat daher einen Abstand von einer Hyperbelasymptote und von $P = \frac{1}{2}PZ$; das von ihr mit den Axen gebildete und mit $PD'D''$ ähnliche Dreieck hat daher die halben Maße des letzteren, und die Abschnitte, die sie auf $PR_1$ und $PR_2$ bildet, sind bezw. $PC = PC' = \frac{1}{2}PD'$, und $PL = PL' = \frac{1}{2}PD''$.

Bei einem *parabolischen Punkte* ($r_1 = \infty$) fallen $R_1$ und $R_1'D_1$ ins Unendliche, und es wird $D_2R' \perp PD_2$, so daß $PR' = PR = r = r_2 : \sin^2\varphi$ (wie in 480, 3)) die Polargleichung der Kurve vorstellt. Fig. 200

Fig. 200.




Trägt man auf dem Strahle $PR$ die $PQ = q = FR = D_2R' = r\cos\varphi$ auf, so bilden die Punkte $Q$ eine Kurve von der Polargleichung $q = (r_2 : \sin^2\varphi)\cos\varphi$, und diese Kurve ist die Parabel vom Parameter $r_2$ und der Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $y^2 = r_2 x$, da diese Gleichung vermittelst $y = q\sin\varphi$, $x = q\cos\varphi$ in die obige übergeht. Zwei solche Parabeln schließen sich unserer Kurve asymptotisch an.

Es sind durch das Vorige *drei*, wie mir scheint, *neue Parabelkonstruktionen* gegeben durch $PR_2 = r_2 =$ Parameter, $PQ = D_2R'$, oder Abstand $Qx = y = R_2D_2$, oder Abst. $Qy = x = R_2R'$.

Die *Tangente* $RT$ unserer Eulerschen Kurve in $R$ ist durch $FT \parallel RP$ und $= R_2R'$ bestimmt. Denn der Punkt $R_1'$ der Fig. 198 und damit $D_1$, $E$ rücken ins Unendliche, $D_2D_1$ wird $\parallel PD_1$ oder $\perp PD_2$, $D_2E \parallel PR_2$, und wenn man die endliche Figur $D_1J_2J_3J_4$, die ins Unendliche rückt, an das mit $D_1J_2$ gleiche $JJ_1$ angesetzt denkt, so wird das $\triangle D_1J_2J_4$ zum $\triangle JJ_1J_4$ der Fig. 200; dieses aber ist ähnlich mit dem $\triangle D_2PR'$ und doppelt so groß, wie dasselbe ($J_1R' = D_2P = R'J$), also $J_3J_4$ der Fig. 198 $= 2R_2R'$ der Fig. 200. Hier ist $\triangle RSF \cong \triangle D_2R_2R'$, weil $RS = PF \cdot \cos\varphi = PD_2 \cdot \cos\varphi = D_2R_2$, daher $SF = R_2R'$, so daß man $SFT = 2R_2R' = 2SF$ erhält, wenn man $FT = R_2R'$ macht, wie angegeben.

**485.** Um den *Krümmungshalbmesser* der Kurve in einem Scheitel, z. B. in $R_2$, zu bestimmen, denken wir uns ihren Punkt $R$ unendlich
Fig. 198. nahe zu $R_2$ gerückt und bezeichnen $\sphericalangle R_2PR$ ($= 0^1$) mit $\delta$, denken uns aus $R$ die Senkrechte $RF$ auf $PR_2$ gefällt, so gehen durch $R$ der aus $P$ durch $R'$ mit einem von $r_2$ unendlich wenig verschiedenen Halbmesser beschriebene Kreis, und der durch $R_2$ gehende Krümmungskreis vom Halbmesser $r''$. Daher verhalten sich (208)

$$r'' : R_2P = r'' : (-r_2) = R'F : R_2F. \qquad (1)$$

Dabei ist $r_2 = PR_2$, und der Sinn des Krümmungshalbmessers $r''$ wurde vom Berührungspunkte gegen den Krümmungsmittelpunkt hin genommen gedacht. Sodann ist, da $D_2R_2 = 0^1$,

$$R_2R' : R_2R_1' = D_2R_2 : (D_2R_2 + R_1'D_1) = D_2R_2 : R_1'D_1,$$

und da $D_2R_2 = r_2\delta$ und $R_1'D_1 = r_1 : \delta$, so ist

$$R_2R' = R_2R_1' \frac{r_2\delta}{r_1 : \delta} = (r_1 - r_2)\frac{r_2}{r_1}\delta^2.$$

Ferner ergibt sich, weil $RR'$ ein Kreisbogen, $R'F = -\frac{1}{2}r_2\delta^2$ (negativ, weil sein Sinn entgegengesetzt mit dem von $r_2$); daher

$$R_2F = R_2R' + R'F = (r_1 - r_2)\frac{r_2}{r_1}\delta^2 - \frac{1}{2}r_2\delta^2 = \frac{r_2\delta^2}{2r_1}(r_1 - 2r_2),$$

und mit Hilfe von (1)

$$r'' = r_2\frac{r_1}{r_1 - 2r_2}.$$

Entsprechend ist der Krümmungshalbmesser $r'$ in $R_1$

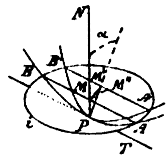
$$r' = r_1\frac{r_2}{r_2 - 2r_1}.$$

Hiernach werden die Krümmungshalbmesser konstruirt, z. B. derjenige in $R_2$, indem man auf $R_2D_2$ die $R_2G = 2PR_2$ aufträgt und $R_1G$ mit $PR_2$ in $H$ schneidet; dann ist $r'' = PH = R_2K$, und zwar hier von gleichem Sinne wie $r_2$, da $r_1 > 2r_2$.

Für $r_1 = \infty$ wird $r'' = r_2$, $r' = -\frac{1}{2} r_2$. $r'$ ist dann der Krümmungshalbmesser sowohl im unendlich fernen Scheitel, wie in demjenigen $P$ der asymptotischen Parabel, deren Parameter $r_2$ ist. Fig. 200.

**486.** Wir wollen nun den Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes einer Fläche **F** bestimmen. Sei $P$ ein Punkt der **F**, Fig. 201. $PN$ ihre Normale; auf dieser tragen wir das unendlich kleine $PM$ auf, dann schneidet eine durch $M \perp PN$ gelegte Ebene die **F** in der Indikatrix $AA'B'B = i$ vom Mittelpunkte $M$ (478). Die willkürlich durch $P$ gelegte Schnittebene bilde mit der Normale $PN$ den $\sphericalangle\, \alpha$ und habe mit der die **F** in $P$ berührenden Ebene die Gerade $PT$ gemein. Die Normalebene $PTN$ der **F** schneide die Indikatrix in $A$ und $B$ ($AMB \parallel PT$), und die **F** in der Kurve $APB$; ihr Krümmungskreis in $P$ ist durch diese drei Punkte oder durch $P$, $A$ und die Tangente $PT$ gegeben; sein Halbmesser sei $r$. Setzt man $PM = x$, $MA = y$, so ist $y^2 = 2rx$, und $y \doteq 0^1$, $x = 0^2$ (208). Jene durch $PT$ gehende schiefe Schnittebene treffe die Indikatrix in $A', B'$ ($A'B' \parallel PT \parallel AB$); sie schneidet dann die **F** in einer Kurve $A'PB'$, deren Krümmungshalbmesser $r'$ durch diese drei Punkte bestimmt ist, oder durch $P, A'$ und die Tangente $PT$. Fällt man $PM' \perp A'B'$, und setzt $PM' = x'$, $M'A' = y'$, so ist $y'^2 = 2r'x'$. Nun ist auch $MM' \perp A'B'$ und $\sphericalangle\, MPM' = \alpha$, daher $PM' = x' = x : \cos\alpha$, $MM' = x \operatorname{tg}\alpha$, und beide Größen sind $0^2$, wie $x$. Ist $M''$ die Mitte von $A'B'$, so ist $MM''$ der zu $AB$ konjugirte Durchmesser der $i$ und bildet mit $MM'$ im allgemeinen einen Winkel $< 90^0$, so daß im allgemeinen auch $M'M'' = 0^2$. Ist dagegen dieser Winkel $= 90^0$, was nur eintritt, wenn $i$ eine Hyperbel und $AB$ ihre Asymptote, so sind $r$ und $r' = \infty$. Da ferner $MM''$ parallel mit den Tangenten der $i$ in $A$ und $B$, so ist $MA - M''A' = 0^1 . AA' = 0^3$. Demnach ist

Fig. 201.



$$y' = M'A' = M'M'' + M''A' = 0^2 + MA - 0^3 = MA = y,$$

so daß aus $y'^2 = 2r'x'$ folgt $y^2 = 2r'x : \cos\alpha$, oder da auch $y^2 = 2rx$,

$$r' = r \cos\alpha .$$

Diese Formel drückt den Satz von *Meusnier**) aus, nach welchem *der Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes einer Fläche die Projektion des Krümmungshalbmessers des ihn berührenden Normalschnittes ist.* Daraus ergibt sich, *daß, wenn man durch eine Tangente*

*) *Meusnier*, Mémoire sur la courbure des surfaces (Savants étrangers, 1776).

*einer Fläche in ihrem Punkte P alle Ebenen legt, die Krümmungsmittelpunkte von deren Schnittkurven in P einen Kreis und ihre Krümmungskreise eine Kugel bilden.*

**487.** *Die Krümmungskreise der Normalschnitte einer Fläche* F *in einem Punkte P derselben bilden eine Fläche vierter Ordnung, welche die Normale der* F *in P zu einer Doppellinie hat.* Nimmt man die Tangenten des ersten und zweiten Hauptschnittes, welche bezw. $r_1$ und $r_2$ liefern, und die Normale der F bezw. zur $x$-, $y$- und $z$Axe, nimmt man dann von dem Normalschnitte $(\varphi, r)$ die Tangente in $P$ zur $v$Axe, so ist die Gleichung des Krümmungskreises dieses Normalschnittes

$$v^2 = 2rz - z^2. \qquad (1)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (379, 3))

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{r_2}\sin^2\varphi \quad \text{oder} \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_2\cos^2\varphi + r_1\sin^2\varphi},$$

und $$\cos\varphi = \frac{x}{v}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{v}, \quad v^2 = x^2 + y^2,$$

erhält man aus (1)

$$v^2 = \frac{2r_1 r_2 z}{r_2\frac{x^2}{v^2} + r_1\frac{y^2}{v^2}} - z^2,$$

oder $$(x^2 + y^2 + z^2)(r_2x^2 + r_1y^2) = 2r_1r_2z(x^2 + y^2)$$

als Gleichung der Fläche. Dieselbe ist also von der vierten Ordnung, und hat die Normale der F in $P$ zu einer Doppellinie, weil durch jeden Punkt derselben zwei (reelle oder imaginäre) Krümmungskreise gehen (483).

Legt man durch die Tangente des Normalschnittes $(\varphi, r)$ in $P$ alle Ebenen, so bilden die Krümmungsmittelpunkte ihrer Schnittkurven mit F einen Kreis (486), dessen Ebene senkrecht auf der Ebene des Normalschnittes $(\varphi, r)$ steht und welcher den vom Berührungspunkte ausgehenden Krümmungshalbmesser $r$ zu seinem Durchmesser hat, also halb so groß wie der Krümmungskreis des Normalschnittes ist. Verkleinert man daher die Fläche der Krümmungskreise der Normalschnitte in $P$ mit $P$ als Ähnlichkeitspunkt auf die Hälfte, und dreht die verkleinerte Fläche um die Normale um 90°, so erhält man *die Fläche der Krümmungsmittelpunkte aller (ebenen oder unebenen) durch P gehenden Kurven der Fläche in P. Beide Flächen sind daher ähnlich mit dem Ähnlichkeitsverhältnisse zwei.*

**488.** Legt man in einem Punkte $P$ einer Fläche F eine sich mit einem Scheitel anschmiegende Fläche zweiten Grades $F^2$, sowie eine zu der Berührungsebene der F in $P$ parallele unendlich nahe

Ebene, so schneidet diese die $F^2$ in einer Indikatrix *i*. Alle Normalen der $F^2$ in den Punkten der *i* bilden die gerade Normalenfläche der Nr. 407, d. i. eine windschiefe Fläche, welche zwei mit den Axen der Indikatrix parallele und die Normale in endlichen Abständen von *P* schneidende Gerade zu Leit- und Doppellinien hat (408). Jene zur Berührungsebene parallele Ebene schneidet die F selbst in einer Kurve *i'*, welche in der Nähe von *P* von der *i* Abstände $= 0^2$ hat, wenn die Durchmesser der $i = 0^1$ sind (478). Die Normalen der F in den Punkten der *i'* bilden mit den Normalen der $F^2$ in den um $0^2$ entfernten Punkten der *i* Winkel $= 0^2$; sie erzeugen daher eine windschiefe Fläche, deren Schnittlinien mit sich selbst von den beiden geraden Doppellinien jener Normalenfläche bezw. Abstände $= 0^1$ besitzen, weil die Winkel der zum Schnitte gelangenden Erzeugenden dieser Fläche $= 0^1$ sind, so daß sie mit jenen geraden Doppellinien zusammenfallen. Diese Geraden sind daher auch Leitlinien der windschiefen Fläche der *i'*; oder *i'* und *i* und beide windschiefe Flächen fallen in einander. Ferner, wenn die Normale *n* der F und der $F^2$ in *P* von einer Normale der $F^2$ in einem Punkte *A* (Scheitel) der *i* geschnitten wird, so gehen die Normalen der F in Punkten, welche von *A* den Abstand $0^2$ besitzen, also auf Kurven der F liegen, welche in *P* den Hauptschnitt *PA* berühren, von der *n* in Abständen $= 0^2$ vorbei, und da sie beim Durchlaufen der *i'* die Seite der *n* wechseln, so gibt es auch Normalen, die den Abstand $0^3$ und absolut 0 von *n* besitzen. Es ergibt sich daher:

*An der Normale einer Fläche* F *in ihrem Punkte P gehen ihre Normalen in benachbarten Punkten* ($0^1$) *des P im allgemeinen in Abständen* $= 0^1$ *vorbei; nur für Punkte von Kurven der* F, *welche einen Hauptschnitt in P berühren, werden diese Abstände* $0^2$, $0^3$ *oder auch absolut* 0. *Der dieser benachbarten Normale nächstliegende Punkt der Normale in P ist dann der Krümmungsmittelpunkt dieses Hauptschnittes in P. Alle anderen Normalen der* F *in benachbarten Punkten des P schneiden zwei Gerade, die s. g. Abweichungs- oder Deviationsaxen*), welche in den Krümmungsmittelpunkten der Hauptschnitte bezw. senkrecht auf deren Ebenen stehen.*

**489.** Unter den *Krümmungslinien***) einer Fläche versteht man diejenigen Linien derselben, welche in jedem ihrer Punkte einen der Hauptschnitte dieses Punktes berühren. Durch jeden Punkt der Fläche gehen daher zwei Krümmungslinien und dieselben schneiden

*) Axes de déviation; sie wurden von *Sturm* aufgestellt (Comptes rendus, 1845, 1. sem.).

**) Die Theorie der Krümmungslinien verdankt man *Monge* (Application de l'analyse à la géométrie, 1795, XV u. XVI).

sich senkrecht; die eine ist die Linie der größten, die andere die der kleinsten Krümmung. Die Flächennormalen in allen Punkten einer Krümmungslinie bilden eine abwickelbare Fläche, weil sich zwei benachbarte derselben schneiden (vor. Nr.), während diese Normalen entlang einer anderen Linie eine windschiefe Fläche bilden.

*Asymptotische Linien* einer Fläche heißen diejenigen, welche in jedem ihrer Punkte eine der Haupttangenten (480, 2)) dieses Punktes berühren. Durch jeden Punkt der Fläche gehen daher ebenfalls zwei solche Kurven, welche gleiche Winkel mit jeder Krümmungslinie dieses Punktes bilden. Die asymptotischen Linien sind nur auf Flächen von entgegengesetzter Krümmung reell.

**490.** *Bei einer Umdrehungsfläche sind die Krümmungslinien die Meridiane und die* (sie senkrecht schneidenden) *Parallelkreise.* Die Flächennormalen entlang eines Meridianes schneiden sich in deren Ebene, die Flächennormalen entlang eines Parallelkreises in einem Punkte der Axe. *Daher ist für eine Umdrehungsfläche in irgend einem Punkte P der eine Hauptkrümmungshalbmesser der Krümmungshalbmesser des Meridianes, der andere das zwischen P und der Umdrehungsaxe liegende Stück der Flächennormale in P.*

Bei einer *abwickelbaren Fläche* bilden offenbar die *Erzeugenden* die eine Schaar von Krümmungslinien. Die andere Schaar wird durch die Linien gebildet, welche die Erzeugenden senkrecht schneiden, d. i. durch ihre *senkrechten Trajektorien*, welche die *Evolventen der Rückkehrkante* sind; bei der abwickelbaren Schraubenfläche also durch ihre Normalkurven, welche zugleich Evolventen der Normalschnitte des Cylinders der Rückkehrkante sind (334); bei dem Cylinder durch seine Normalschnitte, bei dem Kegel durch seine Schnitte mit koncentrischen Kugeln.

An eine *windschiefe Fläche* konnten wir (381) unendlich viele entlang einer Geraden berührende einschalige s. g. *Berührungshyperboloide* legen, welche nämlich auch noch die benachbarte Erzeugende mit ihr gemein haben. Läßt man noch eine dritte benachbarte Erzeugende beiden Flächen gemein sein, so ist das Hyperboloid bestimmt, welches das sich *anschmiegende* heißt. Jede Berührungsebene der Fläche schneidet diese in der Erzeugenden des Berührungspunktes und in einer Kurve, welche ebenfalls durch den Berührungspunkt geht und in ihm die Erzeugende von der zweiten Schaar des sich anschmiegenden Hyperboloides zur Tangente hat. Man sieht daraus, *daß windschiefe Flächen nur hyperbolische Punkte besitzen und daß alle zweiten Haupttangenten in den verschiedenen Punkten derselben Erzeugenden ein einschaliges Hyperboloid bilden, welches sich der Fläche entlang der Erzeugenden anschmiegt.* Dasselbe

ist gegeben, wenn in drei Punkten der fraglichen Erzeugenden die zweiten Haupttangenten gegebenen sind.

### II. Die Tangenten der Schnittkurve zweier sich berührenden Flächen in deren Berührungspunkte, einem Doppelpunkte der Kurve.

**491.** *Wird eine Fläche* **F** *in einem hyperbolischen Punkte $P$ von einer Ebene* **T** *berührt, so ist $P$ ein Doppelpunkt der Schnittkurve,* und ihre Tangenten in $P$ sind die Asymptoten der Indikatrix in $P$. Denn zwei mit **T** parallele, ihr unendlich nahe und auf beiden Seiten derselben liegende Ebenen schneiden die **F** in Kurven, und diese haben benachbarte Punkte des $P$ mit Hyperbeln gemein, welche Formen der Indikatrix in $P$ bilden (480, 2)), also parallele Asymptoten besitzen; und da diese Hyperbeln beim Hereinrücken der Ebenen in die **T** in die Indikatrixasymptoten übergehen, so hat auch die Schnittkurve der **T** mit **F** die dem $P$ benachbarten Punkte mit diesen Asymptoten gemein, oder sie wird von ihnen berührt. Diese Asymptoten werden aber als die durch $P$ gehenden Erzeugenden des sich in $P$ der **F** anschmiegenden einschaligen Hyperboloides bestimmt. Mittelst desselben wurden die Tangenten der Schnittlinie eines Ringes mit seiner ihn in einem hyperbolischen Punkte berührenden Ebene ermittelt (157)*).

**492.** *Satz. Haben zwei Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte $P$ eine gemeinschaftliche Berührungsebene* **T**, *so hat ihre Schnittlinie in $P$ einen Doppelpunkt, in welchem deren (reelle oder imaginäre) Tangenten die beiden gemeinschaftlichen Durchmesser derjenigen Indikatrixen beider Flächen in $P$ sind, welche zu demselben auf der Berührungsebene senkrechten Halbdurchmesser $c$ der sich bezw. jenen Flächen in $P$ anschmiegenden Flächen zweiten Grades gehören.*

Denn bestimmt man mit diesem $c = PM$, also mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte $M$ (vergl. Fig. 193) die in $P$ sich anschmiegenden Flächen zweiten Grades, deren Hauptschnitte in der auf $c$ senkrechten Hauptebene **H** sich (reell oder imaginär) in den Endpunkten zweier Durchmesser $t$, $t_1$ schneiden, so besteht die Schnittlinie dieser beiden Flächen aus zwei Kegelschnitten, deren Ebenen $Pt$, $Pt_1$ sind, und deren Tangenten in $P$ die Projektionen von $t$ und $t_1$ auf **T** oder die gemeinschaftlichen Durchmesser der beiden zu demselben $c$ gehörigen Direktrixen bilden. Dieselben Geraden berühren aber auch die Schnittlinie der ursprünglich gegebe-

*) Eine andere ebenso einfache Konstruktion hat Herr *Pelz* gegeben in den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 79, Abt. 2, 1879, S. 470.

nen Flächen in $P$, weil jede dieser Flächen mit ihrer anschmiegenden Fläche, und daher auch die Schnittkurve der ersteren mit derjenigen der letzteren Flächen außer $P$ noch die dem $P$ benachbarten Punkte in der zu **T** benachbarten parallelen Ebene gemein haben.

**493.** *Aufg. Die Tangenten der Schnittlinie eines Ringes mit einem geraden Konoide in einem Doppelpunkte derselben zu bestimmen.*

Siehe Fig. 172. *Aufl.* Sei der Fall der Nr. 403′ gewählt, wofür die Schnittlinie konstruirt wurde. Der Doppelpunkt befindet sich auf einer Kante ($F'A'$, $J''$) des Konoides (entlang deren das Flächenelement eben ist). Diese Erzeugende ist eine Krümmungslinie, weil die Flächennormalen in allen Punkten derselben in derselben Ebene liegen. Der auf dieser Erzeugenden senkrechte Schnitt $F'G_1'$ der Fläche hat denselben Krümmungshalbmesser wie die Ellipse ($G_1'F'$, $G_1''J''H_1''$), deren Aufwickelung auf den zu $\mathbf{P}_1$ senkrechten Cylinder $G'F'H'$ die Leitlinie bildet. Denn die Ellipse und die Projektion ihrer Aufwickelung auf die Ebene der Ellipse haben den Punkt ($F'$, $J''$) gemein, sowie benachbarte Punkte von $J$, weil die Schnittpunkte einer unendlich nahe bei $J$ parallel zu $\mathbf{P}_1$ geführten Ebene beide Kurven in Punkten schneidet, deren Abstände als Unterschied des Bogens und der Sehne $= 0^3$ sind, was gegen den Abstand $0^1$ der Punkte von $J$ verschwindet. Demnach schmiegt derjenige Cylinder sich dem Konoide in ($F'$, $J''$) an, welcher jene Ellipse zum senkrechten Schnitte und die zwei Geraden $G_1'G_1''$, $H_1'H_1''$ zu ersten Spuren hat.

Von dem Ringe ist der Meridiankreis von $F'$ die eine Krümmungslinie, die darauf senkrechte hat für den Punkt ($F'$, $J''$) einen unendlich großen Krümmungshalbmesser, weil die Flächennormale mit der Umdrehungsaxe der Fläche parallel ist (490). Daher ist eine Schmiegungsfläche derjenige Cylinder, welcher jenen Meridiankreis zum senkrechten Schnitte besitzt, also die $\mathbf{P}_1$ in zwei Geraden trifft, von denen $M'N'$ die eine ist. Da beide Schmiegungsflächen den Punkt ($F'$, $F''$) zum Mittelpunkte haben, so sind ihre ersten Spuren zugleich die Grundrisse ihrer zu demselben $c$ gehörigen Direktrixen, und die Diagonalen des von ihnen gebildeten Rechtecks, wie $F'N'$, die Grundrisse der Tangenten. Man bemerkt, daß $F$ für jede der beiden Flächen ein parabolischer Punkt ist, daß daher die Direktrixen je zwei parallele Gerade sind.

*Übungsaufg.* Die Tangenten in dem Doppelpunkte $P$ der Schnittlinie zweier Cylinder, Kegel oder beliebigen Flächen, deren Hauptkrümmungshalbmesser ermittelt werden können, zu bestimmen. — Man legt zweckmäßig die $\mathbf{P}_1$ parallel zur gemeinschaftlichen Berührungsebene beider Flächen in $P$.

## III. Die Evolute einer ebenen Schnittkurve einer Fläche und ihrer Projektionen.

**494.** Sind in einem Punkte $P$ einer Fläche **F** die Ebenen ihrer Hauptschnitte und deren Krümmungshalbmesser bekannt, so kann daraus nach den Sätzen von *Euler* und *Meusnier* der Krümmungshalbmesser der Schnittkurve der **F** mit irgend einer durch $P$ gelegten Ebene in $P$, und daraus der Krümmungshalbmesser jeder Projektion der Kurve gefunden werden, unter Anwendung derselben Sätze auf den projicirenden Kegel oder Cylinder. Wir werden aber einfacher zum Ziel gelangen, einerseits wenn wir an die Fläche **F** eine Schmiegungsfläche $\mathbf{F}^2$ zweiten Grades legen und den Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes bestimmen, in welchen diese $\mathbf{F}^2$ von jener Ebene geschnitten wird, und andererseits, wenn wir auf die Projektionen den Satz von *Geisenheimer* (I, 261) anwenden.

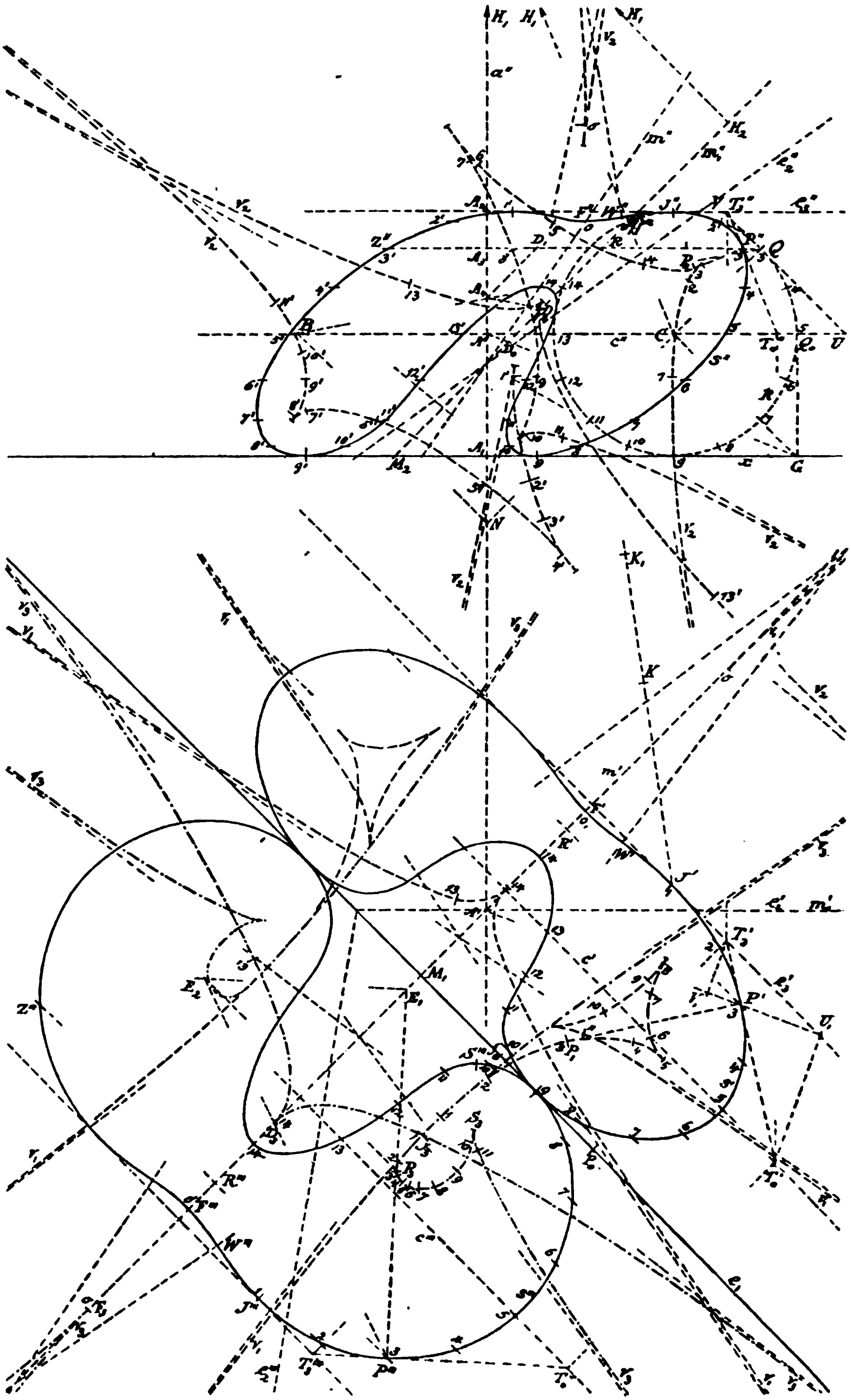
**495.** *Aufg. Die Evoluten der ebenen Schnittkurve eines Ringes und des Grund- und Aufrisses derselben zu ermitteln.*

*Aufl.* Es sei $\mathbf{P}_1$ senkrecht gestellt zur Umdrehungsaxe $a$ des Fig. 202.
Ringes und berühre ihn nach seinem tiefsten Parallelkreise, es sei der Ring durch seine Axe $a$ $(A', a'')$ und den Kreis $k$ (mit dem Mittelpunkte $C$), welcher die Hälfte der zweiten Projektion seines Hauptmeridianes bildet, und es sei die Schnittebene **E** durch ihre Spuren $e_1$ in $\mathbf{P}_1$ und $e_2$ in der Hauptmeridianebene gegeben, woraus noch ihre Spur $e_3$ in der oberen auf der $a$ senkrechten Berührungsebene $\mathbf{P}_3$ des Ringes bestimmt wurde $(e_3 \parallel e_1)$. Die auf **E** senkrechte Meridianebene schneidet die **E** in der Symmetrielinie $m$ $(m', m'')$ der Schnittkurve $s$, deren erste Spur (auf $e_1$) $M_1$ ist; man drehe $m$ um $a$ in die Hauptmeridianebene nach $m_1$ $(m_1', m_1'')$, $M_1$ nach $M_2$ auf $x$ $(A_1 M_2 = A' M_1$; es sei $A_1 = a''x$, $A_2 = a'' e_3'')$. Der Mittelpunkt des Ringes sei $A$, die durch $A \perp a$ gelegte Ebene heiße die Mittelebene und ihr Schnitt $c$ $(c', c'')$ mit **E** die Mittellinie.

Die Projektionen der Schnittkurve $s$ zeichnet man, indem man den Meridiankreis $k$, ausgehend von der Mittelebene, in eine durch vier teilbare Anzahl (16) gleicher Teile teilt, von einem Teilungspunkte $Q$ die Senkrechte $QA_3$ auf $a''$ fällt, diese mit $m_1''$ in $R$ schneidet, auf $m'$ die $A'R' = A_3 R$ aufträgt, $R'P' \perp m'$ zieht und auf ihr $P'$ bestimmt derart, daß $A'P' = A_3 Q$. Daraus folgt $P''$ auf $A_3 Q$. Die wahre Gestalt $s''$ ermittle man durch Umlegung der **E** um $e_1$ in $\mathbf{P}_1$. Dabei gelangt $R'$ nach $R'''$ auf $m'$, wobei $M_1 R''' = M_2 R$. Sodann zieht man $R''' P''' \perp m'$ und $= R'P'$.

Die *Tangenten* der $s$ erhält man durch ihre Spuren mit zweien von den drei Ebenen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$, der Mittelebene. Für die Tangente in **P**

Fig. 202.



benutzt man die beiden letzteren; man schneidet die Tangente der $k$ in $Q$ mit $c''$ in $U$, mit $e_3''$ in $V$, trägt die $A''U$ und $A_2V$ auf $A'P'$ bezw. nach $A'U_1$ und $A'V_1$, zieht $U_1T_0'$ und $V_1T_3' \perp A'P'$, und schneidet sie bezw. mit $c'$ und $e_3'$ in $T_0'$ und $T_3'$, so ist $T_0'T_3'$ die Tangente der $s'$ in $P'$, woraus mittelst dieser zwei Punkte diejenigen der $s''$ und $s'''$ gefunden werden.

**496.** *Die Evolute $v_3$ der wahren Gestalt $s'''$.* Um den *Krümmungsmittelpunkt $P_3$ der wahren Gestalt $s'''$ in einem allgemeinen Punkte $P'''$* zu erhalten, legt man eine sich der $\mathbf{F}$ entlang des durch $P$ gehenden Parallelkreises $PQ$ anschmiegende Umdrehungsfläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$, deren Umdrehungsaxe dann $a$ ist. Zu dem Ende legt man einen dem Meridiane $k$ in $Q$ sich anschmiegenden Kegelschnitt mit $a$ als Axe. Seinen Mittelpunkt $A_4$ auf $a$ findet man*) durch Umkehrung der in I, 392, 1) gegebenen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes $C$ in $Q$, wenn man die Normale $QC$ mit $a$ in $N$ schneidet, $NB \perp QN$ bis $B$ auf $CA''$ zieht; dann trifft $BQ$ die $a$ in $A_4$, und hierdurch ist die $\mathbf{F}^2$ bestimmt. Die $\mathbf{F}^2$ wird von $\mathbf{E}$ in einem Kegelschnitte $\mathbf{EF}^2$ getroffen, dessen Mittelpunkt auf der Symmetrielinie $m$ und auf dem zu $\mathbf{E}$ konjugirten Durchmesser der $\mathbf{F}^2$ liegt; um diesen zu ermitteln, drehen wir $m$ um $a$ nach $m_1$ und suchen den Durchmesser $A_4D$, welcher zu der Linie $m_1''$ in Bezug auf den Hauptmeridian $h$ der $\mathbf{F}^2$ konjugirt ist. Dieser $h$ ist ein Kegelschnitt, welcher $a''$ zur einen Axenlinie, $A_4$ zum Mittelpunkte, $QN$ zur Normale und $QV$ zur Tangente hat. Zieht man nun $A_4D_1 \parallel m_1''$ bis $D_1$ auf $QA_3$, so ist die $\perp ND_1$ gelegte $A_4D$ der zu $m_1''$ (und zu $A_4D_1$) konjugirte Durchmesser, und sein Schnittpunkt $D$ mit der $m_1''$ der gesuchte Mittelpunkt des Kegelschnittes $\mathbf{EF}^2$ nach der Drehung um $a$. Denn denkt man sich die Tangente $QV$ mit $a''$ in dem (nicht verzeichneten) Punkte $X$ geschnitten, $XY \perp ND_1$ bis $Y$ auf $A_3Q$ gezogen, so sind $D_1$ und $Y$ durch $h$ harmonisch getrennt, d. i. durch $Q$ und den zu $Q$ in Bezug auf $A_3$ symmetrischen Punkt (weil $XQN = 90^0$ und $XY \perp ND_1$ (I, 302, Fig. 160)); und da $A_3Q$ die Polare von $X$ zu $h$, so ist $D_1$ der Pol der $XY$ zu $h$. Daher ist zu dem Durchmesser $A_4D_1$ des $h$ der zu $XY$ parallele $A_4D$ (ebenfalls $\perp ND_1$) konjugirt. Überträgt man nun die Strecke $M_2D$ auf $m'$ nach $M_1D_3$, so ist von der wahren Gestalt des Kegelschnittes $\mathbf{EF}^2$, $m'$ eine Axenlinie, $D_3$ der Mittelpunkt, $P'''$ ein Punkt, die auf $P'''T_3'''$ Senkrechte $P'''P_3$ die Normale;

*) Das Verfahren der sich entlang eines Parallelkreises anschmiegenden Fläche rührt von Herrn *Staudigl* her (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, B. 68, Abt. 2, 1873, S. 228); das Verfahren zur Bestimmung des Mittelpunktes dieser Flächen von Herrn *Pelz* (dies. Sitzungsber., B 79, Abt. 2, 1879, S. 471).

und auf dieser wird der Krümmungsmittelpunkt $P_3$ gefunden (I, 392, 1)), wenn man $P'''P_3$ mit $m'$ in $E_1$ schneidet, $E_1E_2 \perp P'''E_1$ zieht, mit $P'''D_3$ in $E_2$ schneidet, woraus $P_3$ durch $E_2P_3 \perp m'$ folgt.

Für den *Parallelkreis*, welcher mit demjenigen $PQ$ in Bezug auf die Mittelebene *symmetrisch* ist, gilt diese Symmetrie auch für die sich anschmiegende $\mathbf{F}^2$ und ihren Mittelpunkt; der zu $m_1''$ konjugirte Durchmesser ist dann mit $A_4D$ parallel.

**497.** Liegt der *Punkt der Schnittkurve s in der Mittelebene*, etwa auf dem größten Parallelkreise $A''Q_0$, so ist $A''$ der Mittelpunkt der sich anschmiegenden $\mathbf{F}^2$; aber zur Bestimmung des zu $m_1''$ konjugirten Durchmessers $A''D_0$ versagt das soeben angewendete Verfahren. Man findet $A''D_0$ vielmehr, wenn man die Tangente $Q_0G$ des Kreises $k$ in $Q_0$ mit dem zu $m_1''$ senkrechten Durchmesser $CG$ des $k$ in $G$ schneidet ($G$ zufällig auf $x$); dann bestimmt die $A''G$ auf $m_1''$ den Punkt $D_0$. Denn $k$ und der Hauptmeridian $h$ der $\mathbf{F}^2$ berühren sich in dem Scheitel $Q_0$ vierpunktig; daher können für diese beiden perspektiven Kegelschnitte $Q_0$ und $Q_0G$ bezw. als Mittelpunkt und Axe der Kollineation angesehen werden, und die Pole des aus $Q_0$ parallel zu $m_1''$ gezogenen Strahles zu $h$ und $k$ fallen in einem Punkte von $Q_0G$ zusammen. Dieser Pol zu $k$ liegt aber auf dem zu $m_1''$ senkrechten Durchmesser $CG$, ist also $G$; daher ist er es auch zu $h$, und $A''G$ ist die Polare des unendlich fernen Punktes der $m_1''$ oder der zu $m_1''$ konjugirte Durchmesser des $h$.

**498.** Liegt ein *Punkt F der Schnittkurve s in deren Symmetrielinie m*, so liegt die Tangente des Parallelkreises der $\mathbf{F}$ in $F$ in der Schnittebene $\mathbf{E}$, und es geht durch diese Tangente eine Hauptebene der $\mathbf{F}$. Der Krümmungshalbmesser des durch sie auf $\mathbf{F}$ erzeugten Hauptschnittes ist aber $= HH_1$, wenn $H$ derjenige Schnittpunkt von $k$ und $m_1''$, auf dessen Parallelkreise $F$ liegt, und wenn $HH_1$ die Normale des $k$, und $H_1$ ihr Schnittpunkt mit $a''$ ist. Nach dem Satze von *Meusnier* ist aber der Krümmungshalbmesser der Schnittkurve $s$ gleich der Projektion des Krümmungshalbmessers unseres Hauptschnittes auf die Ebene $\mathbf{E}$, und diese fällt in die Symmetrielinie $m$, ist daher nach der Drehung die Projektion $HH_2$ von $HH_1$ auf $m_1''$. Daher ist $F_3$ der Krümmungsmittelpunkt für $F'''$, wenn auf $m'$ die $F'''F_3 = HH_2$.

**499.** *Liegt ein Punkt J der Kurve s auf dem höchsten oder tiefsten Parallelkreise*, so sind die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der $\mathbf{F}$ in der Meridianebene $= r_2 = CQ_0$, und in der darafn senkrechten Ebene $J'K(\perp A'J')$ unendlich, so dass der Krümmungshalbmesser $r$ des durch $e_3$ gehenden Normalschnittes der $\mathbf{F}$ durch $r = r_2 : \sin^2\varphi$ ausgedrückt ist, wenn $\varphi$ den Winkel der $e_3'$ mit $J'K$

bedeutet (480, 3)). Bestimmt man daher auf $J'K$ zuerst $K$ so, dass sein Abstand von $e_3' = r_2 = CQ_0$, dann $K_1$ so, dass dessen Abstand von $e_3' = J'K$, so ist $J'K_1 = r$. Nun bildet aber **E** mit der durch $e_3$ gehenden Normalebene den Winkel $a''m_1''$; daher ist (486) der Krümmungshalbmesser der $s$ in $J = J'''J_3 = r \cos a''m_1'' = r \sin xm_1''$ = Abstand $K_2x$, wenn auf $m_1''$ die $M_2K_2 = r = J'K_1$ aufgetragen wurde. — Ebenso kurz kann man $J_3$ bestimmen mittelst des Cylinders, welcher die **F** entlang des Meridiankreises von $J$ berührt, durch Bestimmung des Krümmungshalbmessers seines Schnittes mit **E** aus zwei konjugirten Durchmessern (I, 262).

**500.** Die Schnittkurve $s$ besitzt Punkte mit unendlich großen Krümmungshalbmessern, die im allgemeinen *Wendepunkte* sind; sie liegen in denjenigen Punkten des konvex-konkaven (inneren) Teiles der **F**, in denen eine Haupttangente der **F** in die **E** fällt. Denn in dem durch eine Haupttangente gehenden Normalschnitte (480, 2)) ist der Krümmungshalbmesser unendlich groß; daher auch im schiefen Schnitte (486), außer wenn dessen Ebene die **F** berührt. Der unendlich große Krümmungshalbmesser erhält sich in den Projektionen. Die Kurven $s, s', s''$ besitzen viermal in drei entsprechenden Punkten Wendepunkte.

Fig. 202a.

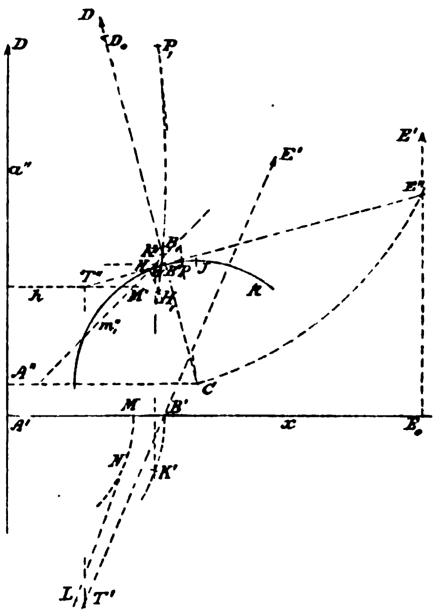



Fig. 202a.

Man bemerkt aus der entgegengesetzten Krümmung der $s$, daß zwischen $F$ und $J$ ein Wendepunkt $W$ liegen muß, und sucht daher in einer gesonderten Figur mittelst einer Fehlerkurve denjenigen zwischenliegenden Parallelkreis, für welchen eine Haupttangente in **E** fällt; dabei möge $x$ durch $A'$ gelegt werden. $J$ (der höchste) und $H$ seien diejenigen Punkte des $k$, auf deren Parallelkreisen bezw. die Punkte $J$ und $F$ der $s$ in Fig. 202 liegen. Nehmen wir auf $k$ etwa zwei Punkte zwischen $J$ und $H$ an, von denen $B$ ($B'$, $B''$) einer sei, so konstruiren wir eine der zwei Haupttangenten der **F** in $B$ nach Nr. 157, indem wir in $B''$ die Tangente $B''T''$ und die Normale $CB''D$ des $k$ ziehen, letztere mit $a''$ in $D$ schneiden, und

über $DC$ als Durchmesser einen Kreis zeichnen (dessen Mittelpunkt $D_0$ auf der Geraden liegt, welche $A''C$ senkrecht halbirt); derselbe treffe die $B''T''$ in $E''$, und hieraus bestimme man $E'$ so, daß $E''E_0E' \perp A'B'(=x)$, $E_0$ der Fußpunkt auf $x$, und $E_0E' = B''D$. Dann ist $B'E'$ die erste Projektion einer der beiden gesuchten Haupttangenten, deren Schnittpunkt $T(T'', T')$ mit einer zu $\mathbf{P}_1$ parallelen Hilfsebene $\mathbf{H}$, welche $h$ zur zweiten Projektion hat, bestimmt werde. Dreht man nun $B$ mit der Haupttangente um $a$, bis $B$ in $\mathbf{E}$ fällt, und fällt dann zugleich die Haupttangente in $\mathbf{E}$, so ist diese Lage von $B$ ein Wendepunkt der $s$. Man kann dies auch durch Drehung von $\mathbf{E}$ um $a$, bis sie durch $B$ geht, entscheiden. Dreht man zunächst $\mathbf{E}$ um $a$, bis sie $\perp \mathbf{P}_2$ steht, wobei sie $m_1''$ zur zweiten Projektion hat, so schneidet sie den Parallelkreis von $B$ in $K(K'', K')$ und die Ebene $\mathbf{H}$ in einer Tangente in $M'$ an den bei der Drehung um $a$ durch den Schnittpunkt $M$ von $m_1''$ und $h$ erzeugten Kreises $M'N$. Dreht man nun die $\mathbf{E}$ zurück, bis sie durch $B$ geht, was man erreicht, wenn man die auf ihr senkrechte Meridianebene aus $A'B'$ in $A'K'$ dreht, so ist ihre Spur eine auf $A'K'$ senkrechte Tangente $NL$ des Kreises $M'N$; und sie enthält auch die Haupttangente $BT$ der $\mathbf{F}$ in $B$ dann, wenn $T'$ in $NL$ liegt. Dies ist aber hier nicht der Fall, und der Abstand $T'L$ des $T'$ von $NL$ kann als Maß des Fehlers dienen. Trägt man diesen Fehler $T'L$ auf dem Halbmesser $CB''$ in irgend einem Sinne nach $B''B_1$ auf, sucht ebenso für den Zwischenpunkt $P$ und für $H$ die Fehler, die man mit ihrem jetzt bestimmten Sinne bezw. nach $PP_1$, $HH_1$ aufträgt, so ist $P_1B_1H_1$ eine Fehlerkurve, welche den Kreis $k$ in dem Punkte $W$ schneidet. Auf dem Parallelkreise von $W$ sucht man dann in Fig. 202 den Punkt $W$ der Schnittkurve $s$, welcher ihr Wendepunkt ist, sowie die Tangente in jeder Projektion und deren Normale; die letztere bildet dann jedesmal die Asymptote der $s$.

**501.** Den größten und kleinsten Krümmungshalbmessern der $s$ entsprechen *Spitzen ihrer Evolute.* Solche sind im allgemeinen die Punkte der Symmetrielinien, wenn deren vorhanden sind, so in $s'''$ und $s'$; die anderen Spitzen, wie $S_3$ für $S'''$, können durch Fehlerkurven bestimmt werden. Zeigt der Verlauf der Evolute $v$ eine Spitze $S_1$ an, so müssen in kleinen Abständen von derselben auf der einen Seite von $S_1$ wenigstens ein Punkt $C_1$, auf der anderen zwei Punkte $A_1$, $B_1$ der $v$, bezw. zu $C, A, B$ der $s$ gehörig, konstruirt sein, damit man die Bogen $ABC$ der $s$ und $A_1B_1C_1$ der $v$ genügend genau, letztere mit Ausnahme der Stelle bei $S_1$, zeichnen kann. Man ziehe nun, nahezu senkrecht auf

Fig. 202b.

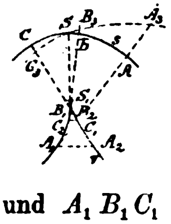


Fig. 202b.

die mutmaßliche Richtung $S_1 S$ die Sehnen der Evolute $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, so sind deren Längen ein Maß für ihre Abstände von der Spitze und werden in dieser Null, so daß sie als Maß der Fehler bezeichnet werden können. Trägt man sie bezw. auf $A_1 A$ nach $AA_3$, eben so nach $BB_3$, $CC_3$ in ihrem Sinne auf, zieht die Fehlerkurve $A_3 B_3 C_3$, so schneidet diese die $s$ in dem Punkte $S$, dessen Krümmungsmittelpunkt $S_1$, in gewöhnlicher Weise gesucht, die Spitze der Evolute bildet.

**502.** Zur Verzeichnung der *Evoluten $v_1$, $v_2$ der beiden Projektionen $s'$, $s''$ der Schnittkurve* bestimmt man die Krümmungshalbmesser $r'$, $r''$ der $s'$, $s''$ aus denen $r$ der wahren Gestalt $s$ oder $s'''$ nach I, 261, worin für unseren Fall der Affinität zwischen $s$ und $s'$, $s$ und $s''$ gilt (I, 262), wenn man $P$ durch $P'''$ und $t$ durch $t'''$ ersetzt,

$$\frac{r'}{r} = \frac{P''' P_0}{P' P_0} \left(\frac{t'}{t'''}\right)^3.$$

Darin bedeuten, zunächst für die *erste Projektion*, $P_0$ den Schnitt- Fig. 202.
punkt von $P''' P'$ mit der Affinitätsaxe $e_1$, sowie $J_0$ von $J''' J'$ mit $e_1$, daher $P''' P_0 : P' P_0 = J''' J_0 : J' J_0$ die unveränderliche Charakteristik der Affinität, $t'''$, $t'$ die Stücke der Tangenten der $s'''$, $s'$ bezw. in $P'''$, $P'$ zwischen je einem dieser Punkte und $e_1$, oder auch irgend zwei andere entsprechende Stücke dieser Tangenten.

Zeichnet man nun einen (für alle Punkte giltigen) Winkel $\alpha_1$, Fig. 202c.
so daß $\sin \alpha_1 = J' J_0 : J''' J_0$, überträgt also $J' J_0$ und $J''' J_0$ aus Fig. 202 in Fig. 202c, bezw. als eine Kathete und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks; zeichnet ferner für den Punkt $P$ einen

Fig. 202c.

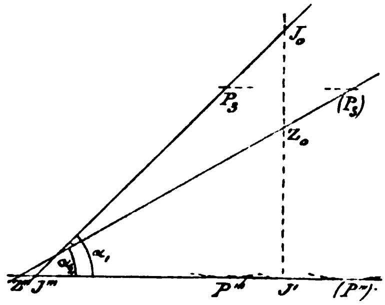
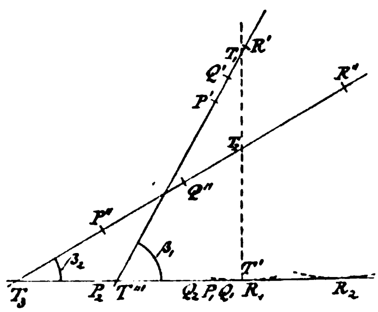


Fig. 202d.



(mit dem Punkte wechselnden) Winkel $\beta_1$, so daß $\sin \beta_1 = t' : t'''$, Fig. 202d.
indem man aus Fig. 202 die sich entsprechenden Strecken $T_0' T_3'$ und und $T_0''' T_3'''$ in die Fig. 202d bezw. als eine Kathete $T_1 T'$ und die Hypotenuse $T_1 T'''$ eines rechtwinkligen Dreiecks aufträgt, so erhält man nach der obigen Formel und in der Weise der I, 261 aus dem

$r = P'''P_3$ der Fig. 202 den $r'$ mittelst der Figuren 202c, d, wenn man in diese jene $P'''P_3$ überträgt, ferner $P_3J'''$ nach $T'''R'$, $R'R_1$ nach $T'''Q'$, $Q'Q_1$ nach $T'''P'$ trägt; dann ist $P'P_1 = r' = P'P_1$ der Fig. 202.

In Bezug auf die *zweite Projektion* beachtet man, daß man die
Fig. 202. Schnittlinie $e_2$ der **E** mit der Hauptmeridianebene als Kollineationsaxe zwischen der in diese Ebene umlegbaren wahren Gestalt $s$ und der zweiten Projektion $s''$ ansehen kann, welche Linie $e_2$ daher als $e_2'''$ in die Figur der wahren Gestalt $s'''$ übertragen wurde. Es ist
Fig. 202c. dann wieder ein Winkel $\alpha_2$, und zwar für einen beliebigen Punkt $Z$ der $s$ gezeichnet, so daß $J'Z_0$ und $Z'''Z_0$ der Fig. 202c bezw. gleich den Abständen des $Z''$ von $e_2''$ und des $Z'''$ von $e_2'''$ in Fig. 202
Fig. 202d. sind; und ein Winkel $\beta_2$ für $P$, so daß $T_2T'$ und $T_2T_3$ in Fig. 202d bezw. gleich $T_0''T_3''$ und $T_0'''T_3'''$ der Fig. 202 sind; dann trägt man $r$ ($= P'''P_3$ in Fig. 202) nach $(P'''P_3)$, $(P_3)Z'''$ nach $T_3R''$, $R''R_2$ nach $T_3Q''$, $Q''Q_2$ nach $T_3P''$, so ist $P''P_2 = r'' = P''P_2$ der Fig. 202.

Die *Spitzen* der Evoluten der $s'$ und $s''$ müssen besonders, so wie die der $s'''$, gesucht werden.

## IV. Die konjugirten Tangenten einer Fläche und die Tangenten ihrer Eigenschattengrenze.

**503.** *Satz von Dupin*). Ist einer Fläche* **F** *eine abwickelbare Fläche umschrieben, so sind in einem Punkte P der Berührungskurve k deren Tangente t und die Erzeugende e der abwickelbaren Fläche zwei konjugirte Tangenten der* **F** *und zugleich zwei konjugirte Durchmesser der Indikatrix der* **F** *in P.*

*Bew.* Legt man an **F** die sich in $P$ anschmiegende Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$ und aus allen Punkten $E$ der $e$ die umschriebenen Kegel an $\mathbf{F}^2$, so liegen deren Berührungskurven in Ebenen, welche ein Büschel bilden, dessen Axe die zu $e$ konjugirte Tangente der $\mathbf{F}^2$ in $P$ ist (77, 3)). Die Durchmesserebene der $\mathbf{F}^2$, welche zu ihrer Berührungsebene in $P$ parallel läuft, und deren Schnitt mit $\mathbf{F}^2$ ähnlich und ähnlich gelegen mit ihrer Indikatrix $i$ in $P$ ist, wird von der Polarebene des unendlich fernen Punktes der $e$ in einem zu $t$ parallelen und zu der Richtung von $e$ konjugirten Durchmesser geschnitten, so dass $e$ und $t$ konjugirte Durchmesser der $i$ sind. Zugleich ist $t$ die Tangente der Berührungskurve $k$ der **F**, weil **F** und $\mathbf{F}^2$ in $P$ und in dessen benachbarten Punkten gemeinschaftliche Berührungsebenen besitzen, also in denselben Punkten zugleich von der

*) *Dupin*, développements de géométrie, 1813.

der F umschriebenen abwickelbaren Fläche, als von jenen der $F^2$ umschriebenen Kegeln berührt werden.

Ist die Indikatrix $i$ eine *Hyperbel*, so sind $t$ und $e$ durch die Asymptoten der $i$ harmonisch getrennt; besteht die Indikatrix, und dies findet bei einem *parabolischen Punkte* statt, aus einem Paare paralleler Geraden, so kann man sich diese als eine Hyperbel denken, deren beide Asymptoten in eine zu den Geraden parallele Gerade zusammengefallen sind; diese ist dann stets die $t$, welche Richtung auch $e$ haben mag.

**504.** *Aufg. Für die Eigen- und Schlagschattengrenze einer Umdrehungsfläche die Tangenten in beliebigen Punkten und die Krümmungskreise in den Scheiteln zu bestimmen.*

Diese Aufgabe wurde schon früher (177 ff.) auf Grundlage der Konstruktionsweise der Kurve (für die Tangenten nach dem Verfahren der ähnlichen Figur) gelöst; es soll aber hier ihre Lösung *mit Hilfe der Sätze über die Krümmung der Flächen* und ihrer Schnitte gegeben werden. — Es möge dabei der *leuchtende Punkt $L$ im Endlichen* angenommen, die $P_1$ senkrecht zur Umdrehungsaxe $a$ der Fläche, $P_2$ parallel zur Meridianebene $La$ gestellt und als Fläche F ein Kreisring gewählt werden; von demselben wird nur die hintere, durch die Ebene $La$ begrenzte Hälfte als vorhanden gedacht. Auch sollen die Konstruktionen nur für den konvex-konkaven (inneren) Teil der Fläche ausgeführt werden.

Der Hauptmeridian (in der Ebene $La$) wird durch die beiden Kreise $k$, $k_1$ mit den Mittelpunkten $C$, $C_1$ gebildet; $A$ auf $CC_1$ ist der Mittelpunkt der Fläche. Ein Punkt $P$ der Eigenschattengrenze $s$ auf dem Parallelkreise eines Punktes $Q$ des $k$ wurde im Aufriß als $P''$ ohne Benutzung des Grundrisses, wie in Nr. 176, bestimmt, entweder, indem man in $Q$ die Tangente und die Normale des $k$ mit $a''$ bezw. in $T$ und $N$ schnitt, und $NP'' \perp L''T$ zog, oder nach einem Verfahren, welches auch für den Kehlkreis anwendbar bleibt, für welchen das andere versagt, indem man die Tangente des $k$ in seinem Schnittpunkte $Q_2''$ mit dem Kehlkreise mit der auf $a''$ Senkrechten $L''B''$ in $D$ schnitt, $L''Q_2''$ bis $E$ auf $a''$ zog, worauf sich $P_2''$ auf $DE$ ergab.

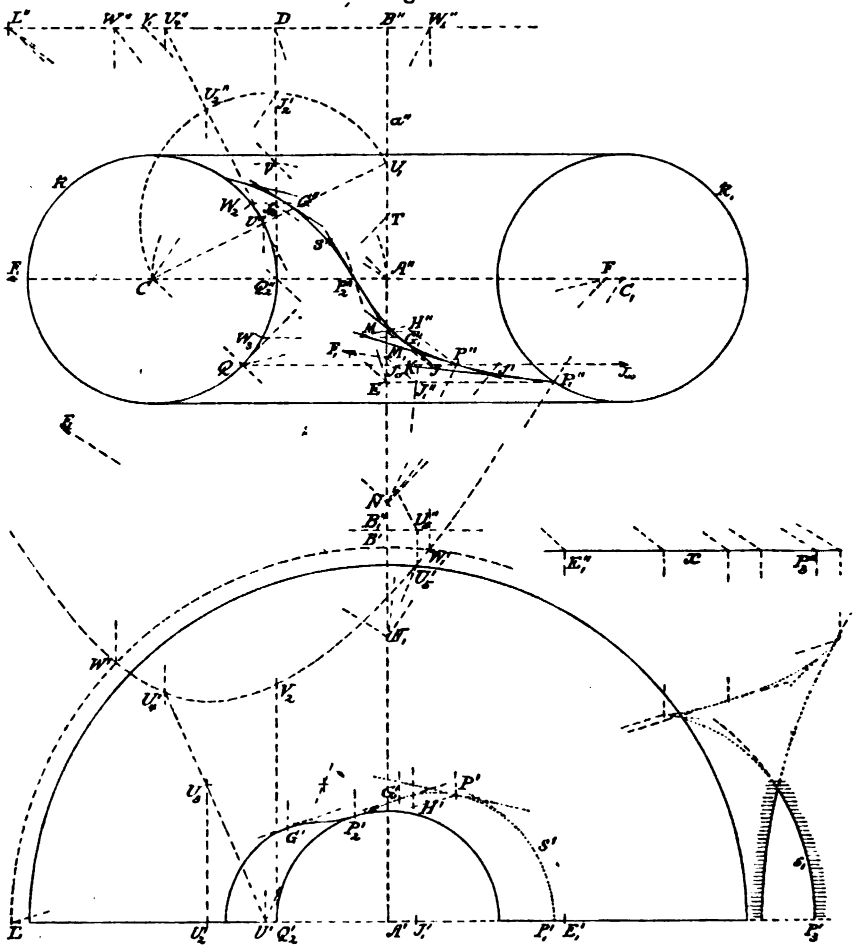
Die Konstruktion der *Tangente an die Eigenschattengrenze* wird von Herrn *de la Gournerie**) als konjugirte Tangente zum Lichtstrahle bestimmt, und diese durch die aus den Hauptkrümmungshalbmessern ermittelte Projektion der Indikatrix. Herr *Staudigl***)

*) *De la Gournerie*, traité de géométrie descriptive, B. 3, 1864, S. 63.

**) *Staudigl*, Bestimmung von Tangenten an die Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen; Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, B. 68, Abt. 2, 1873, S. 228.

benutzt dagegen eine an die Fläche **F** entlang eines Parallelkreises sich anschmiegende Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$, und Herr *Pelz* *) behält diesen Grundgedanken bei, vereinfacht aber die Durchführung (vergl. Nr. 496). Seine Konstruktion für den Grundriß habe ich im Folgenden ungeändert beibehalten, für den Aufriß eine andere wohl noch etwas einfachere gegeben.

Fig. 203.



**505.** *Aufl.* Der Mittelpunkt *M* der Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$, welche sich der **F** entlang des durch die Punkte *P* und *Q* gehenden Parallelkreises anschmiegt (und welche für die inneren Punkte, wie *P*, ein einschaliges Hyperboloid ist), wird nach Nr. 496 gefunden,

*) *Pelz*, die Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen; Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, B. 79, Abt. 2, 1879, S. 471.

wenn man $NF \perp QN$ bis $F$ auf $CC_1$ zieht und $QF$ mit $a''$ in $M$ schneidet.

Die Tangente der $s$ in $P$ liegt in der Polarebene jedes Punktes der $LP$ zu $\mathbf{F}^2$ (503); wählt man diesen Punkt in der zu $\mathbf{P}_1$ oder zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Hauptebene der $\mathbf{F}^2$, so ist diese Polarebene $\perp \mathbf{P}_1$ bezw. $\perp \mathbf{P}_2$, ihre Spur und Projektion ist dann die Polare jenes Schnittpunktes zu dem Hauptschnitte der $\mathbf{F}^2$ in dieser Hauptebene und unmittelbar die erste bezw. zweite Projektion der gesuchten Tangente.

Schneidet man daher für den *Grundriß* $LP$ mit der durch $M$ gehenden zu $\mathbf{P}_1$ parallelen Hauptebene in $H$ ($H''$ auf $L''P''$, $MH'' \parallel x$, $H'$ auf $L'P'$), so ist die Polare von $H'$ zu dem mit $\mathbf{P}_1$ parallelen Hauptschnitte von $\mathbf{F}^2$, d. i. zu einem aus $A'$ gezogenen Kreise, $\perp A'H'$, und die gesuchte Tangente an $s'$ ist daher die aus $P'$ auf $A'H'$ gefällte Senkrechte.

Für den *Aufriß* schneidet man $L''M$ mit $QP''$ in $J$, dann ist die gesuchte Tangente die aus $P''$ auf $NJ$ gefällte Senkrechte. Denn der Schnittpunkt der $LP$ mit der zu $\mathbf{P}_2$ parallelen Hauptebene $La$ ist $L$, und die Polare von $L$ zu dem in $La$ liegenden Hauptschnitte $m$ der $\mathbf{F}^2$ ist parallel zu dem zu $ML$ konjugirten Durchmesser des $m$. Um diesen zu finden, beachte man, daß das Büschel der Durchmesser des $m$ und das ihrer konjugirten Durchmesser, sowie ein Büschel von Senkrechten zu den letzteren unter einander projektiv sind und auf jeder Geraden projektive Punktreihen einschneiden. Wählt man $N$ als Mittelpunkt des Büschels der Senkrechten und $QP''$ als Gerade, so decken sich die erste und die letzte Punktreihe, weil sich dreimal zwei entsprechende Punkte decken. Liegen nämlich von $QP''$ die Punkte $J_0$ und $J_\infty$ bezw. auf $a''$ und im Unendlichen, so sind jene drei sich selbst entsprechende Punkte $J_0$, $J_\infty$, $Q$, weil zu den Durchmessern $MJ_0$, $MJ_\infty$, $MQ$ bezw. die Durchmesser $MJ_\infty$, $MJ_0$ und der zur Tangente $QT$ parallele konjugirt sind, und auf diesen bezw. die Strahlen $NJ_0$, $NJ_\infty$ und $NQ$ senkrecht stehen. Daher müssen alle entsprechenden Punkte sich decken, und es ist zum Durchmesser $ML''J$ der auf $NJ$ senkrechte konjugirt und damit die Tangente an $s''$ in $P''$ parallel. — Da die Beziehung reciprok ist, kann man auch $NJ' \perp ML''$ bis $J'$ auf $QP''$, und die Tangente aus $P'' \parallel MJ'$ ziehen. Der Genauigkeit halber wird man das Verfahren wählen, welches die längere bestimmende Linie ($NJ$ oder $MJ'$) liefert. — In Nr. 496 wurde das gleiche Verfahren nur mit anderer Begründung gegeben.

Ganz auf dieselbe Weise sind die Tangenten an $s''$ in ihren *Punkten des Hauptmeridians* $k$ und $k_1$, so in $P_1''$, bestimmt.

Für den *Punkt* $P_2''$ *des Kehlkreises* versagt das Verfahren, weil

für ihn $M$, $N$ und $J_0$ in $A''$ ineinanderfallen. Wählt man aber hier $C$ als Mittelpunkt des Büschels jener Senkrechten, so ist $Q_2''D$ der perspektive Schnitt mit dem ersten Büschel $A''$ der Durchmesser, weil den Durchmessern $A''Q_2''$, $A''B''$ die mit ihnen parallelen Strahlen aus $C$, und der Asymptote der Hyperbel $m$, die mit sich selbst konjugirt ist, der auf ihr senkrechte Strahl aus $C$ entspricht, und weil sich beide auf der Scheiteltangente $Q_2''D$ treffen (I, 250). Zieht man dann die $A''L''$ oder die $CJ_2' \perp A''L''$, und schneidet sie mit $Q_2''D$ bezw. in $J_2$ und $J_2'$, so ist die Tangente der $s''$ in $P_2'' \perp CJ_2$ und $\parallel A''J_2'$. Die zweiten Linien sind hier zweckmäßiger, weil $A''J_2' > CJ_2$. — Es ist leicht einzusehen, daß das Verfahren ungeändert auch gilt, wenn $m$ eine Ellipse ist. — Eines der Verfahren des Herrn *Pelz*, auch für den allgemeinen Punkt $P''$, kann durch die obigen Betrachtungen begründet werden, wenn man die $\parallel a''$ durch $Q$ gezogene Gerade als perspektiven Schnitt jener beiden Strahlenbüschel wählt.

**506.** Die *Grenzpunkte* der Eigenschattengrenze sind diejenigen Punkte, in welchen der Lichtstrahl und die Tangente der Schattengrenze in einander fallen (181), was in einer Asymptote der Indikatrix, d. i. in einer Haupttangente der Fläche stattfindet. Wir müssen daher die Grenzpunkte als diejenigen (hyperbolischen) Punkte der Fläche aufsuchen, in welchen eine Asymptote ihrer Indikatrix durch den leuchtenden Punkt $L$ geht, oder es müssen in jedem Punkte des Parallelkreises eines Grenzpunktes die Asymptoten der Indikatrix den Kreis $LB$ schneiden, welchen $L$ bei seiner Drehung um $a$ beschreibt. Man sucht nun in verschiedenen Punkten des Hauptmeridians $k$ die Asymptoten der Indikatrix, schneidet sie mit der Ebene des $LB$ in Punkten einer Ortskurve, aus deren Schnittpunkten mit dem Kreise $LB$ sich dann die Parallelkreise der Grenzpunkte ergeben. Zur Ausführung ziehe man (157) in einem Punkte $U''$ des Kreises $k$ dessen Tangente $U''U_2''$ und Normale $CU''$, welch letztere die $a''$ in $U_1$ trifft, zeichne über $CU_1$ als Durchmesser einen Halbkreis, schneide ihn mit der Tangente $U''U_2''$ in $U_2''$, projicire diesen Punkt auf $A'L'$ nach $U_2'$ und trage auf der Projicirenden die $U_2'U_3 = U''U_1$ auf, so ist $U'U_3$ die erste Projektion einer Asymptote der Indikatrix in $U$; diese Asymptote schneidet die Ebene des Kreises $LB$ in $U_4$, so daß $U_4'$ ein Punkt der Ortskurve ist. Ein weiterer Punkt derselben wird leicht aus dem Punkte der $k$ gewonnen, welcher zu $U''$ in Bezug auf $CC_1$ symmetrisch liegt. Die ersten Projektionen der Asymptoten der Indikatrix fallen für beide symmetrischen Punkte offenbar zusammen; und man findet daher am kürzesten einen Punkt $U_5'$ desselben Astes der Ortskurve, wenn man die zweite Asymptote $U'U_5'$ symmetrisch mit der ersten in

Bezug auf $U'U''$ zeichnet, die Tangente $U''U_4''$ mit der zu $B''L''$ in Bezug auf $CC_1$ symmetrischen Geraden $B_1''U_5''$ in $U_5''$ schneidet und zu diesem Punkte die erste Projektion $U_5'$ auf $U'U_5'$ bestimmt.

Rückt $U''$ nach $Q_2''$ auf $CC_1$, so schneidet der Kreis von Durchmesser $CA''$ die Tangente $Q_2''D$ in $V$, und $A''V$ kann als die zweite Projektion der einen Asymptote der Indikatrix in dem Punkte des Kehlkreises angesehen werden, dessen zweite Projektion $A''$ ist. Schneidet $A''V$ die $L''B''$ in $V_1$, so ist offenbar $V_2$ der Schnittpunkt der Asymptote der Indikatrix in $Q_2$ mit der Ebene des Kreises $LB$, wenn auf $Q_2'Q_2''$ die $Q_2'V_2 = B''V$ aufgetragen wird.

Die Ortskurve besteht aus zwei zu $A'L'$ symmetrischen parabelartigen Ästen, deren unendlich ferne Punkte auf einer Senkrechten zu $A'L'$ liegen, weil dies für die Haupttangenten in dem höchsten und tiefsten Punkte des $k$ gilt. Es genügt, einen Teil des einen Astes zu zeichnen; er schneidet den Kreis $L'B'$ in den Punkten $W'$, $W_1'$, woraus sich $W''$, $W_1''$ auf $L''B''$ ergeben; die aus diesen Punkten an die innere Hälfte von $k$ gezogenen Tangenten liefern Berührungspunkte $W_2$, $W_3$, auf deren Parallelkreisen die Grenzpunkte $G$, $G_1$ liegen (in denen die Tangenten an $s$ durch $L$ gehen).

**507.** *Die Krümmungskreise der $s$, $s'$, $s_1$ in ihren Scheiteln*, von denen die an $s'$, $s_1$ schon in Nr. 183 bestimmt worden sind, sollen noch mittelst der Lehre der Krümmung der Flächen ermittelt werden. Ist $P_1$ ein Scheitel der $s$ und $P_1''K$ die Tangente der $s''$ in $P_1''$, so berührt deren zweite projicirende Ebene die $s$ vierpunktig in $P_1$ und ist ihre Schmiegungsebene. Der Krümmungshalbmesser der $s$ in $P_1$ fällt mit demjenigen der Schnittkurve dieser Ebene $P_1''K$ mit dem Ringe zusammen und ist nach dem Satze von Meusnier (486) die Projektion $P_1''K$ der Flächennormale $P_1''N_1$ auf $P_1''K$, weil $P_1''N_1$ der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der Kurve ist, welcher mit unserer Schnittebene die Tangente der Fläche in $P_1$ gemein hat. Den Krümmungshalbmesser der ersten Projektion $s'$ in $P_1'$ erhält man als $P_1'J_1' = P_1''J_1''$, wenn $J_1''$ der Schnittpunkt von $N_1K$ mit $P_1''E$, weil auf dem Cylinder, welcher $s$ in $s'$ projicirt, nach dem Satze von Meusnier der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes $P_1''K$ die senkrechte Projektion desjenigen des Normalschnittes $P_1''E$ sein, also $J_1''K \perp P_1''K$ stehen muß. $J_1''$ ist aber auch der Schnittpunkt der $L''M_1$ mit $P_1''E$, weil die Tangente $P_1''K$ als Senkrechte zu $N_1J_1''$ konstruirt wurde (505).

*Der Krümmungskreis des Schlagschattens von $s$* auf die Ebene des Parallelkreises in seinem Scheitel $P_1$ ergab sich schon früher (171) als dieser *Parallelkreis* selbst, und als Krümmungshalbmesser

die $P_1''E$. Es folgt dies auch aus dem Satze von Meusnier. Denn schneidet man den umschriebenen Lichtstrahlenkegel, welcher $s$ aus $L$ projicirt, mit Ebenen, welche durch die Tangente des Parallelkreises von $P_1$ in $P_1$ gehen, so liegen alle Krümmungsmittelpunkte der Schnittkurven in $P_1$ auf einem Kreise, dessen Ebene senkrecht auf jener Tangente steht, also die Hauptmeridianebene $La$ ist, und welcher die Fläche in $P_1$ berührt. Da einer dieser Krümmungsmittelpunkte $K$ bekannt ist, so ist der Kreis bestimmt und hat $P_1N_1$ zum Durchmesser, weil $P_1''KN_1 = 90^0$. Dieser Kreis schneidet aber die $P_1'E$ in $E$, weil auch $P_1''EN_1 = 90^0$, also ist $E$ der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Wegen der Ähnlichkeit der Figuren ist daher auch der *Schatten jenes Parallelkreises* auf $\mathbf{P}_1$ mit dem Mittelpunkte $E_1'$ der *Krümmungskreis* der Schlagschattengrenze $s_1$ in dem Schattenpunkte $P_3'$ von $P_1$.

**508.** Tritt *Parallelbeleuchtung* ein, so daß $L$ ins Unendliche rückt, so geht die Tangente der $s''$ in $P''$ durch den Mittelpunkt $M$ jener sich anschmiegenden Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}^2$, weil dies für die Polare des unendlich fernen $L''$ im Bezug auf den Hauptmeridian $m$ der $\mathbf{F}^2$ gilt. Ebenso ist dann $P_1''M_1$ die Tangente in $P_1''$. Die Punkte, wie $P_2''$, des größten und kleinsten Parallelkreises fallen in die Mitte $A''$, und die Tangente ($\parallel A''J_2'$) fällt in $A''J_2'$. $A''$ wird Symmetrie- oder Mittelpunkt für jeden Kurvenast; und die Konstruktion beider Äste ergibt, daß dieselben in doppelter Weise gegenseitig schief symmetrisch sind, nämlich in Bezug auf $CC_1$ und in Bezug auf die durch $A''$ gelegte Senkrechte zu $A''L''$ ($= l''$), wobei eine dieser Linien die Axe ist, die andere die Richtung der Symmetrielinien angibt.

**509.** *Aufg. An die Berührungskurve einer windschiefen Fläche mit einem umschriebenen Kegel (oder Cylinder) eine Tangente zu ziehen.*

*Aufl.* Bei einer windschiefen Fläche $\mathbf{F}$ bildet in jedem Punkte $P$ die Erzeugende $e$ dieses Punktes die eine Haupttangente, und die Erzeugende der zweiten Schaar des sich der $\mathbf{F}$ entlang der $e$ anschmiegenden Hyperboloides die zweite Haupttangente (490). Diese beiden Haupttangenten sind die Asymptoten der Indikatrix und trennen daher die durch $P$ gehende Erzeugende des umschriebenen Kegels und die Tangente der Berührungskurve in $P$ harmonisch (503), so daß, wenn drei von diesen Linien gegeben sind, die vierte bestimmt ist.

**510.** *Aufg. Die beiden Haupttangenten in einem Punkte einer geschlossenen windschiefen Schraubenfläche zu bestimmen.*

*Aufl.* Die erste Haupttangente ist die durch den Punkt gehende Erzeugende, so daß es sich nur um die zweite handelt. Nun wurde

in Nr. 459, Fig. 186 die Tangente der Eigenschattengrenze bei Parallelbeleuchtung in der Projektion auf die zur Schraubenaxe senkrechte Ebene in dem Doppelpunkte $D$ jener Grenze als $DG$ (oder $DG_1$) bestimmt. Von den vier durch $D$ gehenden harmonischen Linien: dem Lichtstrahle ($\parallel l$), der Tangente $DG$, der Erzeugenden $DM$ und der zweiten Haupttangente sind die drei ersten bekannt; sie schneiden den durch $M$ gezogenen Lichtstrahl $l$ der Reihe nach in seinem unendlich fernen Punkte, in $G$ und in $M$. Der vierte dem $M$ zugeordnete Punkt ist daher $W$, wenn $GW = MG$, und daher $MW = 2r_0$, gleich dem doppelten Parameter der Archimedischen Spirale der Fläche ist. Daher ist $DW$ die zweite Haupttangente der Fläche in $D$. Würde man dem Lichtstrahle, ohne seine erste Projektion $l$ zu ändern, eine andere erste Grundneigung $\lambda$ geben, so würde (da $MD$ der Fig. 186 $= M''L''$ der Fig. 185) der Punkt $D$ sich auf $MD$ verschieben, ohne daß $G$ ($MG$ Fig. 186 $= M''E''$ der Fig. 185) und $W$ ihren Ort änderten; und würde man $l$ senkrecht zu einer beliebigen Erzeugenden annehmen, so würde man auch für sie dasselbe Ergebnis erhalten. Daher läßt sich allgemein aussprechen: *In der Projektion einer geschlossenen windschiefen Schraubenfläche* **F** *auf eine zu ihrer Axe senkrechte Ebene, bei welcher der Punkt M die Projektion der Schraubenaxe bildet, ist in einem beliebigen Punkte D der* **F** *die eine Haupttangente die Erzeugende DM der* **F**, *die andere schneidet auf der durch M gezogenen Senkrechten zu MD im Sinne der Erweiterung des durch D gehenden Zweiges der Archimedischen Spirale der* **F** *den doppelten Parameter dieser Spirale ab**).

**511.** *Aufg. Von der bei Centralbeleuchtung entstehenden Eigenschattengrenze einer geschlossenen windschiefen Schraubenfläche einzelne Punkte und Tangenten zu bestimmen.*

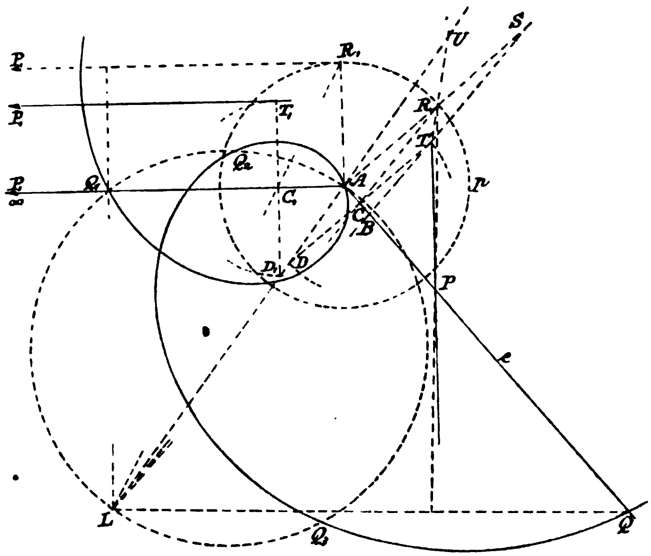
*Aufl.* Nehmen wir die durch den leuchtenden Punkt $L$ senkrecht zur Schraubenaxe $a$ gelegte Ebene **P** als Projektionsebene an, sei $A$ die Spur der Axe, sei die Archimedische Spirale $AQ$ die Spur der Fläche und der aus $A$ mit dem Parameter $AR$ beschriebene Kreis der Parameterkreis $p$. Eine beliebig durch $A$ gelegte Gerade $e$ stellt unendlich viele Erzeugende vor, deren Spuren gegen **P** in den Schnittpunkten der $e$ mit der Spirale liegen; sei $Q$ einer derselben, so ist $LQ$ die Spur der durch $L$ und durch die Erzeugende $AQ$ gelegten Ebene, deren Berührungspunkt $P$ mit der Fläche gefunden wird, wenn man den zu $e$ senkrechten Halbmesser $AR$ des $p$ in dem Sinne Fig. 204.

---

*) Diese Entwickelung findet sich in *De la Gournerie,* tr. de géom. descr., B. 3, 1864, S. 148.

der Erweiterung des durch $Q$ gehenden Zweiges der Spirale zieht, aus $R$ eine Senkrechte auf $LQ$ fällt, und sie mit $e$ in $P$ schneidet (453). $P$ ist dann ein Punkt der Schattengrenze; und alle Punkte

Fig. 204.



der $e$ liegen auf einem Büschel $R$ von Strahlen, die bezw. senkrecht auf den Strahlen des Büschels stehen, welches aus $L$ die Punkte $Q$ der $e$ projicirt.

**512.** Verlängert man nun $AR$ über $R$ hinaus um sich selbst bis $S$, so daß $RS = AR$, so sind (510) $PA$ und $PS$ die beiden Haupttangenten der Fläche in $P$, und der Lichtstrahl $PL$ und die *Tangente* $PT$ *der Schattengrenze* werden durch sie harmonisch getrennt. Daher bestimmen diese vier Strahlen auf der Geraden $LS$ vier harmonische Punkte $B, S, L, T$, von denen $T$ dem $L$ zugeordnet ist und gesucht werden muß. Schneidet man $LR$ mit $e$ in $C$, zieht $CD$ parallel mit $AR$ bis $D$ auf $LA$ und verlängert $DC$ über $C$ hinaus um sich selbst bis $T$, so daß $CT = DC$, so ist $T$ der gesuchte Punkt. Denn $T$ liegt auf $LS$, weil $AR = RS$ und $DC = CT$; und $T$ ist der gesuchte vierte harmonische Punkt auf $LS$, weil $LBTS$ die Projektion der vier harmonischen Punkte $D, C, T, \infty$ aus $A$ bildet.

Da der Punkt $T$ unabhängig von der Lage von $Q$ und von $P$ auf $e$, so *gehen die Tangenten aller Kurvenpunkte* $P$ *der* $e$ *durch* $T$.

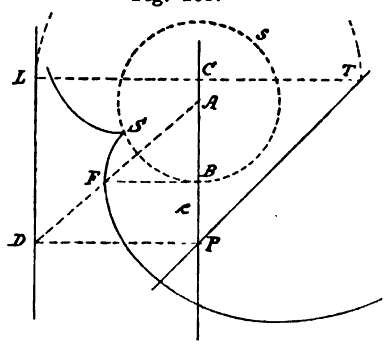
Auf jeder Erzeugenden, die sich in $AL$ projicirt, ergibt sich der Kurvenpunkt $A$ mit der Tangente $AL$; auf jedem Gange der Fläche schneidet daher die Schattengrenze zweimal die Axe.

Man erhält *unendlich ferne Punkte der Schattengrenze*, wenn $RP$ ($\perp LQ$) $\parallel AQ$, wenn also $LQA = 90^0$. Solche Punkte $Q$ der Spirale sind ihre Schnittpunkte mit dem über $AL$ als Durchmesser beschriebenen Kreise. In der Figur haben sich außer dem Punkte $A$, welcher keine unendlich fernen Punkte liefert, deren drei ergeben: $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$. Für die auf den Erzeugenden $AQ_1$, $AQ_2$, $AQ_3$ liegenden unendlich fernen Punkte, wie für $P_1$, erhält man die *Asymptoten* nach der allgemeinen Konstruktionsweise, so $P_1 T_1$.

**513.** Bei *Parallelbeleuchtung* vereinfacht sich das Verfahren wesentlich. Es rückt dann $L$ ins Unendliche, $LA$, $LR$, $LQ$ werden unter einander parallel, $RP$ wird senkrecht zu diesen Linien, so daß man auf einem Strahle $AQ$ außer in $A$ nur noch einen Punkt $P$ erhält; ferner wird $CT = RS = AR$, daher $TR \# CA$, und wenn man $TR$ mit $LA$ in $U$ schneidet, auch $RU = TR$. Daher findet man $T$, wenn man $RU \parallel PCA$, d. h. als Tangente an $p$ legt, $RU$ mit $LA$ in $U$ schneidet und auf $UR$ die $RT = UR$ weiter trägt. Es stimmt dies mit der in Nr. 459 Fig. 186 gefundenen Konstruktion $N_2T = HN_2$ überein.

**514.** Ist die geschlossene Schraubenfläche die senkrechte oder die *Wendelfläche*, so sind die bisherigen Konstruktionen unbrauchbar, weil der Parameter unendlich wird. Legt man wieder die Pro- Fig. 205.
jektionsebene **P** durch den leuchtenden Punkt $L$ senkrecht zur Schraubenaxe $a$, deren Spur $A$ bilde, und sei $s$ ein aus $A$ mit beliebigem (passendem) Halbmesser beschriebener Kreis, so ist derselbe die Projektion einer Schraubenlinie der Fläche, deren Spur $S$ sein möge. Man findet nun die Berührungsebene in einem in $P$ projicirten Punkte der Fläche, wenn man die $AP$ mit $s$ in $B$ schneidet, die Tangente $BF$ der $s$ zieht und auf ihr den Bogen $BS$ in seinem Sinne von $B$ aus nach $BF$ aufträgt; dann ist $F$ die Spur der Tangente $BF$ der in $s$ projicirten Schraubenlinie. Die koaxiale durch $P$ gehende Schraubenlinie hat ihre (nicht verzeichnete) Spur $S'$ auf der Geraden $AS$, daher die Spur ihrer Tangente $PD$ ($\perp AP$) in $D$, wenn $PD =$ Bog. $PS'$, woraus folgt, daß $D$ auf $AF$ liegt. Die Parallele $DL$ zu $AP$ ist dann die Spur der Berührungsebene der Fläche in $P$.

Fig. 205.




Soll umgekehrt der Berührungspunkt einer durch eine Erzeugende

$AB = e$ und durch $L$ gelegten Ebene auf $e$ gefunden werden, so beachtet man, daß ihre Spur $LD \parallel e$ ist. Man schneidet $e$ mit $s$ in $B$, macht die Tangente $BF$ gleich und gleichgerichtet mit Bog. $BS$, zieht $AF$ bis $D$ auf $LD$, fällt $DP \perp e$, so ist der Fußpunkt $P$ der Berührungspunkt. Weil Bog. $BS$ im einen und im entgegengesetzten Sinne genommen und um eine beliebige ganze Anzahl von Umfängen des Kreises $s$ vermehrt werden kann, so erhält man auf $BF$ unendlich viele Punkte $F$, deren Abstände von einander gleich dem Umfange von $s$ sind. Dieselben stellen die Schnittpunkte der $BF$ und der Evolvente der $s$ vom Ursprunge $S$ dar, welche die Spur der Fläche der Tangenten jener in $s$ projicirten Schraubenlinie bildet. Die Reihe der Punkte $F$ auf $BF$ wird aus $A$ auf $LD$ als die Reihe der Punkte $D$, und diese senkrecht auf $e$ als die Reihe der Punkte $P$ projicirt, welche alle der Eigenschattengrenze auf $e$ angehören. Da der Punkt $D$ sich dem $L$ in unendlich vielen Lagen und in immer kleineren Abständen von beiden Seiten her nähert, ohne ihn je zu erreichen, so nähert sich die Eigenschattengrenze in zweierlei Windungen asymptotenartig dem Punkte $A$.

Um die *Tangente* der Schattengrenze in $P$ zu bestimmen, beachte man, daß in Fig. 204, weil der Parameter $AR = \infty$ wird, $LCR \perp AP$ zu stehen kommt, so daß $CD$ in $CL$ und $D$ in $L$ fällt. Daher fälle man in Fig. 205 $LC \perp AP$, trage auf ihr $CT = LC$ weiter, so gehen durch $T$ die Tangenten in allen Punkten $P$ der $e$.

Jene beiden Windungen erstrecken sich ins Unendliche und hängen durch eine gemeinschaftliche *Asymptote* gleichsam zusammen; diese Asymptote ist $\parallel AS$ und geht durch den zu $L$ in Bezug auf $AS$ symmetrischen Punkt.

## V. Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades.

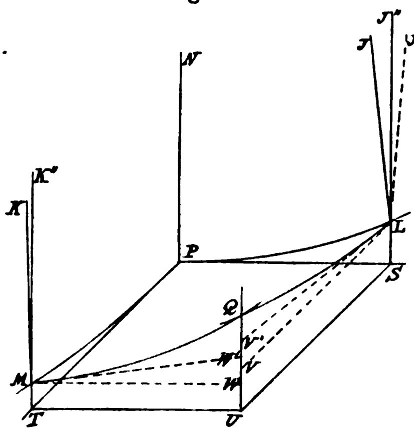
### a) Die Krümmungslinien als Schnittlinien konfokaler Flächen.

**515.** Eine *Krümmungslinie* einer Fläche ist nach Nr. 489 eine solche Linie der Fläche, welche in jedem ihrer Punkte einen der beiden Hauptschnitte dieses Punktes berührt, so daß durch jeden Punkt zwei auf einander senkrechte Krümmungslinien gehen, und welche die Eigenschaft hat, daß zwei Flächennormalen in benachbarten Punkten einer solchen Linie sich schneiden. Zu ihrer Konstruktion bedürfen wir einiger Hilfssätze.

Fig. 206. Zieht man in einem Punkte $P$ einer Fläche die Normale $PN$ und zwei auf einander senkrechte Tangenten $PS$ und $PT$ der Fläche,

trägt auf diesen zwei gleiche unendlich kleine Stücke $PS = PT$ auf, und ergänzt dieselben zu dem Quadrate $PSUT$, legt durch jede Seite desselben eine Ebene parallel zur Normale $PN$, welche daher ein Prisma mit den parallelen Kanten $PN$, $SJ''$, $UQ$, $TK''$ bilden, und schneidet diese Ebenen mit der Fläche in den Kurven $PL$, $LQ$, $QM$, $MP$, so werden die erste und letzte derselben von $PS$ und $PT$ in $P$ berührt. Zieht man durch $L$ die $LV \parallel PT$ und die Tangente $LV'$ der Kurve $LQ$, bezw. bis $V$ und $V'$ auf $UQ$, so ist der Winkel $VLV'$ der unendlich kleine Winkel, welchen die Tangenten der zwei unendlich nahen parallelen ebenen Schnitte $PM$ und $LQ$ der Fläche in den Punkten $P$ und $L$ der Kurve $PL$ bilden; er ist im allgemeinen unendlich klein von der ersten Ordnung $(0^1)$, weil er für eine endliche Länge von $PL$ im allgemeinen endlich wird (I, 232). Ebenso ziehe man $MW \parallel PS$, $MW'$ als Tangente der $MQ$ bezw. bis $W$ und $W'$ auf $UQ$, so ist wieder im allgemeinen $\sphericalangle\, WMW' = 0^1$. Nun ist $UQ = UV + VV' + V'Q = UW + WW' + W'Q$. Da aber $UV = SL$, $UW = TM$ und da ferner $V'Q = TM$, $W'Q = SL$, weil der Unterschied je zweier der letzteren Größen, welche $= 0^1$ sind, $0^2$ ist und daher wegfällt, so folgt aus den beiden Ausdrücken von $UQ$, $VV' = WW'$, oder $VV'$ und $WW'$ sind nach Sinn und Größe einander gleich. Daraus ergibt sich auch $\sphericalangle\, VLV' = \sphericalangle\, WMW' = \delta$.

Fig. 206.




Zieht man nun in der Ebene $USJ''$ die $LJ' \perp LV'$, so ist $J''LJ'$ der unendlich kleine Winkel $(0^1)$ dieser Normalen $LJ'$ der Kurve $LQ$ mit der Ebene $NPSJ''$, und $= \sphericalangle\, VLV' = \delta$. Sodann sei $LJ$ die Flächennormale in $L$; sie ist der Schnitt der Normalebenen der Kurven $LQ$ und $LP$ in $L$, und die erstere dieser Ebenen enthält die Gerade $LJ'$. Der Winkel der $LJ$ mit der Ebene $NPSJ''$ ist $= 0^1$, und von $\sphericalangle\, J''LJ' = \delta$ nur um 0 von einer höheren Ordnung verschieden, also ihm gleich zu setzen. Denn die Ebenen $PSJ''$ und die Normalebene der $LQ$ in $L$ bilden einen Winkel $0^1$ mit einander und in der letzteren Ebene liegen die Linien $LJ$, $LJ'$, welche ebenfalls einen Winkel $0^1$ bilden; dann ist der Unterschied der Winkel dieser Linien mit der ersteren Ebene $(PSJ'')$ im all-

gemeinen $= 0^2$, da er erst für eine endliche Größe von $J'LJ$ ein $0^1$ wird. (Dieser Unterschied ist hier sogar $0^3$, weil $LJ$ senkrecht auf der Schnittlinie beider Ebenen steht.)

Ebenso sei $MK$ die Flächennormale in $M$, und es ist ihr Winkel mit der Ebene $NPTK'' = \sphericalangle WMW'$, also ebenfalls $= \delta$. Da ferner $VV'$ und $WW'$ gleichen Sinn haben, so liegen die auf derselben Seite der Fläche gezogenen Normalen $LJ$ und $MK$ entweder beide außerhalb (wie in der Figur) oder beide innerhalb des (rechten) Flächenwinkels der Halbebenen $NPL$ und $NPM$.

Daraus folgt der *Satz von Bertrand**): *Zieht man auf einer Fläche von einem Punkte P aus zwei auf einander senkrechte gleiche Linienelemente PL und PM, so bilden die in L und M auf derselben Seite der Fläche gezogenen Flächennormalen LJ und MK gleiche Winkel mit den bezw. durch L und M gelegten Normalebenen NPL, NPM der Fläche in P, die Ablenkungs- oder Deviationswinkel, und liegen entweder beide außerhalb oder beide innerhalb des von diesen Halbebenen gebildeten rechten Winkels.* Ist daher der eine dieser Winkel Null, so ist es auch der andere; $PL$ und $PM$ sind dann Elemente der Krümmungslinien, die daher auch nach diesem Satze auf einander senkrecht stehen.

**516.** Hieraus ergibt sich folgender *Satz: Stehen drei Flächen* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ *paarweise auf einander senkrecht sowohl in einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte P, als in den zu P benachbarten Punkten L, M, N der Schnittlinien von je zweien, so ist jede der Linien PL, PM, PN ein Element einer Krümmungslinie einer jeden der beiden Flächen, deren Schnitt sie bildet.*

Zieht man an die drei Schnittlinien der Flächen in $P$ bezw. die Tangenten $PL'$, $PM'$, $PN'$, so stehen diese paarweise auf einander senkrecht und bilden einen Oktanten, dessen Ebenen Berührungsebenen und dessen Kanten Normalen je einer der drei Flächen sind. Seien $PL'$, $PM'$, $PN'$ bezw. die Normalen der $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, so bilden die Ebenen $L'PM'$, $L'PN'$ zwei Normalschnitte $PM''$, $PN''$ der $\mathbf{F}_1$, und auf diese sowie auf die von ihnen berührten Flächenschnitte trage man die gleichen Elemente $PM'' = PN'' = PM = PN$ auf; dann ist $MM'' = 0^2$ und $NN'' = 0^2$. Daher bilden auch die Normalen der $\mathbf{F}_1$ in ihren Punkten $M$ und $M''$ einen Winkel $= 0^2$, ebenso die in $N$ und $N''$. Nun liegen nach der vor. Nr. die Normalen der $\mathbf{F}_1$ in $M''$ und $N''$, wenn man sie auf derselben Seite

*) Journal de Liouville, 1844. — Der gegebene Beweis rührt im wesentlichen von Herrn *de la Gournerie* her (tr. de géom. descr., B. 3, 1864, S. 4), welcher jene Winkel $\delta$ die *Deviation* nannte.

der $F_1$ zieht, beide im Inneren oder beide im Äußeren des Flächenwinkels $PL'$ ($M'$, $N'$) und bilden mit dessen Seiten (gleiche) Winkel, welche im allgemeinen $= 0^1$ sind; daher gilt dasselbe auch von den Normalen der $F_1$ in $M$ und $N$, da diese bezw. mit denen in $M''$ und $N''$ Winkel $= 0^2$ bilden. Hat man nun die Normalen auf derselben Seite von $F_1$ gezogen, wie deren Normale $PL'$, so liegen sie auch beide im Inneren, oder beide im Äußeren des Oktanten $P$ ($L'$, $M'$, $N'$). Das Entsprechende gilt von den Normalen der $F_2$ in $N$ und $L$, und von denen der $F_3$ in $L$ und $M$. Zieht man andererseits in einem der Punkte $L$, $M$, $N$, so in $L$, die Normalen der $F_2$ und der $F_3$, so stehen diese auf einander senkrecht; wenn daher eine derselben im Inneren jenes Oktanten liegt, so liegt die andere im Äußeren. Nennt man nun die Seite des Oktanten (innen oder außen), auf welcher jene Normale der $F_1$ in $M$ liegt, die positive, die andere die negative, so liegt auch die Normale der $F_1$ in $N$ auf der positiven, die Normale der $F_2$ in $N$ und dann auch die in $L$ auf der negativen, die der $F_3$ in $L$ und dann auch die in $M$ auf der positiven, die der $F_1$ in $M$ auf der negativen Seite, und dies widerspricht der ersten Feststellung, wonach die Seite, auf welcher die Normale der $F_1$ in $M$ liegt, die positive genannt wurde. Es können daher, bis auf Abweichungen $= 0^2$, alle jene Normalen auf gar keiner Seite des Oktanten liegen, sie müssen daher mit den Flächen der Oktanten Winkel bilden, die unendlich klein von höherer Ordnung sind; $PL$, $PM$, $PN$ müssen daher Elemente von Krümmungslinien in je zweien der Flächen sein (488 f.), w. z. b. w.

Daraus folgt unmittelbar der *Satz von Dupin**) über *orthogonale Flächen*, worunter man zwei solche versteht, die sich durchweg, d. h. in jedem ihrer gemeinsamen Punkte rechtwinklig schneiden. Er lautet:

*Wenn drei Schaaren von Flächen derart beschaffen sind, daß jede Fläche einer jeden Schaar jede Fläche der beiden anderen Schaaren durchweg rechtwinklig schneidet, so ist jede Schnittkurve eine Krümmungslinie einer jeden der beiden Flächen von verschiedenen Schaaren, denen sie angehört.*

Es kann leicht hieraus gefolgert werden, *daß, wenn zwei Flächen* $F_1$, $F_2$ *sich durchweg unter demselben Winkel schneiden, ihre Schnittlinie* $s$, *wenn sie eine Krümmungslinie der einen Fläche ist, auch eine solche der anderen sein muß.* Denn ist $s$ eine Krümmungslinie der $F_1$, so liegen die Normalen der $F_1$ in zwei benachbarten Punkten der $s$ in einer Ebene, dann liegen auch die Normalen der

*) *Dupin*, Développements de Géométrie (5. mémoire), Paris, 1818.

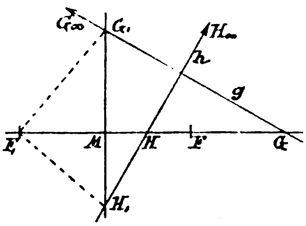
$\mathbf{F}_2$ in denselben Punkten, weil sie gegen die ersteren gleich geneigt sind, in einer Ebene, und dann ist $s$ auch eine Krümmungslinie der $\mathbf{F}_2$. — Auf einer Fläche von gleichförmiger Neigung (359) ist daher jede mit der Grundebene parallele Linie eine Krümmungslinie, weil sie eine Krümmungslinie der Ebene ist, in welcher sie liegt.

**517.** Zur weiteren Erörterung bedürfen wir einiger Sätze über konfokale Kegelschnitte (I, 436 ff.) und konfokale Flächen zweiten Grades. Der nächste Satz folgt schon durch Reciprocität aus I, 397, soll aber der größeren Anschaulichkeit wegen noch unmittelbar bewiesen werden.

*In Bezug auf alle Kurven einer Schaar konfokaler Kegelschnitte ist zu einer Geraden g diejenige (auf ihr senkrechte) Gerade h konjugirt, welche von g durch die beiden Punkte eines jeden der drei Paare gemeinschaftlicher konjugirter Brennpunkte harmonisch getrennt ist.*

Denn in I, 388 wurden auf jeder der drei Axen in erweitertem Sinne, der Hauptaxe, der Nebenaxe und der unendlich fernen Geraden, die (konjugirten) Brennpunkte als die Doppelpunkte der Involution bezeichnet, welche je zwei konjugirte, auf einander senk-
Fig. 207. rechte Gerade auf diesen Axen einschneiden. Sind daher $M$, $F$, $F_1$ der Mittelpunkt und die beiden reellen Brennpunkte der konfokalen Kegelschnitte, und sind von $g$ und $h$ die Schnittpunkte mit der Hauptaxe, der Nebenaxe und der unendlich fernen Geraden $G$, $G_1$, $G_\infty$; $H$, $H_1$, $H_\infty$, so sind $G, H$; $G_1, H_1$; $G_\infty$, $H_\infty$ je ein Punktepaar einer solchen Involution, und die Punkte eines Paares sind durch die (reellen oder imaginären) Doppelpunkte, d. i. durch die Brennpunkte harmonisch getrennt. Ist daher $g(G\,G_1\,G_\infty)$ gegeben, so ermittle man zwei der Punkte $H$, $H_1$, $H_\infty$, und zwar durch $MH.MG = MF^2$; $MH_1.MG_1 = -MF^2$ ($G_1F_1H_1 = G_1FH_1 = 90^0$); $h \perp g$; dann ist $h$ bestimmt.

Fig. 207.



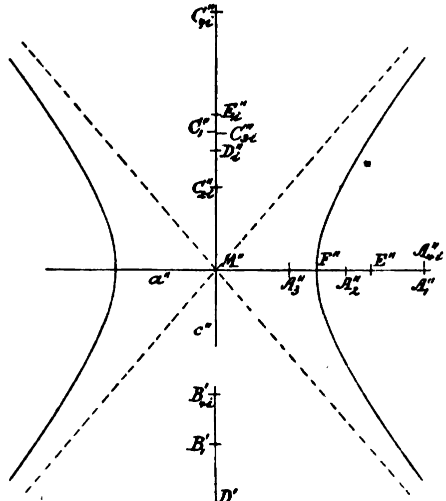

Zugleich ist der *Berührungspunkt* eines der konfokalen Kegelschnitte mit $g$, oder eines anderen mit $h$, der *Schnittpunkt* der $g$ und $h$, weil die zu einer Tangente konjugirte Gerade durch ihren Pol, d. i. ihren Berührungspunkt gehen muß.

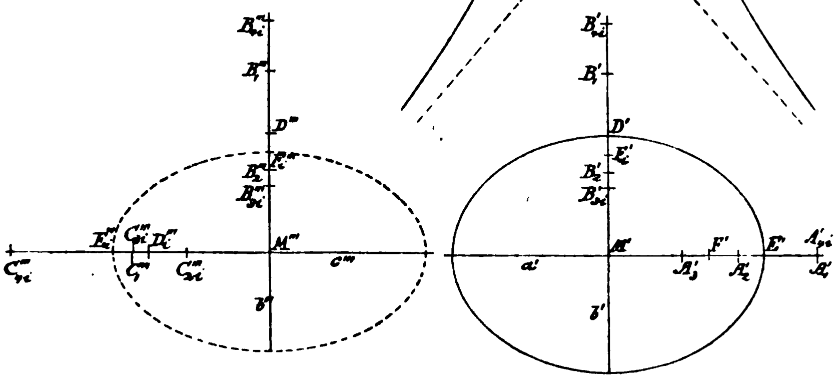
**518.** *Die Brennpunkte der Hauptschnitte und die Fokalkegelschnitte einer Fläche zweiten Grades.*

Fig. 208. Von einer solchen Fläche $\mathbf{F}$ sei $M$ der Mittelpunkt, von dessen Lage im Endlichen wir ausgehen, ferner seien $a$, $b$, $c$ die Halbaxen, welche reell oder imaginär sind, so daß sich $a^2$, $b^2$, $c^2$ als

reelle positive oder negative Größen ergeben, es sei $a^2 > b^2 > c^2$, so ist **F** ein Ellipsoid, wenn $c^2 > 0$, ein einschaliges Hyperboloid, wenn $b^2 > 0 > c^2$, ein zweischaliges Hyperboloid, wenn $a^2 > 0 > b^2$, und die Fläche ist imaginär, wenn $0 > a^2$. In der Figur dienen die Hauptebenen $ab$, $ac$, $bc$ als $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. Von den sechs Brennpunkten des Hauptschnittes $ab$ liegen die zwei reellen, wie $F$, auf $a$, zwei imaginäre, die ideell durch zwei reelle (I, 388), wie $F_i$, dargestellt werden, auf $b$, und es ist $MF = MF_i = f$, und die zwei letzten auf der unendlich fernen Geraden als deren imaginäre Kreispunkte. Von den Brennpunkten des Hauptschnittes $ac$ liegen die zwei reellen, wie $E$, auf $a$, zwei ideelle, wie $E_i$, auf $c$ ($ME = ME_i = e$), und zwei sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Von den Brennpunkten des Hauptschnittes $bc$ liegen die zwei reellen, wie $D$, auf $b$, zwei ideelle, wie $D_i$, auf $c$ ($MD = MD_i = d$), und zwei sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Die Brennpunkte des unendlich fernen Kegelschnittes können wir erst nachher bestimmen.

Fig. 208.




Nun gilt für jedes Vorzeichen von $a^2$, $b^2$, $c^2$:

$$f^2 = a^2 - b^2, \qquad e^2 = a^2 - c^2, \qquad d^2 = b^2 - c^2;$$

daraus folgt
$$f^2 = e^2 - d^2, \tag{1}$$

sowie, wegen $a^2 > b^2 > c^2$, daß $f^2$, $e^2$, $d^2$ positiv, also $f$, $e$, $d$ reell

sind. Indem wir die unendlich ferne Ebene zu den Hauptebenen zählen, sprechen wir den *Satz* aus:

*In jeder der vier Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades* **F** *gibt es einen Kegelschnitt, welcher ein Fokalkegelschnitt der* **F** *heißt, dessen sechs Brennpunkte mit denen des Hauptschnittes seiner Ebene zusammenfallen, und dessen Scheitel in den sechs übrigen in seiner Ebene liegenden Brennpunkten der drei anderen Hauptschnitte liegen.*

Danach ist zunächst in der Ebene $ab$ der Fokalkegelschnitt derjenige, welcher den in $ab$ liegenden Brennpunkt $E$ des Hauptschnittes $bc$ und den $D$ des $bc$ zu Scheiteln, und, da $e^2 - d^2 = f^2$ (Gl. 1), den Punkt $F$ zu einem Brennpunkte hat; dann hat er aber alle sechs Brennpunkte mit dem Hauptschnitte $ab$ gemein. Weil die Scheitel $E$, $D$ reell, ist er eine *Ellipse* und hat $M$ zum eigentlichen Mittelpunkte. — In der Ebene $ac$ ist der Fokalkegelschnitt diejenige *Hyperbel*, welche $M$ zum eigentlichen Mittelpunkte, $F$ und $D_i$ zu Scheiteln bezw. einer reellen und ideellen Axe und daher, wegen Gl. (1), $E$ zu einem Brennpunkte hat. — In der Ebene $bc$ endlich ist der Fokalkegelschnitt derjenige *imaginäre Kegelschnitt* (als *Ellipse* anzusehen), welcher $M$ zum eigentlichen Mittelpunkte, $F_i$ und $E_i$ zu ideellen Scheiteln und, wegen Gl. (1), $D$ zu einem reellen Brennpunkte hat. $D_i$ ist dann ein reeller Brennpunkt derjenigen reellen Ellipse, welche jener imaginären Fokalellipse in Bezug auf $M$ konjugirt ist und ihre ideelle Darstellung (I, 408) bildet (in der Figur gestrichelt).

Der Fokalkegelschnitt der unendlich fernen Ebene soll auf jeder der drei durch $M$ gehenden Hauptebenen die beiden unendlich fernen Brennpunkte, also je zwei unendlich ferne imaginäre Kreispunkte, enthalten. Der durch diese sechs Punkte gehende Kegelschnitt kann als die Schnittlinie der unendlich fernen Ebene mit einer Fläche zweiten Grades betrachtet werden, deren Schnittlinien mit jenen drei durch $M$ gehenden Hauptebenen je zwei solche unendlich ferne imaginäre Kreispunkte enthalten, also Kreise sind. Diese Fläche zweiten Grades muß daher eine Kugel sein, da jede andere solche Fläche nur zwei Stellungen von Kreisschnitten enthält; der unendlich ferne Fokalkegelschnitt ist daher der *unendlich ferne (imaginäre) Kugelkreis.*

Um den obigen Satz ganz zu rechtfertigen, muß man noch nachweisen, daß die drei ersteren Fokalkegelschnitte durch die Brennpunkte des unendlich fernen Hauptschnittes $h$ der Fläche **F** und des unendlich fernen Kugelkreises $u$ gehen; d. h. daß die in der unendlich fernen Ebene **U** durch diese Punkte zu einander senkrecht gezogenen Geraden in Bezug auf $h$ und $u$ zu einander kon-

jugirt sind. Als derartige Gerade müssen wir nach Maßgabe der gewöhnlichen Hauptebenen solche Gerade ansehen, welche aus dem Pole $M$ der U durch Ebenen projicirt werden, welche auf einander senkrecht stehen und zu einander konjugirt sind in Bezug auf jede Fläche zweiten Grades, die durch $h$ bezw. durch $u$ geht und U und $M$ zu Polarebene und Pol hat. Für den Kegelschnitt $h$ wird dies in Nr. 528 nachgewiesen werden. Für den $u$ sind jene Flächen Kugeln vom Mittelpunkte $M$; und es ergibt sich, daß jeder Punkt $P$ der U ein Brennpunkt des $u$ ist, weil jede zwei durch $MP$ gelegte auf einander senkrechte Ebenen in Bezug auf diese Kugeln zu einander konjugirt sind. Daher sind auch die sechs unendlich fernen Punkte der drei anderen Fokalkegelschnitte, von denen aber nur die der Fokalhyperbel reell sind, Brennpunkte des $u$, und es gilt: *Der unendlich ferne Fokalkegelschnitt einer Fläche zweiten Grades* (*der durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis gebildet wird*) *hat die sechs Punkte der drei anderen Fokalkegelschnitte zu Brennpunkten, und von diesen sind zwei reell.*

**519.** *Flächen zweiten Grades heißen konfokal, wenn sie die Brennpunkte ihrer Hauptschnitte gemein haben,* und dies ist schon erfüllt, wenn die Axenlinien und auf ihnen zwei von einander unabhängige Brennpunkte gemeinsam sind. Solcher von einander unabhängiger *reeller* Brennpunkte gibt es viererlei, nämlich $D$, $E$, $F$ und ein unendlich ferner Punkt der Fokalhyperbel. Um uns eine Vorstellung von dem Übergange der Flächen der Schaar in einander zu machen, wollen wir von der Halbaxe $a$ ausgehen, die wir zunächst reell annehmen, so daß es auch $A$ ist. Läßt man $A$ auf $a$ Fig. 208. sich aus dem Unendlichen dem Mittelpunkte $M$ nähern, so geht die Fläche von der unendlich großen Kugel in das Ellipsoid $A_1 B_1 C_1$ über, welches sechs reelle Brennpunkte in seinem Inneren einschließt. Gelangt $A$ nach $E$, so wird $a = e$ und der Hauptschnitt $ab$ zur Fokalellipse $ED$, die Halbaxe $c$ wird Null, und das Ellipsoid wird zur doppelten Fläche dieser Ellipse. Die *Schaar der Ellipsoide* erfüllt den ganzen Raum einfach, d. h. durch jeden Punkt geht ein Ellipsoid.

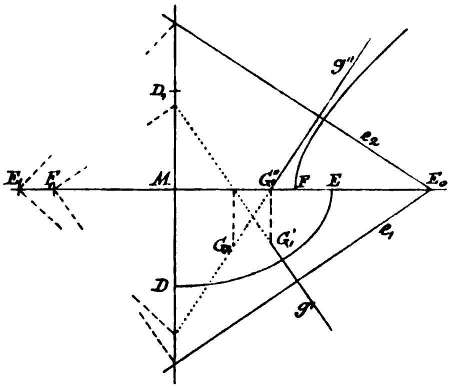
Bewegt sich nun $A$ von $E$ gegen $F$, so bleibt der Hauptschnitt $ab$ eine Ellipse, wie $A_2B_2$, in dessen Äußerem die Brennpunkte $E$, $D$ liegen; die anderen Hauptschnitte werden daher Hyperbeln, die Fläche wird zu einem *einschaligen Hyperboloide*, dessen Anfangsgestalt die doppelte Außenfläche der Fokalellipse $ED$ ist. Gelangt $A$ nach $F$, so wird die Ellipse $ab$ zu einer doppelten Geraden ($2MF$), der Hauptschnitt $ac$ wird zu der Fokalhyperbel, und die Fläche zur doppelten Außenfläche dieser Hyperbel. Die *Schaar der*

*einschaligen Hyperboloide* erfüllt ebenfalls den ganzen Raum einfach. — Bewegt sich dann $A$ von $F$ bis $M$, so wird der Hauptschnitt $ab$ eine Hyperbel mit einem Scheitel $A_3$, derjenige $ac$ ebenfalls eine Hyperbel, die Scheitel auf $b$ und $c$ werden imaginär und der Hauptschnitt $bc$ ein imaginärer Kegelschnitt, die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid. Dasselbe geht, für $A$ in $F$, von der doppelten Innenfläche der Fokalhyperbel $ac$ aus, und schließt, für $A$ in $M$, mit der doppelten unbegrenzten Ebene $bc$. Auch die *Schaar der einschaligen Hyperboloide* erfüllt den ganzen Raum einfach. — Wird endlich $a$ *imaginär*, so werden es auch $b$, $c$ und die Fläche selbst; ideelle zusammengehörige Scheitel sind $A_{4i}$, $B_{4i}$, $C_{4i}$. Das Ellipsoid mit diesen reellen Scheiteln und den reellen Brennpunkten $F_i$, $E_i$, $D_i$ ist die ideelle Darstellung des imaginären Ellipsoides in Bezug auf seinen Mittelpunkt $M$.

Durch jeden Punkt $P$ des Raumes geht daher von der Schaar konfokaler Flächen ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid, und ein reelles Ellipsoid, welches die ideelle Mittelpunktsdarstellung eines konfokalen imaginären ist.

**520.** *In Bezug auf alle Flächen einer Schaar konfokaler Flächen zweiten Grades ist einer Ebene* **E** *ein und dieselbe auf* **E** *senkrechte* Fig. 209. *Gerade g konjugirt.* Denn sei in einer Hauptebene **P** die Gerade $e_1$ die Spur der **E**, sei $g'$ die nach Nr. 517 konstruirte zu $e_1$ in Bezug auf die in **P** liegenden (konfokalen) Hauptschnitte aller Flächen der Schaar konjugirte Gerade, so ist die $\perp$ **P** durch $g'$ gehende Ebene zu $e_1$ in Bezug auf jede Fläche der Schaar konjugirt, weil sie zu ihr die Pole zweier durch $e_1$ gehenden Ebenen, also die Polare der $e_1$ enthält, nämlich den Pol der $\perp$ **P** durch $e_1$ gelegten Ebene, welcher in $g'$ liegt, und den Pol der **P**, welcher der unendlich ferne Punkt jeder zu **P** senkrechten Geraden ist. Das Entsprechende gilt in der zweiten Hauptebene für die Spur $e_2$ und die zu ihr senkrechte und konjugirte $g''$. Daher ist zu der durch $e_1$ und $e_2$ gehenden Ebene **E** die Schnittgerade $g$ jener beiden auf $e_1$ bezw. $e_2$ senkrechten Ebenen in Bezug auf alle Flächen der Schaar konjugirt, und es steht $g$, deren Projektionen $g'$, $g''$ sind, $\perp$ **E**.

Fig. 209.



*Der Schnittpunkt P einer Ebene* **E** *mit seiner in Bezug auf eine Schaar konfokaler Flächen zweiten Grades konjugirten Geraden g ist der Berührungspunkt der* **E** *mit einer Fläche der Schaar.* Denn der Berührungspunkt, als Pol der **E** in Bezug auf die berührte Fläche, muß auf *g* liegen.

**521.** *Zwei konfokale Flächen zweiten Grades, die nicht von derselben Art sind, schneiden sich durchweg rechtwinklig.*

Denn sei in einem beliebigen Punkte *P*, **E** die Berührungsebene und *g* die Normale einer der drei durch *P* gehenden Flächen **F** der Schaar, so ist *g* die, stets einzige, der **E** in Bezug auf **F** konjugirte auf ihr senkrechte Gerade, und daher auch der **E** in Bezug auf alle Flächen der Schaar konjugirt (520). In der Involution der konjugirten Tangenten der **F** in *P* seien *h* und *i* das Rechtwinkelpaar, so ist auch die Ebene *gh* zu der auf ihr senkrechten Geraden *i*, und die *gi* zu der *h* in Bezug auf **F**, und daher auch in Bezug auf alle Flächen der Schaar konjugirt. Demnach sind diese Ebenen auch die Berührungsebenen zweier weiteren durch *P* gehenden Flächen der Schaar. Die Normalen der drei durch *P* gehenden Flächen sind daher die auf einander Senkrechten *g*, *h*, *i*, und die Flächen schneiden sich zu zwei rechtwinklig.

*Zus.* *g*, *h*, *i* sind auch in Bezug auf alle Kegel konjugirt, welche aus *P* je einer der Flächen umschrieben sind (89, Bew.), und daher die gemeinschaftlichen Axen derselben. Diese drei Linien können konstruirt werden als die drei Axen des aus *P* einer der Flächen, am einfachsten einem der Fokalkegelschnitte, umschriebenen Kegels (23).

**522.** *Die Schnittlinien einer Fläche zweiten Grades mit den zu ihr konfokalen Flächen zweiten Grades anderer Art bilden sämmtliche Krümmungslinien der ersteren Fläche.*

Denn die konfokalen Flächen schneiden sich rechtwinklig (521), ihre Schnittlinien sind daher Krümmungslinien der gegebenen Fläche (516), und zwar sämmtliche, weil die zwei durch jeden Punkt der Fläche gehenden andersartigen Flächen (519) die zwei durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien (489) liefern.

Diese *Krümmungslinien sind daher von der vierten Ordnung*, und da die sich schneidenden konfokalen Flächen das Polartetraeder der vier Hauptebenen gemein haben, so werden aus dessen Eckpunkten, d. i. dem Mittelpunkte und dem unendlich fernen Punkte jeder der drei Axen die Krümmungslinien durch Kegel zweiten Grades (doppelt) projicirt; *daher sind die ebenen Projektionen der Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades aus dem Mittelpunkte oder dem unendlich*

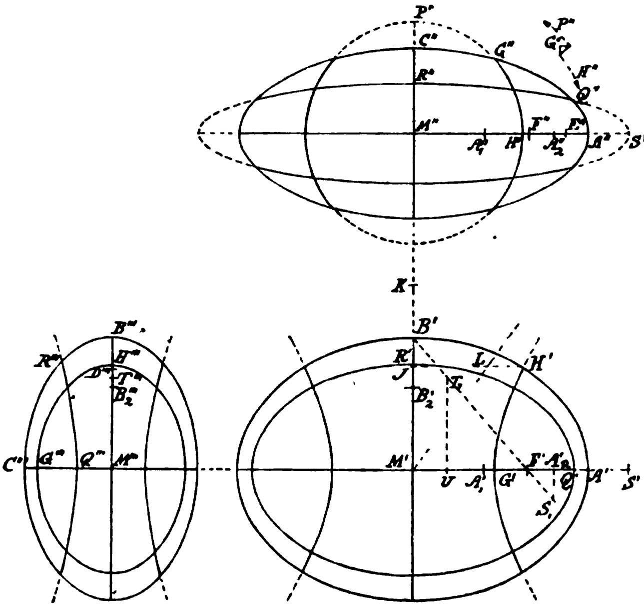
*fernen Punkte einer Axe der Fläche Kegelschnitte. Die Hauptschnitte selbst sind offenbar Krümmungslinien.*

**523.** *Aufg. Die Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades durch ihre Projektionen auf die drei Hauptebenen darzustellen*).*

*Aufl.* Werden nur einzelne Krümmungslinien verlangt, so ist zweckmäßig ein

Fig. 210. *Erstes Verfahren,* welches zunächst an einem *Ellipsoide* ausgeführt werden soll. Dieses habe den Mittelpunkt $M$, die Halbaxen $a, b, c$ mit den Scheiteln $A, B, C$; in den Hauptschnitten $bc, ca, ab$ die

Fig. 210.



reellen Brennpunkte $D, E, F$, und es sei auf die drei Hauptebenen $ab, ac, bc$ projicirt. Soll durch den willkürlichen Punkt $G$ des Hauptschnittes $ac$, der selbst eine Krümmungslinie ist, die zweite Krümmungslinie gelegt werden, so bestimmt man den auf $a$ liegenden Scheitel $A_1$ der konfokalen durch $G$ gehenden Fläche, indem man den Abstand $E''G''$ von $A''$ gegen $E''$ hin nach $A''A_1''$ aufträgt (I, 435); dabei finde zunächst statt, daß $A''A_1'' > A''F''$ sei, wodurch die konfokale Fläche ein zweischaliges Hyperboloid wird (519). Die Hauptschnitte beider Flächen in der Ebene $ab$ treffen sich dann in vier in Bezug auf $a$ und $b$ symmetrischen Punkten,

*) Zuerst von *Monge* auf analytischem Wege gelöst in seiner Application de l'Analyse à la Géométrie, XV et XVI, 1795.

deren einer auf der Ellipse $A'B'$ der $H'$ ist, wenn $F'H' = A'A_1'$, die Hauptschnitte in der Ebene $ac$ treffen sich in vier Punkten, wie $G''$, die Hauptschnitte in $bc$ in vier imaginären Punkten. Durch die reellen Punkte $G$ und $H$ sind von der Schnittkurve beider Flächen die kegelschnittförmigen Projektionen auf die Hauptebenen bestimmt, und zwar von der ersten zwei Scheitel, wie $G'$, und vier Punkte, wie $H'$; von der zweiten zwei Scheitel, wie $H''$, und vier Punkte, wie $G''$; von der dritten die vier Scheitel, wie $G'''$, $H'''$.

Die *erste Projektion* der Krümmungslinie ist eine Hyperbel $G'H'$, deren eine Asymptote $M'L$ man findet, wenn man $H'J \perp M'B'$ fällt, auf $M'B'$ die $JK = M'G'$ macht, und auf $JH'$ den Punkt $L$ durch $KL = JH'$ bestimmt (I, 371). Damit läßt sich die Hyperbel leicht verzeichnen. Die *zweite Projektion* ist eine Ellipse, und man findet aus den zwei Scheiteln der einen Axe, wie $H''$, und einem Punkte $G''$, einen Scheitel $P$ der anderen Axe, durch Affinität mit dem aus $M''$ durch $H''$ gezogenen Kreise, oder (wie in einer Nebenfigur angedeutet werden mußte, weil die Ellipse $H''P''$ sich kaum von einem Kreise unterscheidet) unter Anschluß an die Konstruktion der Ellipse mittelst der über den Axen als Durchmesser beschriebenen Kreise (I, 372). Die *dritte Projektion* ist eine Ellipse und durch ihre vier Scheitel, wie $G'''$, $H'''$, gegeben.

**524.** Soll die Krümmungslinie durch den Punkt $Q$ des Hauptschnittes $ac$ gelegt werden, für welchen $E''Q'' = A''A_2'' < A''F''$ ist, so liegt der Scheitel $A_2$ der konfokalen Fläche zwischen $E$ und $F$, und diese Fläche ist ein einschaliges Hyperboloid, dessen anderer reeller Scheitel $B_2$ durch $F'B_2' = M'A_2'$ bestimmt wird. Die Hauptschnitte beider Flächen treffen sich nun: in $ab$ (die Ellipsen) in imaginären Punkten, in $ac$ in vier reellen Punkten wie $Q$, in $bc$ in vier reellen Punkten wie $R$, bestimmt durch $D'''R''' = B'''B_2'''$. Es können dann, wie vorhin, die drei Projektionen der Schnittlinien verzeichnet werden: in $ab$ eine Ellipse aus den vier Scheiteln wie $Q'$, $R'$; in $ac$ eine Ellipse aus zwei Scheiteln, wie $R''$, und vier Punkten, wie $Q''$; in $bc$ eine Hyperbel aus zwei Scheiteln, wie $Q'''$, und vier Punkten, wie $R'''$.

**525.** Man kann aber auch die fehlenden reellen und ideellen Scheitel der verlangten Kegelschnitte in den beiden vorhergehenden Nummern unmittelbar aus den imaginären Schnittpunkten konfokaler gleichartiger Kegelschnitte bestimmen. Sind von zwei konfokalen Kegelschnitten die Haupt- und Nebenaxen bezw. $a$, $a_1$; $b$, $b_1$, so sind ihre Gleichungen, bezogen auf die Haupt- als $x$Axe, und die Neben- als $y$Axe,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{1}$$

und wenn ihre gemeinschaftliche Excentricit $f$ ist, gilt

$$f^2 = a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2. \tag{2}$$

Eine Kurve ist eine Ellipse, eine Hyperbel oder ein imaginärer Kegelschnitt (Ellipse), je nachdem bezw. $a^2 > 0$, $b^2 > 0$; $a^2 > 0$, $b^2 < 0$; $a^2 < 0$, $b^2 < 0$. Eliminirt man aus den Gleichungen (1) $y$, setzt in der entstehenden Gleichung die Werte von $b^2$ und $b_1^2$ aus (2) ein, und verfährt entsprechend mit $x$, $a^2$, $a_1^2$, so erhält man, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird, die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kegelschnitte

$$x = \pm \frac{a a_1}{f}, \quad y = \pm i \frac{b b_1}{f} = \pm i y'. \tag{3}$$

Sind $a, a_1, b, b_1$ reell, so ist $x$ die reelle Abscisse, $y$ die imaginäre, $y'$ die ideelle Ordinate eines Schnittpunktes.

Wir erhalten nun die Koordinaten der Schnittpunkte der Ellipsen $AB$ und $A_2B_2$ der vorigen Nr., wenn wir $a = M'A'$, $b = M'B'$, $a_1 = M'A_2'$, $b_1 = M'B_2'$ setzen. Ziehen wir dann die $B'F'$, schneiden sie mit der zu $a$ Senkrechten $A_2'S_1$ in $S_1$, so ist offenbar nach der ersten der Formeln (3) $x = B'S_1$, was wir auf $a$ nach $M'S'$ tragen. $S''$ ist dann ein Scheitel der Ellipse $R''Q''S''$. Tragen wir andererseits auf $a$ die $F'U = M'B_2' = b_1$ auf, ziehen $UT_1 \perp a$ bis $T_1$ auf $B'F'$, so ist nach der zweiten der Formeln (3) $y' = UT_1 = M'''T'''$ die ideelle Halbaxe der Hyperbel $Q'''R'''$.

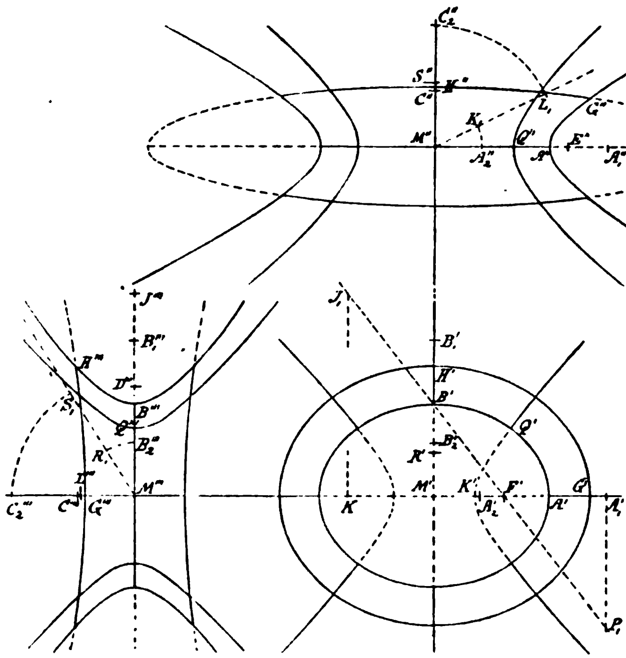
Man hätte die aus dem unendlich fernen Punkte der $x$ oder der $y$ gezogenen gemeinschaftlichen reellen oder ideellen Sehnen der Kegelschnitte $ab$, $a_1b_1$ auch nach I, 410 mittelst konjugirter Kegelschnitte, oder nach I, 411 als Strahlen konstruiren können, die durch die Punkte jedes von zwei Paaren in Bezug auf beide Kegelschnitte konjugirter Punkte harmonisch getrennt sind; aber das gegegebene Verfahren dürfte das einfachere sein.

**526.** *Bestimmung der Krümmungslinien auf dem einschaligen Hyperboloide nach dem ersten Verfahren.* Es mögen die Bezeichnungen von Nr. 523 gelten, wobei $A$, $B$ reelle, und $C$ ein ideeller Scheitel sind. Durch den willkürlichen Punkt $G$ des Hauptschnittes $ac$ legt man die zweite Krümmungslinie als Schnitt mit der durch $G$ gehenden konfokalen Fläche, deren Scheitel $A_1$ und $B_1$ durch $A''E''A_1'' = E''G''$, und durch $F'B_1' = M'A_1'$ bestimmt sind, und welche ein Ellipsoid ist. Die Hauptschnitte $bc$ beider Flächen treffen sich in vier Punkten, wie $H'''$, wobei $D'''H''' = B'''B_1'''$. Von der Schnittkurve wird gezeichnet die erste Projektion als Ellipse aus

Fig. 211.

den vier Scheiteln, wie $G'$, $H'$, die zweite als Ellipse aus zwei Scheiteln, wie $H''$, und vier Punkten wie $G''$, die dritte als Hyperbel aus zwei Scheiteln, wie $G'''$, und vier Punkten wie $H'''$ nach dem

Fig. 211.



Verfahren der Nr. 523. Man findet auch einen Scheitel $P''$ der Ellipse $H''G''$ nach der ersten der Formeln (3) der Nr. 525, wenn man $B'F'$ mit der zu $a$ Senkrechten $A_1'P_1$ in $P_1$ schneidet und $M''P'' = B'P_1$ macht; und ebenso den ideellen Scheitel $J'''$ der Hyperbel $G'''H'''$ nach der zweiten jener Formeln, wenn man auf $a$ $F'K = M'B_1'$ aufträgt, $KJ_1 \perp a$ bis $J_1$ auf $F'B'$ zieht und $M'''J''' = KJ_1$ macht.

**527.** Durch den willkürlichen Punkt $Q$ des Hauptschnittes $ab$ legt man die zweite Krümmungslinie als Schnitt mit der durch $Q$ gehenden konfokalen Fläche, deren Scheitel $A_2$ durch $A'F'A_2' = F'Q'$ bestimmt wird, und welche ein zweischaliges Hyperboloid ist. Seine ideellen Scheitel $B_2$, $C_2$ erhält man durch $A_2'B_2' = M'F'$ und $A_2''C_2'' = M''E''$ oder aus $(M'''C_2''')^2 = (M'''B_2''')^2 + (M'''D''')^2$. Denn der dritte Hauptschnitt des zweischaligen Hyperboloids ist imaginär und hat zu Halbaxen $b_2 = i\,.\,M'''B_2'''$, $c_2 = i\,.\,M'''C_2'''$ und zur Excentricität $d = M'''D'''$, so daß die obige Gleichung aus $d^2 = b^2 - c^2$ folgt (518).

Die Schnittlinie der beiden konfokalen Flächen, eines ein- und

eines zweischaligen Hyperboloides, hat vier Asymptoten und man könnte diese als Schnittlinien der Asymptotenkegel der Flächen konstruiren; unsere Projektionen der Schnittlinien sind dann Hyperbeln, welche aus ihren Asymptoten und ihren vier reellen Punkten, wie $Q$, verzeichnet werden könnten. Einfacher ist es aber, die noch fehlenden Axen der Projektionen nach Nr. 525 zu bestimmen. Die konfokalen hyperbolischen Hauptschnitte $ac$ mit den Scheiteln $A''$, $A_2''$ haben Schnittpunkte, deren Koordinaten bezw. der $a$Axe der ersten und der $c$Axe der dritten Projektion der Schnittkurve gleich sind und sich nach Formel (3) der Nr. 525 ergeben, wenn man darin $a = M''A''$, $b = i.M''C''$, $a_1 = M''A_2''$, $b_1 = i.M''C_2''$, $f = M''E''$ setzt; man erhält dann

$$x = \frac{M''A''\,.\,M''A_2''}{M''E''}, \qquad y = i\,\frac{i\,.\,M''C''\,.\,i\,.\,M''C_2''}{M''E''},$$

oder $x = M'K'$, wenn man auf einer Asymptote $M''K_1$ der Hyperbel $A''G''$ die $M''K_1 = M''A_2''$ aufträgt, und $K_1K' \parallel M''M'$ zieht; und $y = i\,.\,M'''L'''$, wenn man auf derselben Asymptote $M''K_1$ die $M''L_1 = M''C_2''$ aufträgt und $M'''L'''$ = Abstand $L_1\,.\,M''A''$ macht.

Ebenso erhält man aus den konfokalen Kegelschnitten $bc$, einer Hyperbel mit einem reellen Scheitel $B'''$ und einem ideellen $C'''$, und einer imaginären Ellipse mit den ideellen Scheiteln $B_2'''$, $C_2'''$, die Koordinaten ihrer Schnittpunkte aus denselben Formeln, wenn man $a = M'''B'''$, $b = i.M'''C'''$, $a_1 = i.M'''B_2'''$, $b_1 = i.M'''C_2'''$, $f = M'''D'''$ setzt, woraus folgt,

$$x = \frac{M'''B'''\,.\,i\,.\,M'''B_2'''}{M'''D'''}, \qquad y = i\,\frac{i\,.\,M'''C'''\,.\,i\,.\,M'''C_2'''}{M'''D'''}.$$

Dann ist die $b$Axe der ersten Projektion der Schnittkurve beider Flächen $= x = i\,.\,M'R'$, wenn man auf einer Asymptote $M'''R_1$ der $B'''H'''$ die $M'''R_1 = M'''B_2'''$ aufträgt und $R_1R' \parallel M'''M'$ zieht; und die $c$Axe der zweiten Projektion der Schnittkurve $= y = i.M''S''$, wenn man auf derselben Asymptote die $M'''S_1 = M'''C_2'''$ aufträgt und $M''S''$ gleich Abstand $S_1\,.\,M'''B'''$ macht. — Nun verzeichnet man von der Schnittkurve die Projektionen als Hyperbeln aus den reellen und ideellen Scheiteln: 1) $K'$, $R'$; 2) $Q''$, $S''$; 3) $Q'''$, $L'''$.

### b) Die Projektionen der Krümmungslinien auf die Hauptebenen als Kurven einer Kegelschnittschaar.

**528.** Soll eine Anzahl von Krümmungslinien verzeichnet werden, so ist es vorteilhaft, eine weitere Eigenschaft ihrer Projektionen auf die Hauptebenen zu benutzen.

*Bei einer Schaar konfokaler Flächen zweiten Grades ist jede Tangente eines zugehörigen Fokalkegelschnittes die Axe eines rechtwinklig-involutorischen Ebenenbüschels, in welchem zwei zugeordnete, d. i. auf einander senkrechte Ebenen in Bezug auf jede Fläche der Schaar zu einander konjugirt sind.*

Denn sei $t$ die Tangente eines Fokalkegelschnittes in einem Punkte $N$ desselben, so ist jede durch $t$ gehende Ebene E eine Berührungsebene derjenigen Fläche der Schaar, welche in den fraglichen Fokalkegelschnitt übergegangen (519) ist; und die $\perp$ E durch $N$ gelegte Gerade $g$ bildet die zugehörige Normale dieser Fläche (520). Daher sind E und $g$ konjugirt in Bezug auf den Fokalkegelschnitt und dann in Bezug auf jede Fläche der Schaar (520), oder die $g$ enthält die Pole der E zu jeder dieser Flächen; daher sind auch die auf einander senkrechten Ebenen E und $tg$ konjugirt in Bezug auf jede Fläche der Schaar, w. z. b. w.

**529.** Während nun durch einen allgemeinen Punkt $P$ des Raumes drei auf einander senkrechte Normalen $g, h, i$ von Flächen der Schaar gehen und die Axen für alle Kegel bilden, welche aus $P$ je einer Fläche der Schaar umschrieben sind (521), gehen durch einen Punkt $N$ eines Fokalkegelschnittes unendlich viele solcher Linien $g, h, i$, nämlich die Tangente $t$ dieses Kegelschnittes und jedes Paar auf einander und auf $t$ senkrechter Geraden $g, h$, und hieraus folgt, daß für einen solchen Punkt $N$ jene Kegel Umdrehungskegel sind mit $t$ als Axe. Daher der Satz:

1) *Bei einer Schaar konfokaler Flächen zweiten Grades sind alle aus einem Punkte $N$ eines Fokalkegelschnittes je einer der Flächen umschriebenen Kegel Umdrehungskegel, deren gemeinschaftliche Umdrehungsaxe die Tangente $t$ des Fokalkegelschnittes in $N$ ist.*

Alle genannten Geraden $g$ und $h$ erfüllen die Normalebene des Fokalkegelschnittes in $N$, und diese Ebene schneidet die Schaar der konfokalen Flächen in einem Systeme von Kegelschnitten. Da nun eine Gerade $g$ in Bezug auf jede Fläche der Schaar zu der auf ihr senkrechten Ebene $ht$ konjugirt ist, d. h. deren Pol enthält, so enthält sie auch den Pol der Geraden $h$ in Bezug auf jeden Kegelschnitt jenes Systems (73, 2)), oder sie ist der $g$ in Bezug auf jeden konjugirt; daher bilden alle jene auf einander senkrechten Geraden $g$ und $h$ eine senkrechte Involution konjugirter Strahlen in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte, oder es gilt (I, 388):

2) *Ein Punkt $N$ eines Fokalkegelschnittes ist ein Brennpunkt aller Kegelschnitte, in welchen die konfokalen Flächen von einer zum Fokalkegelschnitte in $N$ senkrechten Ebene getroffen werden.*

Da ferner die auf $t$ senkrechte Ebene $gh$ in Bezug auf alle

Flächen der Schaar zu $t$ konjugirt ist, so ist der Schnittpunkt $N$ von $t$ und $gh$ der Berührungspunkt der Ebene $gh$ mit einer Fläche der Schaar (520); und da die Geraden $g$, $h$ eine senkrechte Involution konjugirter Tangenten dieser Fläche bilden, so ist die Indikatrix ein Kreis und $N$ ein Nabelpunkt dieser Fläche. Daher gilt:

3) *Die Schnittpunkte einer Fläche zweiten Grades mit einer Fokalkurve derselben sind Nabelpunkte der Fläche.*

Die Fläche hat in jeder der vier allgemeiner genommenen Hauptebenen vier, im Ganzen daher 16 Nabelpunkte, von denen sich aber höchstens vier als reell ergeben werden; bei den windschiefen Flächen keine, weil sie keine elliptischen Punkte besitzen.

**530.** Irgend eine Krümmungslinie $k$ einer Fläche zweiten Grades **F** kann als der Schnitt derselben mit einer zu ihr konfokalen Fläche $\mathbf{F}_1$ angesehen werden. Sei $N$ ein Nabelpunkt der **F**, $t$ die Normale der **F** in $N$, und seien $g$ und $h$ zwei durch $N$ in der Berührungsebene der **F** auf einander senkrecht gelegte Gerade, so ist in Bezug auf **F** die $g$ die Polare der $h$, und in Bezug auf $\mathbf{F}_1$ liegt der Pol $P$ der Ebene $ht$ auf $g$. Daher gehen die Polarebenen des Punktes $P$ der $g$ in Bezug auf **F** und $\mathbf{F}_1$ durch $h$, oder $h$ ist ihre Schnittlinie.

Legt man nun aus dem Mittelpunkte $M$ und aus den unendlich fernen Punkten $X$, $Y$, $Z$ der Axen $a$, $b$, $c$ der **F** durch $k$ die doppelt projicirenden Kegel (zweiten Grades), im besonderen Cylinder, so bilden **F**, $\mathbf{F}_1$ und diese vier Kegel ein Flächenbüschel zweiter Ordnung, und es sind in Bezug auf jede Fläche dieses Büschels $P$ und $h$, und dann auch $g$ und $h$ zu einander konjugirt. Denn legt man durch $P$ eine Ebene, so schneidet diese das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte die vier Schnittpunkte der Ebene mit $k$ sind. Daher gehen die Polaren von $P$ in Bezug auf alle Kurven des Kegelschnittbüschels durch ein und denselben Punkt $P'$ (I, 397), und durch diesen müssen auch die Polarebenen von $P$ in Bezug auf alle Flächen des Flächenbüschels, also auch in Bezug auf **F** und $\mathbf{F}_1$ gehen, oder $P'$ muß auf der Schnittlinie $h$ der letzteren Polarebenen liegen. Eine zweite Hilfsebene zeigt, daß alle diese Polarebenen von $P$ noch durch einen zweiten Punkt von $h$, also durch $h$ selbst gehen, so daß $P$ und $h$, und daher auch $g$ und $h$ in Bezug auf alle Flächen des Büschels konjugirt sind. Daher sind die zwei auf einander senkrechten Strahlen $g$ und $h$ des Büschels $N$ zu einander konjugirt auch in Bezug auf jene vier Kegel $M$, $X$, $Y$, $Z$, und daher bilden die Projektionen eines solchen Strahlenbüschels $N$ aus einem dieser vier Punkte auf irgend eine Ebene eine Involution von Strahlen, welche paarweise konjugirt sind in Bezug auf die

Schnittlinien der von demselben Punkte ausgehenden Kegel mit derselben Ebene, d. i. in Bezug auf die Projektionen aller Krümmungslinien aus demselben Punkte auf dieselbe Ebene.

**531.** Wenden wir die allgemeinere Bezeichnung an, wonach $M$, $X$, $Y$, $Z$ die vier Mittelpunkte $M$ und die vier Ebenen je dreier derselben die Hauptebenen **H** der Fläche **F** heißen, so projiciren sich aus jedem $M$ die vier Nabelpunkte $N$ der **F**, welche in jeder durch $M$ gehenden **H** liegen, (wegen der Symmetrie) paarweise durch zwei Gerade, derart daß aus den drei durch $M$ gehenden **H**, sechs Projektionen $N'$ von Nabelpunkten entstehen, also Punkte gleicher Strahleninvolution für diejenigen Kegelschnitte $k'$, welche die Projektionen der Krümmungslinien $k$ der **F** sind. In der dem $M$ gegenüberliegenden Ebene **H** befinden sich ebenfalls vier Nabelpunkte der **F**, nämlich die Schnittpunkte der **F** mit dem Fokalkegelschnitte dieser **H**. Die Berührungsebenen der **F** in diesen Nabelpunkten gehen aber durch den Pol $M$ der **H**, jene in diesen Berührungsebenen liegenden rechtwinkligen Involutionen projiciren sich daher aus $M$ als vier Gerade $t$, deren jede demnach sich selbst konjugirt, daher eine Tangente eines jeden $k'$ ist. Die sechs Schnittpunkte der vier $t$ unter einander sind dadurch Punkte gleicher Strahleninvolution der $k'$ und fallen mit den vorherbezeichneten $N'$ zusammen, da zwei Kegelschnitte $k'$ nur sechs Punkte gemeinschaftlicher Strahleninvolution besitzen (I, 412). Daraus folgt der

*Satz. Die Projektionen $k'$ der Krümmungslinien $k$ einer Fläche zweiten Grades* **F** *aus einem der vier im verallgemeinerten Sinne verstandenen Mittelpunkte $M$ der* **F** *auf irgend eine Ebene bilden eine Kegelschnittschaar, die demjenigen Vierseit einbeschrieben ist, dessen Seiten die Projektionen der Berührungsebenen der* **F** *in denjenigen vieren ihrer Nabelpunkte sind, welche in der jenem Mittelpunkte $M$ gegenüberstehenden Hauptebene* **H** *der* **F** *liegen, während jeder der sechs Eckpunkte des Vierseits die Projektion von zwei solchen Nabelpunkten der* **F** *ist, welche in den drei durch $M$ gehenden Hauptebenen* **H** *der* **F** *liegen.*

Ist die Projektionsebene parallel mit der Berührungsebene der **F** in einem und dann auch in einem zweiten Nabelpunkte $N$ der **F**, ohne durch den Projektionsmittelpunkt zu gehen, so projicirt sich die rechtwinklige Involution konjugirter Tangenten in jedem $N$ in eine rechtwinklige Involution $N'$ konjugirter Strahlen in Bezug auf die Kegelschnittschaar, oder jeder Punkt $N'$ ist ein gemeinschaftlicher Brennpunkt der $k'$; und die $k'$ sind konfokal, wenn beide $N'$ getrennt sind. Ist **F** ein Ellipsoid oder ein elliptisches Paraboloid, so gibt es daher zwei Stellungen von Ebenen (parallel zu der Berührungsebene der **F** in einem der reellen Nabelpunkte), auf welche sich aus $X$

und $Z$ die $k$ als eine Schaar konfokaler Kegelschnitte projiciren, beim elliptischen Paraboloide aus $Z$ als Parabeln.

**532.** *Aufg. Die Schaar der Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades durch ihre senkrechten Projektionen auf die drei Hauptebenen und etwa noch durch eine Projektion aus dem Mittelpunkte der Fläche darzustellen.*

*Aufl.* Indem diese Projektionen Kegelschnittschaaren sind, können wir zur Verzeichnung derselben das Verfahren der Hilfskegelschnitte (I, 414 ff.) oder das der Netze (I, 425) anwenden. In unserem Falle verdient das erstere den Vorzug, weil es gestattet, von der Schaar beliebige einzelne Kegelschnitte zu verzeichnen, also insbesondere die verschiedenen Projektionen derselben Krümmungslinien anzugeben, und weil es die Scheitel derselben liefert, aus denen die Zeichnung leicht ausgeführt wird. Wenden wir zunächst dieses Verfahren an.

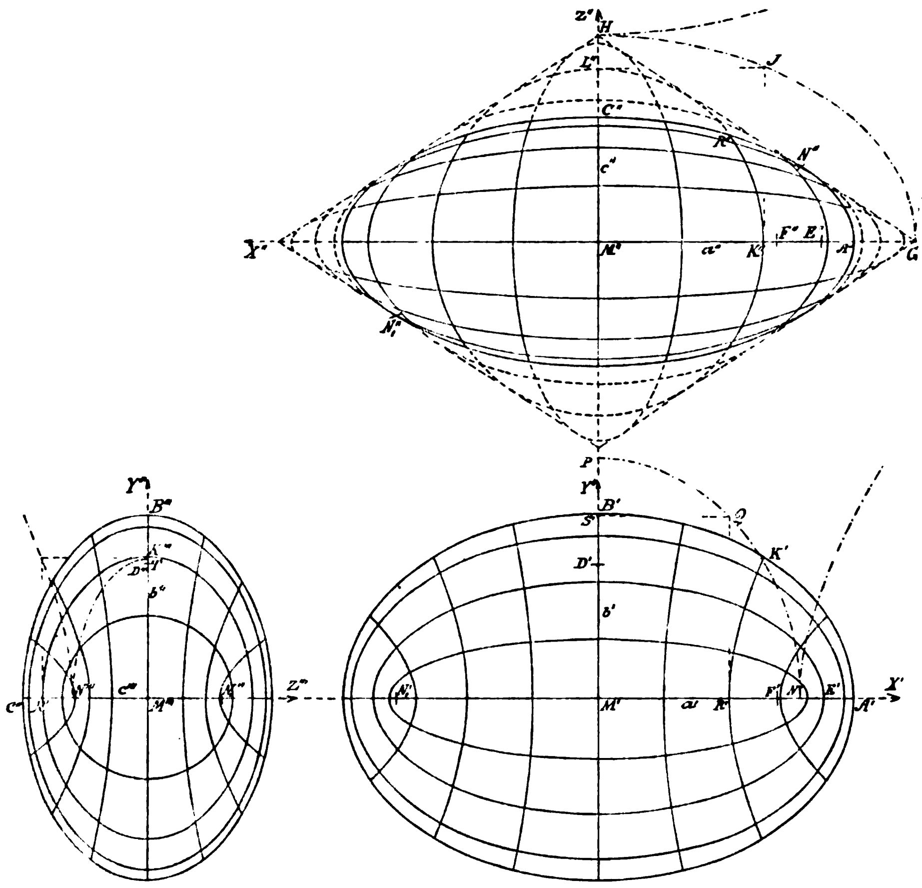
Fig. 212. 1. *Die Krümmungslinien des Ellipsoides.* Es sollen wieder die Bezeichnungen der Nr. 523 ff. gelten, wonach $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$ die Halbaxen, $a > b > c$, $D$, $E$, $F$ Brennpunkte der Ellipsen $BC, CA, AB$ sind. Wir bestimmen zunächst die vier reellen Nabelpunkte der Fläche, wie $N$, $N_1$; sie liegen auf dem Hauptschnitte $ac$ und werden erhalten durch $E''N'' = A''F''$. Die Tangenten in den Nabelpunkten werden parallel zu je einem derjenigen Durchmesser der Ellipse $A''C''$ gezogen, welche $= 2b$ sind, weil sie parallel zu den Kreisschnitten der Fläche laufen. Dadurch können ebenfalls die Punkte, wie $N''$, bestimmt, sonst geprüft werden, und aus ihnen ergeben sich dann ihre Projektionen $N'$, $N_1'$; $N'''$, $N_1'''$.

**533.** Die Kegelschnittschaar der *Projektionen der Krümmungslinien auf die Hauptebene $ac$* ist dem Vierseit der vier (reellen) Tangenten des Hauptschnittes $ac$ in den Nabelpunkten $N$ eingeschrieben. Dieses Vierseit ist ein Rhombus; und sein und der Kurvenschaar zugehöriges Polardreiseit ist aus den Axen $a$, $c$ und der unendlich fernen Geraden gebildet. Sind $G$ und $H$ Eckpunkte des Rhombus auf der $a$ bezw. der $c$, so sind sie auch Scheitel des zu benutzenden Hilfskegelschnittes (I, 418), einer Ellipse, von welcher der Quadrant $GH$ verzeichnet ist. Fällt man von irgend einem Punkte $J$ der Ellipse $GH$ Senkrechte auf $a''$ und auf $c''$, so sind deren Fußpunkte $K''$, $L''$ Scheitel der Projektion einer Kurve der Schaar, hier einer Ellipse, welche dadurch bestimmt ist.

Die beiden anderen Hilfskegelschnitte sind die in der Figur angedeuteten zu der Ellipse in Bezug auf $X$ bezw. $Z$ konjugirten Hyperbeln und können entbehrt werden, weil nur die im endlichen Rhombus eingeschriebenen Kegelschnitte Krümmungslinien des El-

lipsoides darstellen. Die drei Paare von Gegenecken des Vierseits, also zwei Punkte $G$, zwei $H$, zwei unendlich ferne, sind die sechs reellen Projektionen von je zwei konjugirten imaginären Nabelpunkten der Fläche, woraus sich ergibt, daß die zwölf imaginären Nabelpunkte paarweise auf reellen mit der Axe $b$ parallelen Geraden liegen. Es folgt daraus, daß in den Projektionen auf die anderen Hauptebenen die umschriebenen Vierecke nur zwei reelle Eckpunkte besitzen, welche die Projektionen der vier reellen Nabelpunkte $N$ sind.

Fig. 212.



**534.** In der *Projektion auf die Hauptebene ab* sind die Seiten des umschriebenen Vierseits imaginär, und $N'$, $N_1'$ sind die beiden einzigen reellen Mittelpunkte der involutorischen Strahlenbüschel. Es tritt also der Fall von I, 414 ff. ein. Weil diese Büschel die Projektionen rechtwinklig involutorischer Strahlenbüschel in den Nabelpunkten sind, sind den in $N'N_1'$ vereinigten Strahlen die zu ihnen

senkrechten Strahlen konjugirt, und der unendlich ferne Punkt $Y$ ist der Pol der $N'N_1'$ oder der $a$. Sodann müssen wir das Paar derjenigen zugeordneten Strahlen der Involutionen $N'$ suchen, welche durch $N'N_1'$ und den ihm zugeordneten und auf ihm senkrechten Strahl $N'Y$ harmonisch getrennt sind, welche also gleiche Winkel mit diesen beiden bilden. Es sind dies die Projektionen derjenigen konjugirten Tangenten im Nabelpunkte $N$, welche mit der Hauptebene $ac$ Winkel von $45^0$ bilden; und es leuchtet ein, daß die erste Projektion $N'P$ des einen derselben die $b$ Axe in dem Punkte $P$ schneidet, wenn $M'P = N''H$ gemacht wird. Dann ist auch $N_1'P$ ein solcher Strahl aus $N_1'$; und das Vierseit der vier derartigen Strahlen ist offenbar der Rhombus, welcher $N'$, $N_1'$, $P$ zu Ecken hat. Die Punkte $N'$, $N_1'$ sind dann reelle Scheitel eines jeden der beiden Hilfskegelschnitte, während die beiden Punkte, wie $P$, reelle des einen (der Ellipse) und ideelle des andern (der Hyperbel) sind (I, 416).

Fällt man nun von einem Punkte $Q$ der Hilfsellipse Senkrechte auf $a'$ und $b'$, so ist der Fußpunkt $R'$ der ersteren ein reeller, derjenige $S'$ der letzteren ein ideeller Scheitel einer Hyperbel der Schaar; und ebenso liefert jeder Punkt der Hilfshyperbel reelle Scheitel einer Ellipse der Schaar.

Ganz entsprechend verfährt man in der *dritten Projektion*, in der man auf der $b$ Axe $M'''T = N''G$ aufträgt. $N'''$ ist dann ein reeller Scheitel eines jeden der beiden Hilfskegelschnitte, und $T$ ist ein reeller der Ellipse und ein ideeller der Hyperbel.

**535.** Um eine gleichmäßige Verteilung der Krümmungslinien zu erhalten, teile man einen Quadranten $A'B'$ des Hauptschnittes $ab$ in eine Anzahl, etwa vier, nahezu gleicher Teile, projicire die Teilungspunkte, wie $K'$, in die zweite und dritte Hauptebene nach $K''$ bezw. $K'''$, bestimme aus diesen Scheiteln vermittelst der Hilfskegelschnitte die anderen Scheitel der Kegelschnitte der Schaar und verzeichne sie dann. Aus der zweiten Projektion einer Kurve ergibt sich ihr Schnittpunkt $R''$ mit dem Hauptschnitte $A''C''$, aus diesem der Scheitel $R'$ der ersten Projektion, woraus durch die Hilfsellipse der ideelle Scheitel $S'$ und die erste Projektion der Kurve folgen. Die dritte Projektion läßt sich dann aus den reellen Scheiteln $K'''$, $R'''$ verzeichnen.

Außerdem teile man den Quadranten $B'''C'''$ in vier nahezu gleiche Teile und verfahre entsprechend. — Man erhält so im Ganzen außer den Hauptschnitten sechs Krümmungslinien.

**536.** 2. *Die Krümmungslinien des einschaligen Hyperboloides.*

*Aufl.* Da die Fläche keine reellen Nabelpunkte besitzt, so ist

das vorhergehende Verfahren nicht anwendbar. Wir bestimmen nun in jeder der vier Hauptebenen, zu denen wir in erweitertem Sinne die unendlich ferne Ebene rechnen, die vier imaginären Nabelpunkte der Fläche als Schnittpunkte des Hauptschnittes und des Fokalkegelschnittes, welche unter einander konfokal sind, nach Nr. 525, Formel (3). Die Tangenten des Hauptschnittes in diesen vier Punkten bilden dann das (imaginäre) Vierseit, welches der Kegelschnittschaar der Projektionen der Krümmungslinien auf diese Hauptebene umschrieben ist. Andererseits werden aber jene vier Nabelpunkte aus jedem der drei in ihrer Ebene liegenden Mittelpunkte der Fläche auf die diesem Punkte gegenüberliegende Hauptebene projicirt, und da eine solche Projicirende wegen der Symmetrie der Punkte durch zwei derselben geht, werden diese vier Punkte durch je zwei Strahlen, einmal durch reelle, und zweimal durch imaginäre, die aber durch ideelle dargestellt werden sollen, projicirt. Von jedem der vier Mittelpunkte gehen drei solche Geradenpaare aus und bestimmen auf der gegenüberliegenden Hauptebene die drei Paare von Gegenecken des genannten umschriebenen Vierseits, von denen ein Paar reell, die beiden anderen imaginär sind, und ideell dargestellt werden. Dabei soll die unendlich ferne Hauptebene durch ihre Projektion aus $M$ auf eine parallel zur Hauptebene $ab$ durch den ideellen Scheitel $C$ gelegte Ebene $\mathfrak{U}$ dargestellt werden, wobei die Ebenen $ac$, $bc$ sich bezw. in $M^{IV}X^{IV} = a^{IV}$, $M^{IV}Y^{IV} = b^{IV}$ projiciren.

In der *Hauptebene ab* liegt als Hauptschnitt die Ellipse $A'B'$ Fig. 213.
und die nicht verzeichnete Fokalellipse $E'D'$, so daß wir in den Formeln (3) der Nr. 525 zu setzen haben:

$$a = M'A', \quad b = M'B', \quad a_1 = M'E', \quad b_1 = M'D', \quad f = M'F',$$

(wobei $F'D' = M'E'$). Wir erhalten dann aus diesen Formeln, und durch Konstruktionen in der Figur, die sich denen in den Figuren 210 und 211 anschließen, unter Weglassung der doppelten Vorzeichen,

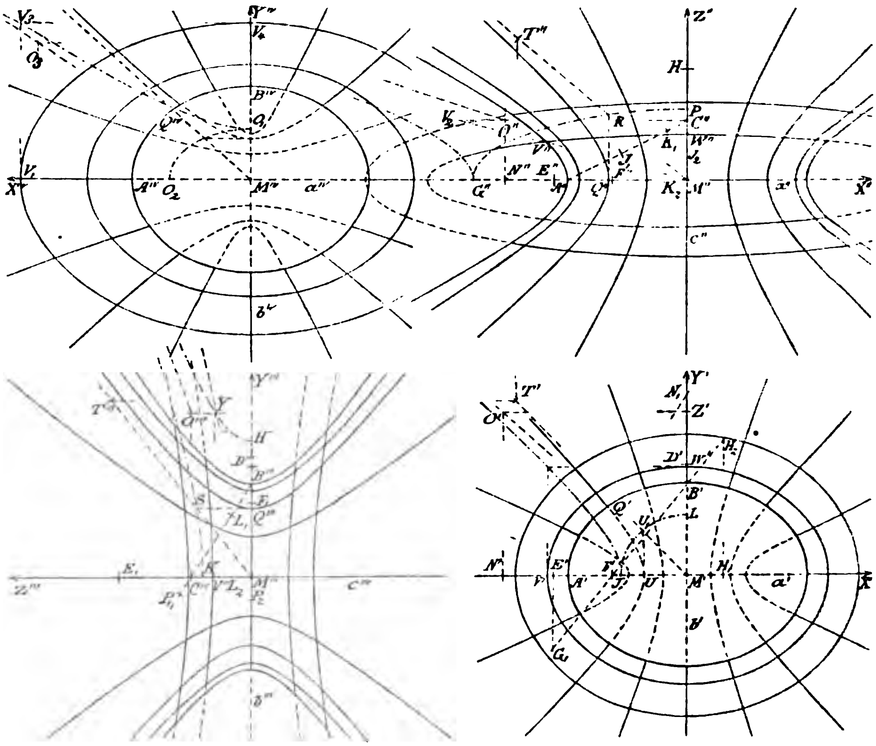
$$x = \frac{aa_1}{f} = B'G_1 = M''G'',$$

$$y = i\frac{bb_1}{f} = i \,.\, H_1H_2 = i \,.\, M'''H,$$

wobei $F'H_1 = M'D'$. Projicirt man die hierdurch bestimmten vier Nabelpunkte der Ebene $ab$ paarweise 1) aus dem unendlich fernen Mittelpunkte $X$ der Fläche auf die Hauptebene $bc$, so erhält man zwei imaginäre Punkte, welche durch zwei ideelle, wie $H$ dargestellt sind; 2) aus $Y$ auf die Ebene $ac$, so erhält man zwei reelle Punkte,

wie $G''$; 3) aus $M$ auf die unendlich ferne Ebene, so geschieht dies durch zwei imaginäre Strahlen, welche mit der $x$Axe die Winkel $\alpha$ bilden, bestimmt durch $\operatorname{tg} \alpha = \pm y : x = \pm i \,.\, M'''H : M''G''$, deren ideelle Darstellungen mit $x$ die reellen Winkel $\alpha'$ bilden, bestimmt durch $\operatorname{tg} \alpha' = \pm M'''H : M''G''$. Ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Ebene werden durch dieselben Strahlen aus $M$ auf die Ebene $\mathbf{U}$ projicirt; und da sie mit dieser parallel sind, geschieht es in unendlich ferne Punkte, deren einer durch den Strahl $M^{IV}O_3$ dargestellt ist, wenn Abst. $O_3a^{IV} = M'''H$ und Abst. $O_3b^{IV} = M''G''$ ist.

Fig. 213.



Die in der *Hauptebene ac* liegenden Nabelpunkte sind die Schnittpunkte der Hyperbel $A''C''$ des Hauptschnittes mit der nicht verzeichneten Fokalhyperbel, von der ein Scheitel $F''$ und ein Brennpunkt $E''$ ist. Man setzt daher in jenen Formeln (525, (3)): $a = M''A''$, $b = i \,.\, M''C''$, $a_1 = M''F'$, $b_1 = i \,.\, M''H$ (wobei $M''H = M'D'$ und $F''H = M''E''$), $f = M''E''$, und erhält

$$x = \frac{a a_1}{f} = J_1 J_2 = M'J,$$

wobei $C''J_1 = M''F''$,

$$y = i\frac{bb_1}{f} = i \,.\, K_1K_2 = i \,.\, M'''K,$$

wobei $A''K_1 = M''H$; und $\operatorname{tg}\alpha = i \,.\, M'''K : M'J$.

Diese so bestimmten vier Nabelpunkte projiciren sich 1) aus $X$ auf die Hauptebene $bc$ in zwei imaginäre Punkte, die durch zwei ideelle, wie $K$, dargestellt sind; 2) aus $Z$ auf $ab$ in zwei reelle Punkte, wie $J$; 3) aus $M$ auf die Ebene $\mathfrak{U}$, welche die unendlich ferne Ebene darstellt, in zwei imaginäre Punkte der $a^{IV}$, welche durch zwei ideelle dargestellt sind, deren einer $O_2$ bestimmt ist und konstruirt wurde durch $M^{IV}O_2 = c\,(M'J : M'''K) = M''C''\,(M'J : M'''K)$.

In der *Hauptebene* $bc$ liegt als Hauptschnitt die Hyperbel mit dem reellen Scheitel $B'''$ und dem ideellen $C'''$, und der imaginäre Fokalkegelschnitt, welcher $D'''$ zu einem reellen Brennpunkte hat, zu ideellen Scheiteln aber auf der $b$ Axe die ideellen Brennpunkte der Ellipse $AB$ auf dieser Axe, deren einer $F_1$ ist, wenn $M'''F_1 = M'F'$, und entsprechend auf der $c$ Axe den Punkt $E_1$, wenn $M'''E_1 = M''E''$. Man setze daher in jenen Formeln (525, (3)) $a = M'''B'''$, $b = i \,.\, M'''C'''$, $a_1 = i \,.\, M'''F_1$, $b_1 = i \,.\, M'''E_1$, $f = M'''D'''$; dann wird

$$x = \frac{aa_1}{f} = i \,.\, L_1L_2 = i \,.\, M'L,$$

wobei $C'''L_1 = M'''F_1$,

$$y = i\frac{bb_1}{f} = i \,.\, P_1P_2 = i \,.\, M''P,$$

wobei $B'''P_1 = M'''E_1$; und $\operatorname{tg}\alpha = M''P : M'L$.

Die so bestimmten vier Nabelpunkte projiciren sich 1) aus $Y$ auf $ac$ in zwei imaginäre Punkte, von deren ideellen Darstellungen $P$ einer ist; 2) aus $Z$ auf $ab$ in zwei imaginäre Punkte, von deren ideellen Darstellungen $L$ einer ist; 3) in die Ebene $\mathfrak{U}$, welche die unendlich ferne Ebene darstellt, in zwei reelle Punkte, wie $O_1$, bestimmt und zu konstruiren durch $M^{IV}O_1 = M''C''\,(M'L : M''P)$.

In der *unendlich fernen Hauptebene* liegt ein Kegelschnitt der Fläche und ein Fokalkegelschnitt, der unendlich ferne Kugelkreis, welche beide konfokal sind. Ihre vier Schnittpunkte bestimmen wir vermittelst der Projektionen der Kurven aus $M$ auf die Ebene $\mathfrak{U}$ durch deren vier Schnittpunkte $O$. Der unendlich ferne Kegelschnitt der Fläche wird durch ihren Asymptotenkegel in eine zu $AB$ kongruente und parallele Ellipse $A^{IV}B^{IV}$ projicirt; von jenem imaginären Kugelkreise ist die Projektion ein mit dieser Ellipse koncentrischer imaginärer Kreis vom Halbmesser $c$; diese beiden Projek-

tionen der unendlich fernen konfokalen Kegelschnitte sind aber nicht konfokal. Man könnte die ideelle Darstellung der vier imaginären Schnittpunkte $O$ beider Projektionen mittelst konjugirter Kegelschnitte konstruiren; einfacher ist aber die Benutzung ihrer Gleichungen. Dieselben sind, wenn $a = M'A'$, $b = M'B'$, $c = i.M''C''$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Aus denselben erhält man

$$x^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}, \qquad y^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2};$$

$$x = i\frac{a \,.\, B'''C'''}{f}, \qquad y = \frac{b \cdot A''C''}{f},$$

wobei $f = M'F'$. Man erhält dann

$$x = i \,.\, M'N' = i \,.\, M'N_1,$$

wenn $A'N_1 \parallel F'D'$, da $M'D' = M'''D''' = B'''C'''$,

$$y = M'Z',$$

wenn $E'Z' \parallel F'B'$, da $M'E' = A''C''$; und $\operatorname{tg} \alpha = i \,.\, M'Z' : M'N'$.

Die vier Nabelpunkte der unendlich fernen Ebene werden also durch die Strahlen aus $M$ in die soeben bestimmten vier Punkte $O$ der Ebene $\mathfrak{U}$ projicirt; und ihre Projektionen aus $X$, $Y$, $Z$ auf die bezw. gegenüberliegenden Hauptebenen sind unendlich ferne Punkte dieser Ebenen, welche durch die Projektionen jener aus $M$ nach ihnen gerichteten Strahlen auf die Hauptebenen bezw. aus $X$, $Y$, $Z$ bestimmt sind. 1) In $ab$ erhält man zwei imaginäre Strahlen, dargestellt durch zwei ideelle, wie $M'O'$, wenn $O'$ durch seine Koordinaten $M'N'$, $M'Z'$ festgelegt ist; 2) in $ac$ liegen die Projektionen der Punkte $O$ auf der $C''O''$ ($\parallel a''$); sie sind imaginär, und ideell dargestellt durch zwei Punkte, wie $O''$, wenn $C''O'' = M'N'$; die imaginären Strahlen sind dann durch zwei ideelle, wie $M''O''$ dargestellt; 3) in $bc$ liegen die Punkte, wie $O'''$, auf $C'''O'''$ ($\parallel b'''$), und die Strahlen, wie $M'''O'''$ sind reell, bestimmt durch $C'''O''' = M'Z'$.

**537.** Die so in jeder der vier Hauptebenen bestimmten sechs Punkte, welche die Projektionen der zwölf nicht in dieser Hauptebene liegenden (imaginären) *Nabelpunkte* der Fläche sind, bilden die Ecken des der Kegelschnittschaar der Projektionen der Krümmungslinien *umschriebenen Vierseits* und die sechs Scheitel eines jeden der drei *Hilfskegelschnitte;* dieselben sollen nun verzeichnet werden.

In der *Ebene* $ab$ sind von den sechs Punkten zwei reell, wie $J$, zwei imaginär, dargestellt durch zwei ideelle, wie $L$, und zwei

imaginär und unendlich fern, dargestellt durch die ideellen Strahlen, wie $M'O'$. Von den drei Hilfskegelschnitten sind nur diejenigen beiden $JL$, $JO'$ gezeichnet, welche durch die reellen Scheitel $J$ gehen; der dritte, $LO'$, welcher die imaginären Kegelschnitte der Schaar bestimmen würde, ist weggelassen, ebenso wie die ideelle Darstellung dieser imaginären Kegelschnitte. Jeder der drei Hilfskegelschnitte hat vier von den sechs Scheiteln zu reellen, zwei zu ideellen Scheiteln. Es besteht die Probe, daß $JL$ und $M'O'$ gleich geneigt gegen $x$ sind, oder $JL \parallel N'Z'$. — In der *Ebene ac* sind von den sechs Punkten zwei reell, wie $G''$, zwei imaginär, dargestellt durch ideelle, wie $P$, zwei imaginär und unendlich fern, dargestellt durch ideelle Strahlen, wie $M''O''$. Es sind nur die zwei Hilfskegelschnitte $G''P$, $G''O''$ gezeichnet und benutzt, und es besteht die Probe $N''C'' \parallel G''P$. — In der *Ebene bc* sind von den sechs Punkten zwei reell und unendlich fern auf Strahlen, wie $M'''O'''$, zwei imaginär, dargestellt durch ideelle, wie $H$, zwei imaginär, dargestellt durch ideelle, wie $K$. Es sind nur die beiden Hilfskegelschnitte $O'''H$, $O'''K$ verzeichnet, und man hat die Probe, $M'''O'''$ und $HK$ gleich geneigt gegen $y$. — In der Projektion der *unendlich fernen Ebene* auf die Ebene $\mathfrak{U}$ sind von den sechs Punkten zwei reell, wie $O_1$, zwei imaginär, dargestellt durch ideelle, wie $O_2$, zwei imaginär und unendlich fern, dargestellt durch ideelle Strahlen, wie $M'''O_3$. Es sind nur die beiden Hilfskegelschnitte $O_1O_2$, $O_1O_3$ verzeichnet, und man hat die Probe, $M^{IV}O_3$ und $O_2O_1$ gleich geneigt gegen $x$.

**538.** Zur Verzeichnung der *reellen Kurven der Kegelschnittschaaren* beachten wir, daß wir nach I, 415 f. diejenigen beiden Hilfskegelschnitte zu benutzen haben, welche durch die beiden reellen Ecken des umschriebenen Vierseits gehen, also hier durch die reellen Scheitel, wie $J$ in $ab$, $G''$ in $ac$, unendlich ferner Punkt der $M'''O'''$ in $bc$, $O_1$ in $\mathfrak{U}$. Diese Hilfskegelschnitte haben wir auch nur verzeichnet. Die Kurven der Schaaren haben dann reelle Scheitel auf den Axen, welche durch jene reellen Ecken gehen, also auf $a'$ in $ab$, $a''$ in $ac$, auf der unendlich fernen Geraden in $bc$, auf $b^{IV}$ in $\mathfrak{U}$. Ihre anderen reellen Scheitel liegen auf denjenigen Axen, auf welchen ein imaginärer Scheitel des benutzten Hilfskegelschnittes liegt, so der reelle Scheitel $W'$ der Kurve $V'W'$ einer Schaar auf der Axe $b'$, auf welcher der imaginäre Scheitel der benutzten Hilfshyperbel $JO'$ liegt u. s. w.

Um nun die *Krümmungslinien* gleichförmig anzuordnen, teile man einen Quadranten $A'B'$ des *Hauptschnittes ab* in eine Anzahl (vier) nahezu gleicher Teile; $Q'$ sei ein Teilungspunkt. Projicirt man $Q$ aus $Y$ auf die Ebene $ac$ in $Q''$, beachtet, daß $Q''$ mit $A''$

auf derselben (endlichen) Strecke zwischen denselben reellen Vierseitsecken, wie $G''$, liegt, daß also nach I, 415, die durch $Q''$ und die durch $A''$ gehende Kurve dieselbe Hilfskurve gebrauchen, daß diese $G''P$ ist, weil ihr reeller Scheitel $P$ auf derselben Axe $c''$ liegt, wie der imaginäre der durch $A''$ gehenden (des Hauptschnittes), so hat man nur die $Q''Z''$ ($\| c''$) mit dem Hilfskegelschnitte $G''P$ in $R$ zu schneiden, um in $M''R$ eine Asymptote der durch $Q''$ gehenden (hyperbolischen) Projektion der Krümmungslinie zu erhalten.

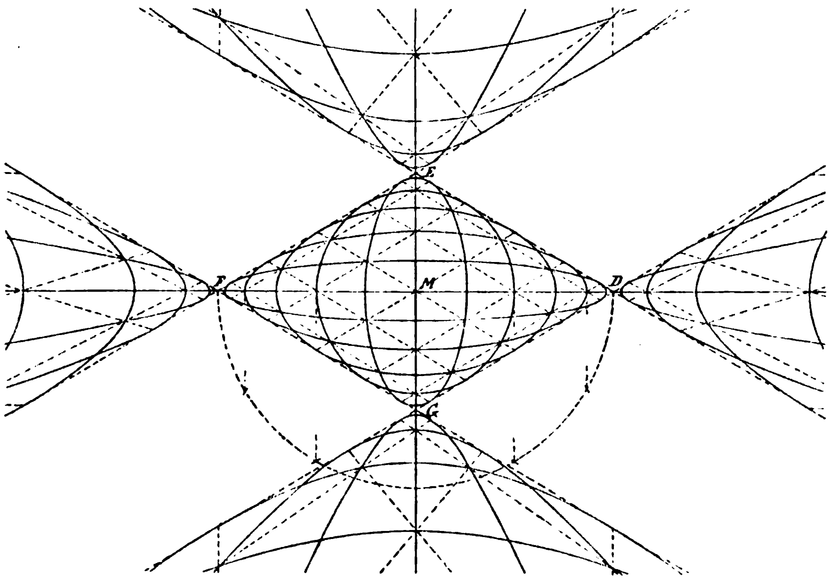
Projicirt man ebenso den Punkt $Q$ aus $X$ auf $bc$ in $Q'''$ und schneidet die $Q'''Z'''$ ($\| c'''$) mit dem Hilfskegelschnitte $KO'''$ in $S$, so ist $M'''S$ die Asymptote der (hyperbolischen) durch $Q$ gehenden Kurve der Schaar. Projicirt man endlich $Q$ aus $M$ auf die Darstellungsfläche $\mathfrak{U}$ der unendlich fernen Ebene in den unendlich fernen Punkt der Geraden $M^{IV}Q^{IV}$, so ist $M^{IV}Q^{IV}$ die Asymptote der vierten (hyperbolischen) Projektion der Krümmungslinie. Ihr reeller Scheitel auf $M^{IV}B^{IV}$ und ihr ideeller auf $M^{IV}A^{IV}$ werden durch den Schnittpunkt der $M^{IV}Q^{IV}$ mit dem Hilfskegelschnitte $O_1 O_2$ erhalten. Um endlich die erste Projektion unserer (durch $Q'$ gehenden) Krümmungslinie zu zeichnen, bestimmt man die erste Projektion $M'T'$ einer ihrer Asymptoten ($M''R$, $M'''S$) vermittelst der zweiten und dritten Projektionen $T''$, $T'''$ eines Punktes $T$ derselben (Abst. $T''a''$ = Abst. $T'''b'''$). Sie schneidet den Hilfskegelschnitt $JL$ in $U_1$, woraus sich der reelle Scheitel $U$ ergibt.

Entsprechend trage man in dem *Hauptschnitte* $ac$ von $A''$ aus nahezu gleiche Teile weiter; $V''$ sei ein Teilungspunkt. Projicirt man $V$ aus $Z$ auf $ab$ in $V'$, schneidet die $V'Y'$ ($\| b'$) mit dem Hilfskegelschnitte $JO'$, und projicirt den Schnittpunkt auf $b'$ in $W'$, so sind $V'$, $W'$ die Scheitel der ersten (elliptischen) Projektion einer Krümmungslinie. Projicirt man $V$ aus $X$ auf $bc$ in $V'''$, zieht $V'''Y'''$ ($\| b'''$) bis $Y$ auf dem Hilfskegelschnitte $HO'''$, so ist $M'''Y$ die Asymptote der dritten (hyperbolischen) Projektion der Krümmungslinie. Projicirt man endlich $V$ aus $M$ auf die Ebene der vierten Projektion nach $V_1$ ($M^{IV}V_1 = C''V_2$), so ist dies der eine Scheitel der vierten (elliptischen) Projektion der Krümmungslinie; und zieht man $V_1 Y^{IV}$ ($\| b^{IV}$) bis $V_3$ auf dem Hilfskegelschnitte $O_1 O_3$, so ergibt sich aus $V_3$ der andere Scheitel $V_4$. Die unendlich ferne Krümmungslinie derselben Art hat die mit dem Hauptschnitte $ac$ kongruente Ellipse $A^{IV}B^{IV}$ zur vierten Projektion.

**539.** Wir wollen noch *auf die Verzeichnung der Projektionen der Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades auf eine Hauptebene der Fläche das Verfahren der Netze* anwenden (I, 425 ff.), und zwar wollen wir die Projektionen derselben für das *Ellipsoid* und das *zwei-*

*schalige Hyperboloid* auf die Hauptebene $ac$ darstellen, wo sie sich als die Schaar der Kegelschnitte zeigen, welche dem reellen Rhombus eingeschrieben sind, der von den Tangenten des Hauptschnittes $ac$ in den Nabelpunkten der Fläche gebildet wird. Sei $DEFG$ Fig. 214.

Fig. 214.




dieser Rhombus, so erfüllt die Kegelschnittschaar den endlichen Rhombus und diejenigen beiden unendlichen, welche durch die beiden Scheitelwinkel je zweier gegenüberstehenden Winkel des Rhombus gebildet werden, während die vier Parallelstreifen frei bleiben. Beschreibt man nun (I, 442) über der (größeren) Diagonale $DF$ des Rhombus als Durchmesser einen Halbkreis, teilt denselben in eine gerade Anzahl (sechs) gleicher Teile, projicirt die Teilungspunkte senkrecht auf den Durchmesser $DF$, und zieht durch die Projektionen die zwei Schaaren von Parallelen zu den Seiten des Rhombus, so sind die Schnittpunkte der beiderlei Parallelen Punkte der Kurven, wobei stets zwei Punkte verbunden werden, welche Gegenecken eines der durch benachbarte Parallele gebildeten Parallelogramms sind. Die abwechselnd fehlenden Scheitel der Kurven erhält man auf den Diagonalen durch nochmalige Halbirung der Kreisteile. Projicirt man nun die entstandene Teilung der Seiten des endlichen Rhombus auf die der unendlichen Rhomben, indem man z. B. die Teilung von $DE$ aus $F$ auf die Strecke der $DG$ von $D$ bis ins Unendliche projicirt, so kann man durch diese Teilungspunkte in

den unendlichen Rhomben leicht die bestimmenden Strahlen ziehen, z. B. in demjenigen der Winkel $D$ und $F$ die Strahlen aus $E$ und $G$. Die Kegelschnitte werden dann in der angegebenen Weise eingezeichnet.

**540.** Die Kurven im endlichen Rhombus stellen die Krümmungslinien eines jeden *Ellipsoides* dar, dessen Hauptschnitt $ac$ eine dieser Ellipsen ist. Die $b$ Axe des Ellipsoides ist gleich dem mit einer Rhombusseite parallelen Durchmesser des Hauptschnittes $ac$ (532). Die Kurven in jedem der beiden unendlichen Rhomben, des $DF$ und des $EG$, stellen ebenso die Krümmungslinien eines zweischaligen Hyperboloides dar, dessen Hauptschnitt $ac$ einer der in den Rhombus eingeschriebenen Hyperbeln ist. Jeder der unendlichen Rhomben mit seinen eingeschriebenen Kurven, so derjenige $DF$, befindet sich in perspektiver involutorischer Kollineation (I, 312) mit dem endlichen Rhombus und mit seinen eingeschriebenen Ellipsen, wobei $F$ (oder $D$) der Mittelpunkt und die durch $D$ (oder $F$) gezogene Senkrechte zu $FD$ die Axe der Kollineation sind, und wobei $EG$ und die unendlich ferne Gerade sich doppelt entsprechen. Daher sind die Asymptoten der eingeschriebenen Hyperbel parallel zu den aus $F$ nach den Ellipsenscheiteln in $EG$ gezogenen Geraden. Die ideelle, auf der Zeichenfläche ($ac$) senkrechte $b$ Axe eines der zweischaligen Hyperboloide findet man unter Beachtung, daß die Rhombusseiten die Fläche in Nabelpunkten berühren, durch Bestimmung des Asymptotenkegels nach dem umgekehrten Verfahren der Nr. 67 aus seinen Erzeugenden in der Hauptebene $ac$ und aus der mit $b$ und mit einer Rhombusseite parallelen Lage seiner Kreisschnitte.

Aus den gezeichneten Projektionen der Krümmungslinien auf die Hauptebene $ac$ lassen sich die auf die anderen Hauptebenen ableiten. Man kann diese anderen Projektionen ebenfalls aus Netzen konstruiren (I, 439); es gehören aber dann die Kegelschnitte der verschiedenen Schaaren nicht als die verschiedenen Projektionen derselben Krümmungslinien zu einander.

*Übungsaufg.* Die Projektionen der *Krümmungslinien des elliptischen und des hyperbolischen Paraboloides* auf ihre Hauptebenen nach einer der drei angegebenen Verfahren zu konstruiren.

# XII. Abschnitt.

## Axonometrische und schiefe Projektion, Perspektive und Reliefperspektive krummer Flächen.

### I. Axonometrie.

**541.** Wir wollen eine Anzahl der in der Überschrift bezeichneten Aufgaben in einer durch das Bedürfnis der Technik und Kunst bestimmten Auswahl lösen.

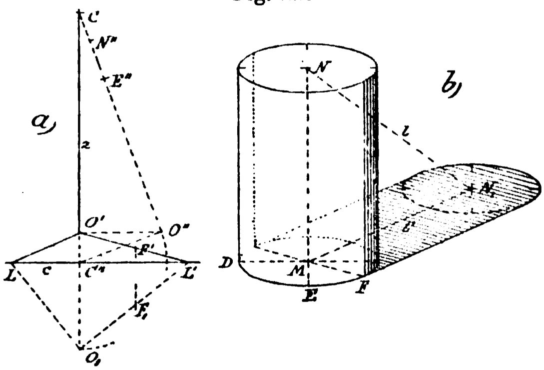
*Aufg. Die axionometrische Projektion*) eines auf die Grundrißebene* $\mathbf{P}_1$ *aufgestellten geraden Kreiscylinders mit seinen Schatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Es sei von dem durch die Axen $x$, $y$, $z$ gebildeten *Axenkreuze* $O$ die Abbildung (Fig. $a$) nach I, 507 gegeben, jedoch in etwas mehr zusammengedrängter Weise mit alleiniger Angabe der Axe $z$ und der Axenebene $xy = \mathbf{P}_1$ und ohne Bezeichnung der Axen $x$, $y$ in $\mathbf{P}_1$. Dabei sei die projicirende Ebene von $z$ samt $z$ und samt ihrer Schnittlinie mit $\mathbf{P}_1$ in die Bildebene $\mathbf{P}$ in den rechten Winkel $C O'' C''$ umgelegt, und daraus $O'$ auf $z$ durch $O'' O' \perp z$ bestimmt; ferner sei durch den Schnittpunkt $C''$ von $O'' C''$ mit $z$ die Spur $c$ der $\mathbf{P}_1$ ($\perp z$) gezeichnet und die $\mathbf{P}_1$ um $c$ in $\mathbf{P}$ umgelegt, wobei $O$ nach $O_1$ in $z$ gelangt ($C'' O_1 = C'' O''$). Fig 215.

*) Aufgaben über die axonometrische Projektion des Kreises, des Umdrehungcylinders, des Umdrehungskegels und der Kugel, sowie ihrer Schatten hat Herr *Pelz* in seinen Abhandlungen „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie" (Sitzungsber. d Akad. d. Wiss. in Wien, B. 40, Abt. 2, 1884) und „Beiträge zur wiss. Beh. d. orth. Axon." (Sitzungsber. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wiss. in Prag, 1885) in sinnreicher Weise auf alleiniger Grundlage der gegebenen Richtung der Koordinatenaxen (der Linien des Axenkreuzes) bestimmt und dabei unmittelbar die Axen der vorkommenden Ellipsen gesucht. Bei einem Teile der oben gegebenen Auflösungen sind auch die sehr fördernden Richtungsmaße benutzt, die man bei vereinzeltem Gebrauche einfach am Axenkreuze bestimmt, bei häufigem aber aus besonderen Maßstäben entnimmt, welche man zweckmäßig an einem Strahlenmaßstabe bildet. Auch habe ich wegen der einfacheren Erörterungen vorgezogen, von den Ellipsen konjugirte Durchmesser und aus diesen die Axen zu bestimmen, zumal da die Gesammtkonstruktion dadurch nicht verwickelter wird.

Von dem *Cylinder* erhält man die Abbildung (Fig. *b*) der Axe parallel zu $O'C = z$ und von der Länge $MN$, wenn man ihre Größe nach dem in der Bildfläche geltenden Maße, das wir die wahre Größe nennen wollen, auf $O''C$ als $O''N''$ aufträgt und deren Projektion auf $O'C$ bildet, oder auch $MN$ = Abstand $N''.\,O''O'$ macht. Der Grundkreis bildet sich in eine Ellipse ab, deren große Halbaxe $MD \perp MN$ und in wahrer Größe zu zeichnen ist (I, 508). Die kleine in $MN$ liegende Halbaxe erhält man aber als $ME$ = Abst. $E''.\,O'C$, wenn man auf $CO''$ die $CE'' = MD$ = der wahren Größe aufträgt. Denn da $O'CO''$ der Winkel von $z$ mit der Bildebene **P** ist, so ist $O'O''C$ der Winkel desjenigen Kreishalbmessers mit **P**, welcher sich in $ME$ projicirt, daher $ME$ = Projektion von $CE''$ auf $O'O''$ = Abst. $E''.\,O'C$. Hieran schließt sich der für das Folgende nützliche

Fig. 215.




*Satz. Sind von zweien auf einander senkrechten gleichen Strecken die senkrechten Projektionen auf dieselbe Bildebene* **P** *in derselben oder in parallelen Geraden gelegen, so verhalten sich die Projektionen wie der Cosinus zum Sinus der Neigung der ersteren Strecke gegen* **P**, *oder so kann man aus beiden Projektionen und aus der wahren Länge der Strecken als Seiten ein rechtwinkliges Dreieck bilden* (vergl. I, 159).

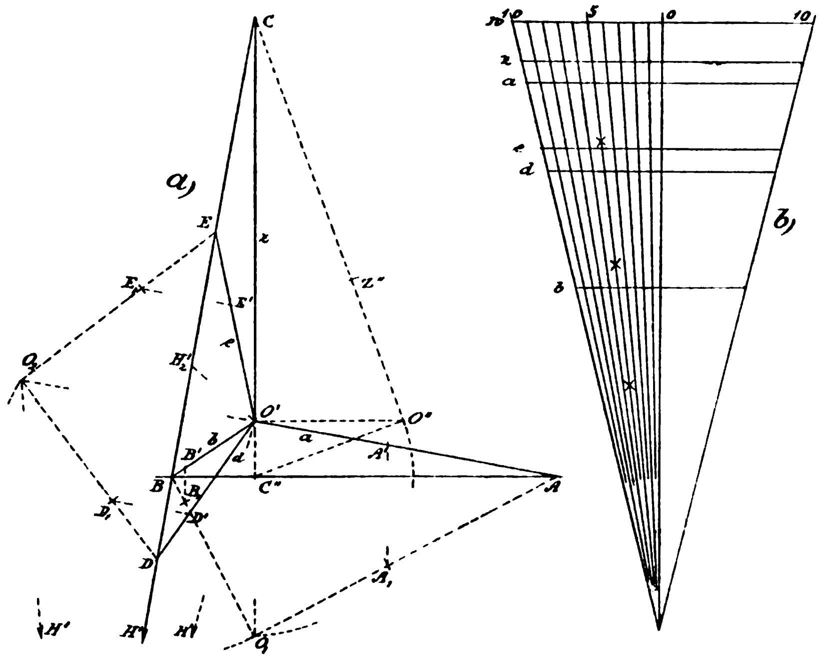
Zur Verzeichnung des *Schlagschattens des Cylinders auf die Grundrißebene* $\mathbf{P}_1$ müssen die Abbildungen $l$ und $l'$ des Lichtstrahles und seines Grundrisses gegeben sein. Der durch den Mittelpunkt $N$ des oberen Grenzkreises gezogene Lichtstrahl $l$ und dessen durch $M$ gehender Grundriß $l'$ schneiden sich im Schatten $N_1$ von $N$; und der Schatten des oberen Grenzkreises bildet sich in eine mit der Ellipse $DE$ kongruente und parallele Ellipse vom Mittelpunkte $N_1$ ab. Die *Schlagschattengrenze der Cylinderfläche* wird durch die beiden mit $l'$ parallelen gemeinschaftlichen Tangenten der Ellipsen $M$ und $N_1$ bestimmt; und sucht man, etwa mittelst konjugirter Durchmesser, einen Berührungspunkt $F$ auf $DE$, so ist die durch $F$ gehende Erzeugende eine *Eigenschattengrenze.* Um $F$ unabhängig von der Verzeichnung der Ellipse $DE$ zu erhalten, suche man in der Fig. *a* jene zu $O'L$ ($\parallel l'$) konjugirte Linie, als Abbildung einer

zu ihr Senkrechten in der $xy$Ebene. Zu dem Ende schneide man $O'L$ mit $c$ in $L$, ziehe zu $O_1L$ die Senkrechte $O_1L'$ bis $L'$ auf $c$, so ist $O'L'$ jene konjugirte Linie. Trägt man die wahre Länge des Halbmessers des Grundkreises auf $O_1L'$ als $OF_1 = MD$ auf, zieht $F_1F' \perp c$ bis $F'$ auf $O'L'$, so hat man nur $MF \# O'F'$ zu machen.

**542.** *Aufg. Die axonometrische Projektion zweier geraden Kreiscylinder zu verzeichnen, von denen der eine in beliebiger Richtung auf die Grundrißebene aufgelegt, der andere auf den ersten aufgelehnt ist, und ihre Schatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Sei wieder vom Axenkreuze nur die Axe $z$ und die Grundriß- Fig. 216 a
ebene $xy = \mathbf{P}_1$ in Fig. $a$ angenommen, sei ferner in $\mathbf{P}_1$ die Abbildung $O'A = a$ der Richtung der Erzeugenden des liegenden Cylinders **C**

Fig. 216 a, b.




gegeben, so bestimme man in $\mathbf{P}_1$ die Abbildung $b = O'B$ der auf $a$ senkrechten Richtung durch $A\,O_1B = 90^0$, wobei wieder $C''O_1 = C''O''$. Man könnte die wenigen in den verschiedenen Richtungen vorkommenden Maße wie bei der vorigen Aufgabe und wie hier die Maßeinheiten bestimmen und den *Strahlenmaßstab* entbehren; wir wollen denselben aber dennoch verzeichnen, um auch das Verfahren für ausgedehntere Abbildungen anzugeben. Wir bilden ihn nach der Art von I, 507, Fig. 283, indem wir zuerst den wahren (für Fig. 216 b.
die Bildebene geltenden) Maßstab $w$ herstellen, nach den Teilungs-

punkten die Strahlen aus einem entfernteren Punkte ziehen, derart daß der Strahl nach dem Nullpunkte des Maßstabes $\perp w$ steht, tragen die Maßstabseinheit ($= 10$) als $O''Z'' = O_1A_1 = O_1B_1$ auf, und bestimmen daraus ihre Abbildungen Abst. $Z''.O'O''$, $O'A'$, $O'B'$; diese können wir dann, und zwar mit Hilfe jener senkrechten Strahlenrichtung ausschließlich mittelst des Zirkels, in den Strahlenmaßstab einschalten, wodurch wir die Maßstäbe $s$, $a$, $b$ erhalten.

Fig. 216 c.

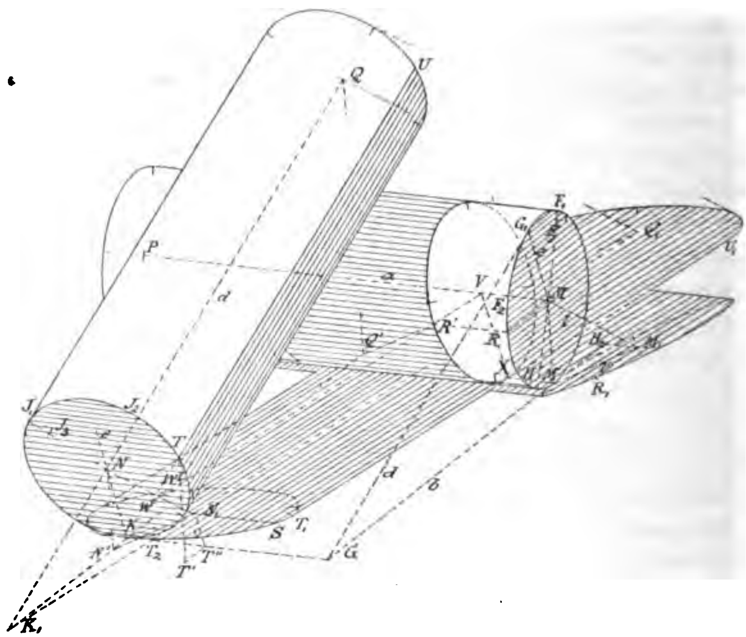



Fig. 216 c. Ist nun $M$ die Abbildung des Mittelpunktes des einen Grundkreises des *liegenden Cylinders* C, und ist dessen Halbmesser $r = 6$ gegeben, so zeichnet man die große Halbaxe $MF_1$ der abbildenden Ellipse $\perp a$ nach dem Maßstabe $w$; die kleine Halbaxe $MF_2$ erhält man aber, wenn man auf $MF_1$ die $MF_3 = r = 6$ nach dem Maßstabe $a$ aufträgt und $F_3F_2 = MF_1$ macht, wonach $F_3$ einen Brennpunkt der Ellipse bezeichnet. Denn nach dem Satze der vorigen Nr. bilden der wahre Halbmesser ($= F_3F_2$), seine Projektion auf $a$ ($= MF_3$) und diejenige auf $MF_2$ ($= MF_2$) ein rechtwinkliges Dreieck. Daher gilt der

*Satz. Die Excentricität einer Ellipse, welche die senkrechte Projektion eines Kreises bildet, ist gleich der Projektion einer Strecke, welche gleich dem Kreishalbmesser ist und senkrecht auf der Ebene des Kreises steht.*

Ist ferner die Länge des Cylinders = 30 gegeben, so zeichnet man $MP \parallel a$ und = 30 nach dem Maßstabe $a$, und dann um $P$ als Mittelpunkt die mit $F_1F_2$ kongruente und parallele Endellipse. Den Berührungspunkt $M'$ der Endellipse mit der Grundrißebene $\mathbf{P}_1$ erhält man durch $MM' \parallel z$ (und zur Probe) = 6 nach dem Maßstabe $z$. Die $M'G \parallel b$ (der Fig. $a$) ist dann die Projektion des Grundkreises auf die Bodenfläche.

Die Erzeugenden des auf $\mathbf{C}$ gelehnten, *geneigten Cylinders* $\mathbf{C}_1$ stehen, der Sicherheit der Stützung halber, senkrecht auf denen des $\mathbf{C}$, d. i. $\perp a$, und man kann eine Tangente der Ellipse $F_1F_2$ annehmen, womit die Axe $d$ des $\mathbf{C}_1$ parallel sein soll; diese Tangente $G_1G$ mit dem Berührungspunkte $G_1$ schneide die $M'G$ und daher die $\mathbf{P}_1$ in $G$; und man erhält den Stützpunkt $K$ des $\mathbf{C}_1$ auf $\mathbf{P}_1$ auf einer Parallelen $GK$ zu $a$, zweckmäßig mit $GK = \frac{1}{2} MP$. Der Stützungshalbmesser $KN = e$ des Grundkreises des $\mathbf{C}_1$ liegt mit $d$ in einer auf $a$ (und $\mathbf{P}_1$) senkrechten, daher mit der Ebene des Grundkreises $F_1F_2$ parallelen Ebene, und seine Richtung kann als diejenige des zu $d$ konjugirten Halbdurchmessers $MG_1$ der Ellipse $F_1F_2$ gefunden werden. Genauer erhält man ihn aber in der Fig. $a$, wenn man die Ebene $COB$ um ihre Spur $CB$ in die Bildebene mittelst $O'O_2 \perp CB$, $BO_2 = BO_1$ umlegt, die $O'D \parallel d$ bis $D$ auf $CB$, und die $O_2E \perp O_2D$ bis $E$ auf $CB$ zieht, dann ist $e \parallel O'E$. Die Maßstäbe $d$, $e$ erhält man wieder durch $O_2D_1 = O_2E_1$ = der Maßstabseinheit (= 10), $D_1D'$ und $E_1E' \perp CB$, und Einschalten von $O'D'$ und $O'E'$ in den Strahlenmaßstab in $d$ und $e$. Soll nun der Grundkreis des Cylinders $\mathbf{C}_1$ ebenfalls den Halbmesser $r = 6$ haben, so macht man $KN \parallel e$ und = 6 nach dem Maßstabe $e$ und hat die Probe $MG_1 \# KN$. Man zeichnet dann die Grundellipse, indem man die große Halbaxe $NJ_1 \perp d$ und = 6 nach dem Maßstabe $w$ angibt, darauf die Excentricität $NJ_3 = 6$ nach dem Maßstabe $d$ aufträgt, und die kleine Halbaxe $NJ_2 \parallel d$ durch $J_3J_2 = NJ_1$ bestimmt. Sodann trägt man auf der Axe $NQ$ des $\mathbf{C}_1$ ($\parallel d$) ihre Länge $NQ$ gleich der gegebenen Länge 40 nach dem Maßstabe $d$ auf, und zeichnet die zweite Grenzellipse kongruent und parallel zur ersten.

**543.** Zur Bestimmung der *Schatten* dient die gegebene Abbildung $l$ des Lichtstrahles und diejenige $l'$ seines Grundrisses. Für den *Schlagschatten des Cylinders* $\mathbf{C}$ und zunächst seines Grundkreises $F_1F_2$ auf $\mathbf{P}_1$ ermittelt man den Schatten $M_1$ von dessen Mittelpunkte $M$ als Schnitt von $MM_1 \parallel l$ mit $M'M_1 \parallel l'$. Der Halbdurchmesser $MM'$ hat dann $M_1M'$ zum Schatten, und sein konjugirter (mit $b$ paralleler) Halbdurchmesser $MR$ hat $M_1R_1 \parallel b$ und = 6 nach dem

Maßstabe $b$ zum Schatten. Daher sind $M_1M'$, $M_1R_1$ zwei konjugirte Halbdurchmesser der Schattenellipse, und aus diesen ermittelt man nach I, 377 die Axen und verzeichnet daraus die Kurve. Die beiden mit $a$ parallelen Tangenten dieser Ellipse sind die Schlagschattengrenzen der Cylinderfläche. Aus diesen könnte man auch rückwärts ihre *Eigenschattengrenzen* finden; doch ist es genauer, dieselben unmittelbar zu bestimmen. Die berührenden Lichtstrahlenebenen des Cylinders **C** sind mit der Ebene seiner Axe $MP = a$ und des Lichtstrahles $MM_1 = l$ parallel. Diese schneidet die Grundkreisebene in $MH_2$, wenn die $M_1H_2 \parallel a$ bis $H_2$ auf $M'G$ gezogen wurde. Bestimmt man dann den zu $MH_2$ konjugirten Durchmesser der Grundellipse, so gehen durch dessen Endpunkte, wie $H$, die Eigenschattengrenzen des Cylinders $\parallel a$. Dieser konjugirte Durchmesser wird am genauesten in Fig. $a$ ermittelt ($O'H_2' \parallel MH_2$, $O_2H' \perp O_2H_2'$, $MH \parallel O'H'$; die Länge $MH$ könnte wieder durch den Maßstab seiner Linie bestimmt werden).

Zur Konstruktion des *Schlagschattens des Cylinders* $\mathbf{C}_1$ auf $\mathbf{P}_1$ verzeichnet man den Grundriß seiner Axe $NQ$ als $KQ' \parallel b$; auf diesem ergeben sich die Grundrisse $N'$, $Q'$ von $N$, $Q$ ($NN' \parallel QQ' \parallel z$). Dann ermittelt man die Schatten $N_1$, $Q_1$ von $N$, $Q$ durch $NN_1 \parallel QQ_1 \parallel l$, $N'N_1 \parallel Q'Q_1 \parallel l'$; der Schatten $N_1Q_1$ von $NQ$ muß dann durch die Grundrißspur $K_1$ der $NQ$, d. i. ihren Schnitt mit $KN'Q'$ gehen. Von dem Grundkreise $J_1J_2$ wirft der Halbdurchmesser $NK$ seinen Schatten in $N_1K$, sein konjugirter, mit $a$ paralleler Halbdurchmesser in $N_1S \parallel a$ und $= 6$ nach dem Maßstabe $a$. Aus diesen konjugirten Halbdurchmessern bestimmt man die Axen und zeichnet die Schattenellipse, sowie die mit ihr kongruente und parallele aus $Q_1$. Die Schlagschattengrenzen des Cylinders $\mathbf{C}_1$ sind die beiden gemeinschaftlichen, mit $N_1Q_1$ parallelen Tangenten dieser Ellipsen, so $T_1U_1$.

Zur Bestimmung der *Eigenschattengrenzen* des $\mathbf{C}_1$ schneidet man wieder die Lichtstrahlenebene der Axe, nämlich $NQQ_1N_1$ mit der Grundkreisebene in $NT_2$, wobei $T_2$ der Schnittpunkt von $Q_1N_1$ mit $KG$, sucht zu $NT_2$ den konjugirten Durchmesser der Grundellipse, durch dessen Endpunkte, so durch $T$, die Eigenschattengrenzen $\parallel d$ laufen, so $TU$. Dieser konjugirte Durchmesser konnte bei der wenig excentrischen Gestalt der Grundellipse mit genügender Sicherheit an dieser ermittelt werden; sonst hätte man in Fig. $a$ die mit der Kreisebene parallele Ebene $AEO$ und ihre Umlegung benutzt. Der Schatten von $TU$ auf $\mathbf{P}_1$ ist $T_1U_1$.

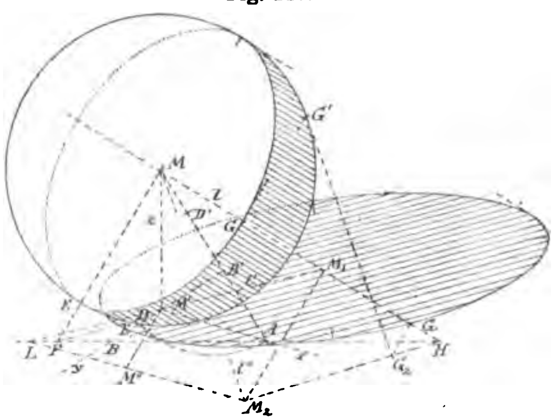
**544.** *Der Schlagschatten des Cylinders* $\mathbf{C}_1$ *auf denjenigen* **C** ist der Schatten der beiden Eigenschattengrenzen, so der Erzeugenden

$TU$; letzterer ist also der Schnitt der Ebene $TUU_1T_1$ mit **C**, d. i. eine Ellipse, von der wir zwei konjugirte Durchmesser in den konjugirten Durchmesserebenen des **C** bestimmen wollen, welche durch die Axe $MP$ und einerseits $\parallel$ **P**$_1$, andererseits durch $M'$ gehen. Die erstere schneidet den **C** in der Erzeugenden $RR' \parallel a$, die $TU$ in $W$ und die Lichtstrahlenebene der $TU$ in der $WV \parallel T_1U_1$. Man erhält aber $W$, wenn man den Grundriß $T'$ von $T$ durch $TT''' \parallel e$ bis $T''$ auf $KG$, durch $T''T' \parallel b$ und durch $TT' \parallel z$ ermittelt, wenn man dann auf $T'T$ die $T'W' = r = M'M$ aufträgt und $W'W \parallel b$ bis $W$ auf $TU$ zieht. Die $WV$ schneidet die $MP$ und die $RR'$ bezw. in $V$ und $R'$, und die $T_1U_1$ schneidet die durch $M'$ gehende Auflagerungserzeugende des Cylinders **C** auf **P**$_1$ in $X$; dann ist $V$ der Mittelpunkt und $VR'$, $VX$ sind konjugirte Halbdurchmesser der Schattenellipse. Aus ihnen bestimmt man die Axen und verzeichnet die Ellipse; sie muß die Umrisse des Cylinders **C** berühren. Aus dieser Ellipse erhält man die zweite Schlagschattengrenze des **C**$_1$ auf **C** durch eine Parallelverschiebung der ersten in der Richtung $a$ um eine Strecke, wie sie auf jeder Linie $a$ zwischen den Schlagschatten des Cylinders **C**$_1$ auf **P**$_1$ eingeschlossen wird.

**545.** *Aufg. Die axonometrische Projektion einer Kugel, welche auf der Grundrißebene* **P**$_1$ *aufliegt, sowie die Grenze ihres Eigen- und ihres Schlagschattens auf* **P**$_1$ *bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Wir wollen die Aufgabe mit alleiniger Benutzung der Axenrichtungen $x$, $y$, $z$ lösen, deren Ursprung wir in dem Auflager- Fig. 217.
punkte $M'$ der Kugel auf der **P**$_1$ annehmen. Den Mittelpunkt der Kugel wählen wir auf der Axe $z$ in $M$, und legen durch $M$ die Bildebene **P**; dann sind die Spuren der $zx$- und $xy$Ebene bezw. die Geraden $MA \perp y$, $AB \perp z$, wobei $A$ auf $x$ liegt. Um die wahre Größe des

Fig. 217.



Kugelhalbmessers zu erhalten, beschreibe man über $MA$ als Durchmesser einen Kreis, und schneide denselben mit $y$ in $D$, so ist $MD$ jene wahre Größe, und der Umriß ist der aus $M$ als Mittelpunkt durch $D$ gelegte Kreis; denn jener Kreis $MA$ ist die Um-

legung des über $MA$ durch den Ursprung gelegten Kreises ($D$ tritt an die Stelle von $O_1$ in der Fig. 216 a).

Geben nun $MM_1 = l$ den Lichtstrahl und $M'M_1 = l'$ seinen Grundriß an, wobei $M_1$ der Schatten von $M$ auf $\mathbf{P}_1$, und beachtet man, daß die *Eigenschattengrenze* der größte Kreis ist, dessen Ebene senkrecht auf $l$ steht, so findet man die große Halbaxe der Ellipse, welche ihn abbildet, als den auf $l$ senkrechten Halbmesser $ME$. Da derselbe in der Bildebene $\mathbf{P}$ liegt, so ist seine Grundrißspur sein Schnittpunkt $F$ mit $AB$. Der Schlagschatten von $MF$ auf $\mathbf{P}_1$ ist daher $M_1F$, und der von $ME$ ist $M_1E_1$, wobei $E_1$ auf $M_1F$ und $EE_1 \parallel l$. Um die kleine Halbaxe $MG$ der Eigenschattenellipse und ihren Schlagschatten $M_1G_1$ auf $\mathbf{P}_1$, welche beide in $l$ liegen, zu ermitteln, lege man die Ebene $\mathbf{L}$, welche den durch $M$ gehenden Lichtstrahl auf die $\mathbf{P}$ projicirt, um $MM_1$ $(= l)$ in $\mathbf{P}$ um; dabei gelangt $M_1$ nach $M_2$, wenn $M_1M_2 \perp l$ und gleich dem Abstande des $M_1$ von $\mathbf{P}$ ist. Diesen Abstand bestimmt man aus demjenigen des $M'$, und diesen erhält man gleich dem Stücke $B'D'$ der $MA$, wenn $B'$ der Schnittpunkt von $y$ mit $MA$, und wenn $M'D' = B'D$ gemacht wurde. Denn der wahre Abstand $B'D$ $(= M'D')$ des $B'$ vom räumlichen Ursprungspunkte, dessen Projektion $B'M'$ und der Abstand des Ursprungspunktes von $\mathbf{P}$ $(= B'D')$ sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Nun schneidet aber die $l' = M'M_1$ die $\mathbf{P}$ in ihrem Schnittpunkte $L$ mit $AB$; und da sich die Abstände des $M'$ und des $M_1$ von $\mathbf{P}$ wie $LM'$ zu $LM_1$ verhalten, so erhält man letzteren Abstand $= M_1M_2$, wenn man $M'M'' \parallel M_1M_2$ und $= B'D'$ zeichnet und $LM''$ mit $M_1M_2$ in $M_2$ schneidet. Jene Ebene $\mathbf{L}$ enthält einen größten Kreis der Kugel, den Lichtstrahl $MM_1$ und eine Schnittlinie $HM_1$ mit der Ebene $\mathbf{P}_1$, wobei $H$ der Schnittpunkt von $l$ mit $AB$. Diese Linien gelangen bei der Umlegung der $\mathbf{L}$ in $\mathbf{P}$ bezw. in den Kugelumriß, in die $MM_2 = l''$ und in die $HM_2$. Legt man nun eine Tangente $\parallel l''$ an den Kugelumriß, und berührt dieselbe den Umriß in $G'$ und schneidet die $HM_2$ in $G_2$, so gelangen diese Punkte beim Zurückdrehen bezw. nach $G$ und $G_1$ auf $l$, wenn $G'G$ und $G_2G_1 \perp l$ sind; und hierdurch sind diese gesuchten Punkte bestimmt. Die *Schlagschattenellipse* hat dann $M_1E_1$ und $M_1G_1$ zu konjugirten Halbdurchmessern; aus denselben bestimmt man die Axen und mittelst dieser verzeichnet man die Kurve.

### II. Schiefe Projektion.

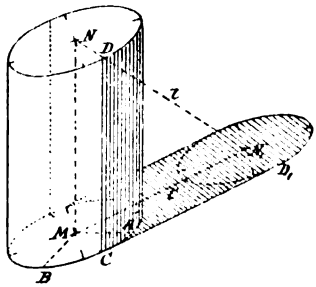
**546.** Die Anwendung der schiefen Projektion ist nur dann gerechtfertigt (I, 526), wenn bei dem abzubildenden Gegenstande

Ebenen von übereinstimmender Stellung vorkommen, welche wegen ihrer Wichtigkeit kongruent abgebildet werden sollen; diese Stellung gibt man der Bildebene. Bei krummen Flächen findet dieser Umstand nicht statt, und man würde deswegen für sie die schiefe Projektion nicht wählen, da sie bei dieser Abbildung verzerrt erscheinen, wie wir alsbald sehen werden. Demohngeachtet müssen sie in dieser Projektion dann abgebildet werden, wenn man wegen anderer vorherrschender Gegenstände dieselbe gewählt hat. Wir werden uns aber mit zwei Beispielen begnügen.

*Aufg. Die schiefe Projektion eines auf die Grundrißebene* $\mathbf{P}_1$ *aufgestellten geraden Kreiscylinders mit seinen Schatten bei Parallelbeleuchtung zu verzeichnen.*

*Aufl.* Die Bildebene $\mathbf{P}$ stehe parallel mit der Axe $MN$ des Cylinders und $MA$ sei der mit $\mathbf{P}$ parallele Halbmesser des Grundkreises; dann ist in der Abbildung $NMA = 90^0$; der auf $MA$ senkrechte Halbmesser bilde sich in die willkürlich anzunehmende Strecke $MB$ ab. Die Abbildung des Grundkreises ist dann die Ellipse von den konjugirten Halbdurchmessern $MA$, $MB$; aus ihnen bestimme man die Axen und mittelst dieser verzeichne man die Kurve. Die andere Grenzellipse bilde man aus $N$ als Mittelpunkt kongruent und parallel zur ersten. Fig. 218.

Fig. 218.




Man bemerkt, daß *bei der schiefen Projektion eines geraden Kreiscylinders die große Axe der Endellipse im allgemeinen schief gegen die Cylinderaxe steht,* senkrecht dagegen in dem besonderen Falle, in welchem die Abbildung der auf der Bildebene senkrechten Geraden und der Cylinderaxe ($MB$ und $MN$) in dieselbe Gerade fallen. Durch diese schiefe Stellung der großen Ellipsenaxe gegen die Cylinderaxe unterscheidet sich wesentlich die schiefe von der axonometrischen (senkrechten) Projektion, bei welch letzterer stets die senkrechte Stellung stattfindet.

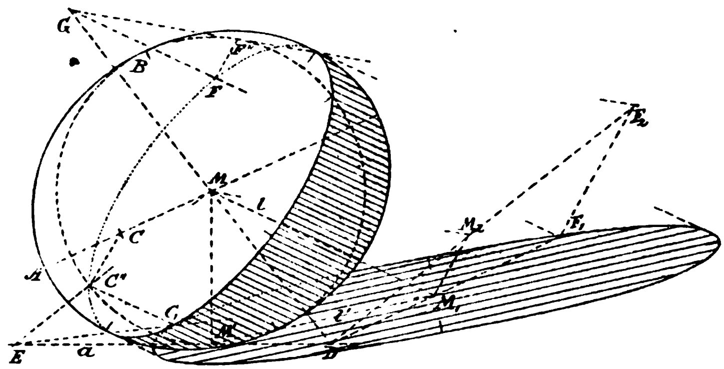
Den *Schlagschatten* des oberen Grundkreises auf $\mathbf{P}_1$ bildet man als kongruente und ähnliche Ellipse zu den beiden anderen ab, und zwar aus dem Mittelpunkte $N_1$, dem Schatten von $N$, wobei $NN_1 = l$ der Lichtstrahl und $MN_1 = l'$ dessen Grundriß ist. Dadurch ergeben sich die mit $l'$ parallelen Schlagschattengrenzen des Cylinders, wie $CD_1$, und dann seine *Eigenschattengrenzen,* wie $CD$ aus dem zu $l'$ konjugirten Durchmesser $2MC$ der Grenzellipse.

**547.** *Die schiefe Projektion einer Kugel, welche auf der Grund-*

*rißebene* $P_1$ *aufliegt, sowie die Grenze ihres Eigen- und ihres Schlagschattens auf* $P_1$ *bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

Fig. 219. *Aufl.* Sei $M$ die Abbildung ihres Mittelpunktes, $MC$ diejenige eines auf der Bildebene senkrechten Halbmessers, $MB (\perp MC)$ diejenige eines mit der Bildebene parallelen Halbmessers, der also die wahre Größe desselben angibt. Dann ist der Umriß der Abbildung eine Ellipse, welche $M$ zum Mittelpunkte, $C$ zu einem Brennpunkte hat, dessen kleine Halbaxe $(\perp MC) = MB$, und dessen große Halbaxe $MA$ (auf $MC$) daher $= CB$ ist. Denn der projicirende Cylinder ist ein der Kugel umschriebener (Umdrehungs-)Cylinder;

Fig. 219.




und denkt man sich die auf dem Halbmesser $MC$ senkrechte Bildebene durch $C$ gelegt, so berührt sie in $C$ die Kugel, und ihr Schnitt mit dem Cylinder, oder der gesuchte Umriß ist dann eine Ellipse, welche $C$ zu einem Brennpunkte, den Schnittpunkt mit der Cylinderaxe, d. i. die Abbildung $M$ des Kugelmittelpunktes zum Mittelpunkte, und die kleine Halbaxe gleich dem Kugelhalbmesser hat (I, 329).

Man bemerkt, daß in dieser *elliptischen Abbildung der Kugel* ein zweiter wesentlicher Unterschied der schiefen gegen die axonometrische (senkrechte) Projektion liegt, bei welch letzterer sich die Kugel stets als Kreis abbildet. Durch diese Eigentümlichkeiten bringt aber die schiefe Projektion des geraden Kreiscylinders und noch mehr die der Kugel, wenn man sie gerade von vorn betrachtet, einen empfindlich fehlerhaften Eindruck hervor, wie schon erwähnt wurde.

*Der Umriß der schiefen oder der axonometrischen Projektion irgend einer Fläche zweiten Grades wird aus der Abbildung dreier konjugirten Halbdurchmesser der Fläche nach den Nummern* 128 ff. *gefunden.*

**548.** Die *Schatten* ergeben sich auf gleichem Wege, wie bei der axonometrischen Projektion. Die durch den Mittelpunkt $M$ gehend gedachte Bildebene **P** schneidet die Kugel in einem Kreise, dem Hauptkreise, welcher sich als der aus $M$ durch $B$ gezogene Kreis abbildet; sodann schneidet die **P** die Grundrißebene $\mathbf{P}_1$ in einer wagerechten Tangente $a$ dieses Kreises, deren Berührungspunkt $M'$ der Auflagerpunkt der Kugel auf $\mathbf{P}_1$ ist. Es stellen wieder $MM_1 = l$ den Lichtstrahl, $M'M_1 = l'$ seinen Grundriß, daher $M_1$ den Schatten des $M$ auf $\mathbf{P}_1$ dar. Von den Eigen- und Schlagschattengrenzen bestimmen wir je zwei konjugirte Halbdurchmesser, den einen in der durch den Lichtstrahl $MM_1$ senkreckt zu **P** gelegten Ebene **L**, den anderen daher bei der kreisförmigen Eigenschattengrenze $\perp$ **L**. Die **L** schneidet die $\mathbf{P}_1$ in der $M_1D$ ($\parallel MC$), die **P** in $MD$, wenn $D$ der Schnittpunkt der $M_1D$ mit $a$; daher ist der auf $MD$ senkrechte Halbmesser $MC''$ des Hauptkreises, der zweite von jenen konjugirten Halbdurchmessern der Eigenschattengrenze. Sodann schneidet die Ebene **L** die Kugel in einem größten Kreise, von dem eine Durchmesserlinie $MD$ ist. Legt man nun **L** um $MD$ in **P** um, so gelangen $MC$ und $DM_1$ in die zu $MD$ Senkrechten $MC''$ und $DM_2$, wobei $M_1M_2 \parallel CC''$, und der Schnittkreis der **L** mit der Kugel gelangt in den Hauptkreis. Zieht man daher an diesen eine Tangente $\parallel MM_2$, bestimmt ihren Berührungspunkt $F''$ und ihre Schnittpunkte $G$ mit $MD$ und $F_2$ mit $DM_2$, so gelangen beim Zurückdrehen $F_2$ in $F_1$ auf $DM_1$, wenn $F_2F_1 \parallel CC''$, die $GF_2$ in die (zu $l$ parallele) $GF_1$ (so daß $G$ auch entbehrt werden kann), $F''$ nach $F$, wenn $F''F \parallel CC''$, so daß $MF$ und $M_1F_1$ die in der Ebene **L** liegenden Halbdurchmesser beider Schattengrenzen sind. Ihre konjugirten sind der schon bestimmte $MC''$ und dessen Schatten $M_1C_1$ auf $\mathbf{P}_1$. Man erhält den letzteren, wenn man $MC''$ mit $a$, also auch mit $\mathbf{P}_1$, in $E$ schneidet; dann ist $M_1E$ der Schatten von $MC''E$, und ihr Punkt $C_1$ der von $C''$, wenn $C''C_1 \parallel l$. — Aus den konjugirten Halbdurchmessern $MF$, $MC''$ und $M_1F_1$, $M_1C_1$ bestimmt man die Axen beider Kegelschnitte, und aus diesen verzeichnet man die Kurven.

## III. Perspektive.

**549.** Zur Konstruktion der Perspektive krummer Flächen ist diejenige krummer Linien notwendig. Diese werden im allgemeinen in bekannter Weise durch ihre Punkte und Tangenten in Perspektive gesetzt. Im besonderen können wesentliche Vorteile gewonnen werden; wir gehen aber in dieser Beziehung nur auf den

Kreis ein unter den in der Technik und Kunst vorkommenden Annahmen *).

*Aufg. Einen Kreis in Perspektive zu setzen.*

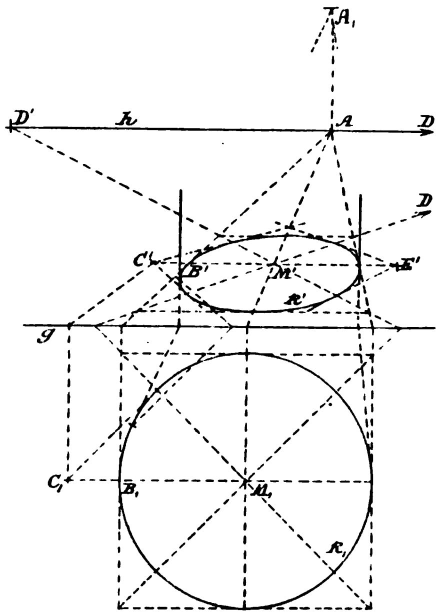
*Auflösung mittelst des umschriebenen regelmäßigen Achtecks* (vergl. I, 373).

*Erster Fall. Der Kreis liegt in einer horizontalen Ebene.* Der Fall, in welchem er in einer beliebigen auf der Bildfläche senkrechten Ebene liegt, unterscheidet sich von unserem Falle nur physisch, Fig. 290. nicht aber geometrisch. Seien wie in I, 537 ff. $h$ der Horizont, $A$ der Augenpunkt, $D, D'$ die Distanzpunkte, $g$ ($\| h$) die Grundlinie oder die Spur der Ebene $\mathrm{P}_1$ des Kreises $k$ in der Bildfläche $\mathrm{P}$, sei $k_1$ der um $g$ in die $\mathrm{P}$ umgelegte Kreis $k$, so beschreibe man um $k_1$ ein Quadrat durch parallele und senkrechte Tangenten zu $g$, ziehe seine Mittellinien und Diagonalen und setze diese Geraden in Perspektive durch Gerade, welche von ihren Spuren auf $g$ nach $A, D, D'$ gezogen werden, und durch Linien parallel zu $g$. Man erhält dadurch von der Abbildung $k'$ vier Punkte und in ihnen die Tangenten. Nun denke man sich noch um $k_1$ das zweite, gegen das erste um 45° gedrehte, umschriebene Quadrat gezeichnet; eine seiner Seiten schneidet den zu $g$ parallelen Durchmesser $M_1 B_1$ in $C_1$; von diesem Punkte suche man die Perspektive $C'$ auf $M' B'$, und dessen zu $M'$ symmetrischen Punkt $E'$. Die aus $C'$ und $E'$ nach $D$ und $D'$ gezogenen Geraden bilden das zweite Quadrat ab, und die

*) Es seien hier erwähnt die teilweise schon bei der „Geschichte der darstellenden Geometrie“ (I, 29 f., 36 ff.) angeführten Arbeiten: *Cousinery*, Géométrie perspective, 1828. *De la Gournerie*, Traité de perspective linéaire, 1859. *Tilscher*, System der Perspektive, 1867. *Koutny*, Konstruktion der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen in der Perspektive, unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 55, Abt. 2, 1867, S. 215). *Peschka* und *Koutny*, Freie Perspektive, 1868. *Pelz*, Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 75, Abt. 2, 1877); Ergänzungen hierzu (B. 77, Abt. 2, 1878); Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung (27. Jahresbericht der Oberrealschule in Graz, 1878); Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 79, Abt. 2, 1879); Zur Construction der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung (Sitzungsber. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., 1880). — Ich habe in den Fällen, in welchen Kegelschnitte gesucht werden, Konstruktionen gegeben, welche aus der Natur der Aufgabe irgend welche bestimmende Elemente derselben, meist konjugirte Durchmesser, liefern und aus diesen die Axen ermittelt, und glaube dadurch, wie bei der Parallelprojektion, Einfachheit in den Betrachtungen und in den Konstruktionen gewonnen zu haben.

schon gezogenen Geraden $M'D$, $M'D'$ geben ihre Berührungspunkte an. Aus den gewonnenen acht Punkten und Tangenten kann man nun die Ellipse zeichnen. Aus $M'B'$ läßt sich auch unmittelbar $C'$ konstruiren durch $M'C' = \sqrt{2}\, M'B'$. Man könnte auch leicht, wie in I, 373, die Abbildung des dem $k_1$ umschriebenen regelmäßigen Zwölfecks herstellen.

Fig. 220.




Es ist oft von Wichtigkeit, die auf $g$ senkrechten Tangenten genau zu zeichnen, z. B. dann, wenn eine Säule über $k$ steht. Um sie zu erhalten, benutzt man den mit $\mathbf{P}_1$ in die $\mathbf{P}$ umgelegten Grundriß $A_1$ des Auges (I, 544), der in der Senkrechten $AA_1$ zu $h$ in einem Abstande von $g$ liegt gleich der Distanz $AD$. Zieht man aus $A_1$ die Tangenten an $k_1$, schneidet sie mit $g$, und zieht aus den Schnittpunkten Senkrechte zu $g$, so sind dies die gesuchten Tangenten. Denn da der Punkt $A_1$, in welchem sich die Tangenten des $k_1$ schneiden, auf der Gegenaxe der $\mathbf{P}_1$ liegt (I, 304), so müssen sich die entsprechenden Tangenten der $k'$ in dem entsprechenden, d. h. auf dem Strahle $AA_1$ liegenden Punkte der unendlich fernen Geraden der Bildfläche $\mathbf{P}$ treffen. Die Berührungspunkte dieser Tangenten erhält man durch Hilfslinien, die man durch die Berührungspunkte des $k_1$ unter $90^0$ oder $45^0$ gegen $g$ zieht (hier genauer unter $45^0$).

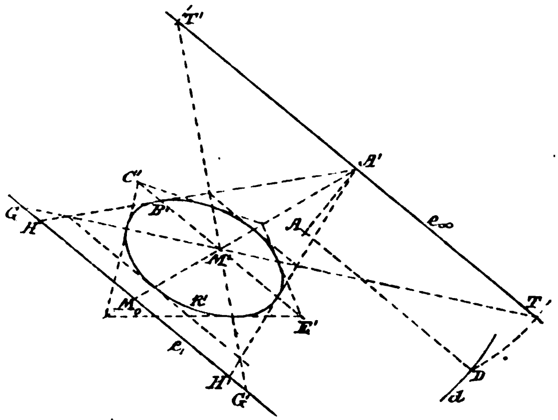
**550.** *Zweiter Fall. Der Kreis liegt in einer beliebigen Ebene.*

Seien $A$ der Augenpunkt, $d$ der Distanzkreis, $e_1$ die Spur, $e_\infty (\parallel e_1)$ die Fluchtlinie der Ebene des Kreises $k$, $M$ sein Mittelpunkt, $M_0$ Fig. 221. der Fußpunkt der von $M$ auf $e_1$ gefällten Senkrechten, so trage man auf $e_1$ die gegebene Länge $M_0M$ dieser Senkrechten als $M_0G = M_0G'$, und ebenso die gegebene Größe seines Halbmessers $= M_0H = M_0H'$ auf. — Der Fluchtpunkt der $MM_0$ ist dann der Fußpunkt $A'$ der aus dem Auge $O$ auf $e_\infty$ gefällten Senkrechten, und wird erhalten durch $AA' \perp e_\infty$; die Fluchtpunkte der unter $45^0$ gegen $e_1$ geneigten Geraden $MG, MG'$ werden auf $e_\infty$ in den zu $A'$ gehörigen

Teilungspunkten $T$, $T'$ erhalten durch $A'T = A'T' = A'O = A'D$, wenn die Parallele $AD$ zu $e_\infty$ den Distanzkreis $d$ in $D$ trifft.

Nun leuchtet ein, daß $M_0A'$, $HA'$, $H'A'$ die Abbildungen des Durchmessers und der Tangenten des $k$ sind, welche $\perp$ $e_1$ stehen, und $GT$ und $G'T'$ die der Diagonalen des umschriebenen Quadrates. Dadurch ergeben sich die Abbildungen $M'$ des $M$, diejenige $M'B'$ des mit $e_1$ parallelen Durchmessers, sowie diejenigen der mit $e_1$ parallelen Quadratseiten. Trägt man dann auf $M'B'$ die $M'C' = M'E' = \sqrt{2}\,M'B$ (die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $= M'B'$ sind) auf, und zieht aus $C'$, $E'$ Gerade nach $T$, $T'$, so erhält man auch von dem zweiten umschriebenen Quadrate die Seiten und Berührungspunkte.

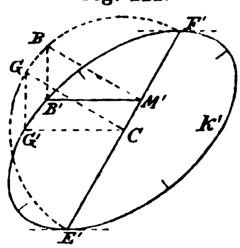
Fig. 221.




**551.** ***Konstruktion der Perspektive des Kreises k mittelst Bestimmung der Axen des abbildenden Kegelschnittes k'.*** Wir wollen hier nur den gewöhnlichen Fall durchführen, in welchem $k'$ eine Ellipse ist; in Bezug auf den Fall der Hyperbel oder der Parabel verweisen wir auf I, 383.

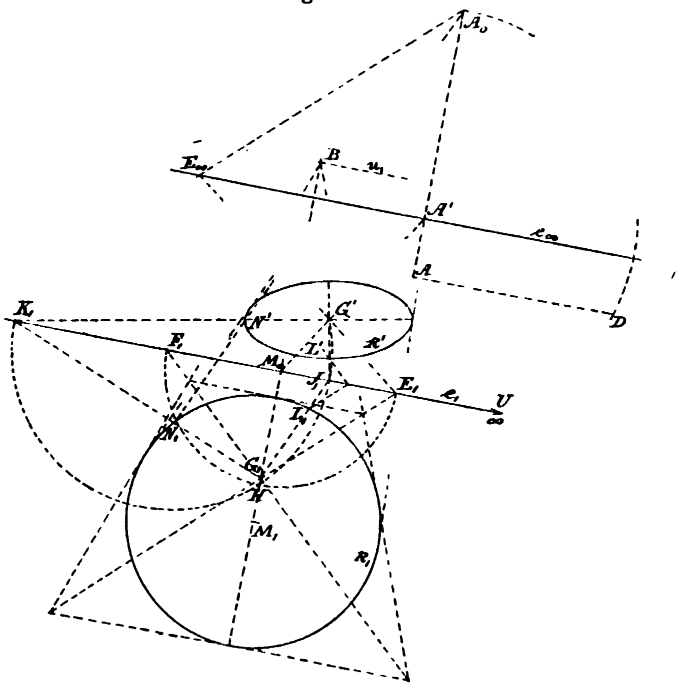
Fig. 222. *Erstes Verfahren.* Von der Ellipse $k'$ sei nach dem vorhergehenden Verfahren ein Durchmesser $E'F'$ mit seinen zu $g$ oder $e_1$ parallelen Endtangenten, darauf die Abbildung $M'$ des Kreismittelpunktes $M$ und die zu $E'F'$ konjugirte (mit jenen Tangenten parallele) Halbsehne $M'B'$ bestimmt, so ist die Mitte $C$ von $E'F'$ der Mittelpunkt der $k'$ und $CG' \parallel M'B'$ die Linie des konjugirten Halbdurchmessers. Seinen Endpunkt $G'$ erhält man durch die Affinität mit dem über $E'F'$ als Durchmesser gezeichneten Halbkreise, dessen Punkte $B$, $G$ denen $B'$, $G'$ entsprechen, wenn $M'B$ und $CG$ $\perp$ $E'F'$; $G'$ wird dann erhalten durch $GG' \parallel BB'$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $CE'$, $CG'$ bestimmt man die Axen (I, 377) und mittelst ihrer verzeichnet man die $k'$.

Fig. 222.



**552.** *Zweites Verfahren* (vergl. 116). Seien wie in Nr. 550 $e_1$ und $e_\infty$ die Spur und die Fluchtlinie der Ebene **E** des Kreises $k$, $A$ der Augenpunkt, $AD \parallel e_1$ die Distanz, $A'$ auf $e_\infty$ ($AA' \perp e_\infty$) der Fluchtpunkt der auf $e_1$ senkrechten Linien der **E**, so lege Fig. 223.

Fig. 223.



man die Ebene **E** und die mit ihr parallel durch das Auge $O$ geführte Ebene $Oe_\infty$ bezw. um $e_1$ und $e_\infty$ in gleichem Drehungssinne in die Bildfläche **P** um. Dabei gelange der Kreis $k$ in den Kreis $k_1$ (mit dem Mittelpunkte $M_1$), es gelangt $O$ in $A_0$, wobei $A'A_0 \perp e_\infty$ und $= A'D$. Der gesuchte Kegelschnitt $k'$ ist nun bestimmt als perspektiv-kollineare Figur zu $k_1$ mit $A_0$ und $e_1$ als Mittelpunkt und Axe der Kollineation, und mit $e_\infty$ als Gegenaxe in **P** (I, 304); die Gegenaxe der **E** ist $u_1$ ($\parallel e_1$), wenn Abst. $e_1 u_1 = -$ Abst. $A_0 e_\infty = A'A_0$. Da der $u_1$ der **E** die unendlich ferne Gerade $u$ der **P** entspricht, so entspricht dem Pole $G_1$ der $u_1$ zu $k_1$, der Pol der $u$ zu $k'$ oder deren Mittelpunkt $G'$. Man bestimme $G_1$, indem man aus zwei Punkten der $u_1$ die Tangenten an $k_1$ zieht, etwa aus dem unendlich fernen (zwei zu $e_1$ parallele Tangenten) und aus dem Schnittpunkte $B$ der $u_1$ mit der von $M_1$ auf $e_1$ gefällten Senkrechten $M_1 M_0$ (deren Fußpunkt $M_0$ ist). Der dem $G_1$ entsprechende Punkt $G'$ liegt auf dem Strahle $A_0 G_1$ und auf der Entsprechenden $M_0 A'$

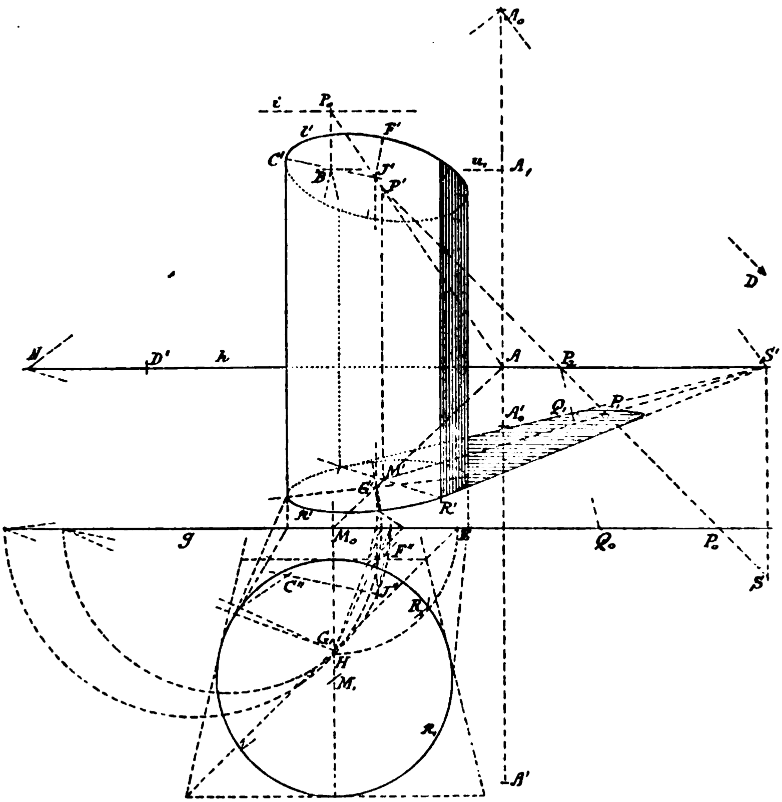
der $M_0 M_1$, sowie, wenn der Schnitt beider unsicher, auf der Entsprechenden $E_1 E_\infty$ einer anderen durch $G_1$ gezogenen Geraden $G_1 E_1$ ($A_0 E_\infty \parallel G_1 E_1$). Der Involution der durch $G_1$ gehenden in Bezug auf $k_1$ konjugirten Sehnen entspricht die Involution der durch $G'$ gehenden konjugirten Durchmesser (mit dem perspektiven Schnitte $e_1$). Als zwei Paare von Strahlen, welche die erstere Involution bestimmen, kann man $G_1 M_0$ und $G_1 U$ (wenn $U$ der unendlich ferne Punkt der $e_1$), sowie die beiden Diagonalen $G_1 E_1$, $G_1 F_1$ jenes dem $k_1$ umschriebenen Paralleltrapezes annehmen. Die durch sie eingeschnittene Involution auf $e_1$: $M_0$, $U$; $E_1$, $F_1$ wird auch durch eine rechtwinklige Involution aus dem Punkte $H$ projicirt, in welchem sich die über $M_0 U$ und über $E_1 F_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreise treffen, d. i. auch aus dem Schnittpunkte der Geraden $M_0 M_1$ mit dem aus $M_0$ durch $E_1$ (und $F_1$) gelegten Kreise. Dieselbe Punktinvolution auf $e_1$ wird aber auch die Involution $G'$ der konjugirten Durchmesser eingeschnitten. Man erhält nun die entsprechenden Rechtwinkelstrahlen, wenn man einen Kreis aus einem Punkte der $e_1$ durch $G_1$ und $G'$ legt. Derselbe schneide die $e_1$ in $J_1$, $K_1$; dann sind $G' J_1$, $G' K_1$ die Axenlinien des $k'$, und die Halbaxen $G' L'$, $G' N'$ werden aus Schnittpunkten $L_1$, $N_1$ der durch $G_1 J_1$, $G_1 K_1$ mit $k_1$ durch Strahlen aus $A_0$ oder durch Hilfslinien (so bei $L_1$) bestimmt.

**553.** *Aufg. Die Perspektive eines auf die Grundrißebene aufgestellten geraden Kreiscylinders mit seinen Schatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

Fig. 224. *Aufl.* Sind wieder $g$ die Grundlinie, $h$ der Horizont, $A$ der Augenpunkt, $A_0$ das aufgeklappte Auge, $D$, $D'$ die Distanzpunkte, $A_1$ der umgelegte Grundriß des Auges $O$, so daß Abstand $g A_1 = A A_0 = AD = AD' =$ der Distanz, und daß $A_1 B = u_1$ ($\parallel h$) die Gegenaxe des Grundrisses ist. Sei in der umgelegten Grundrißebene $k_1$ der Grundkreis des Cylinders, $M_1$ sein Mittelpunkt, so ist wieder $M_1 M_0 B \perp g$ gezogen, mit $g$ in $M_0$, mit $u_1$ in $B$ geschnitten, und dann sind mittelst des um $k_1$ beschriebenen Paralleltrapezes, wie in der vor. Nr., die Axen der Perspektive $k'$ des Grundkreises bestimmt. Dabei ist $G'$ der Mittelpunkt von $k'$ und $M'$ die Perspektive von $M_1$. Um die auf $g$ senkrechten Tangenten an $k'$, d. i. die Umrisse des Cylinders, genau zu verzeichnen, beachte man (549), daß sie durch die Schnittpunkte der aus $A_1$ an $k_1$ gezogenen Tangenten mit $g$ gehen. Zur Abbildung des oberen Grenzkreises $l$ des Cylinders ziehe man aus $M_0$, $M'$, $G'$ Senkrechte zu $g$ und trage auf der ersteren ($M_0 B$) die gegebene Höhe des Cylinders nach dem Maßstabe der Bildfläche $= M_0 P_0$ auf; dann schneidet die $P_0 A$ auf jenen

anderen Senkrechten die Punkte $P'$, $J'$ ein, welche bezw. die Abbildungen der Mittelpunkte des Kreises $l$, und der abbildenden Ellipse $l'$ sind, letzteres, weil $J'$ den in $P_0A$ liegenden Durchmesser der $l'$ halbirt. Um die Axen von $l'$ auf dieselbe Weise wie für $k'$ zu ermitteln, müßten wir die Ebene des $l$, deren Spur in **P** die durch $P_0 \parallel g$

Fig. 224.




gezogene $i$ ist, um $i$ in **P** umlegen; dabei käme $l$ nach dem (nicht verzeichneten) Kreise $l_1$, und es müßte in $M_0P_0$ ein dem $B$ entsprechender Punkt in einem Abstande von $P_0 = M_0B$ bezeichnet werden. Schieben wir aber die erhaltene Figur in der Richtung $A_0A_1$ herunter, bis $i$ nach $g$ gelangt, also um die Länge $P_0M_0$, so gelangt $l_1$ in $k_1$, jener dem $B$ entsprechende Punkt nach $B$, $A$ nach $A'$ und $A_0$ nach $A_0'$, wenn $AA' = A_0A_0' = P_0M_0$, und die an $l_1$ auszuführenden Konstruktionslinien gelangen in die an $k_1$ schon ausgeführten. Zugleich gelangt $J'$ nach $J''$ ($J'J'' \# P_0M_0$), dem Mittelpunkte der verschobenen Ellipse $l'$; und für diese konstruirt man die Axen $J''C''$, $J''F''$ mittelst des durch $H$ und $J''$ gelegten Kreises,

dessen Mittelpunkt auf $g$ liegt, schiebt sie nach $J'C'$, $J'F'$ hinauf und verzeichnet durch sie die $l'$.

**554.** Um nun die *Schatten* zu ermitteln, nehme man den Fluchtpunkt $S$ der Lichtstrahlen, d. i. auch die Abbildung des Sonnenmittelpunktes an; die Projektion $S'$ des $S$ auf $h$ ist dann der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen der Lichtstrahlen (I, 539). Der Schatten $P_1$ von $P$ auf die Grundrißebene ist der Schnittpunkt von $P'S$ mit $M'S'$. Der Schatten des Kreises $l$ auf $\mathbf{P}_1$ ist ein um $P_1$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser jenes Kreises beschriebener Kreis. Von seiner Abbildung erhält man eine zu $h$ parallele Halbsehne $P_1 Q_1$, wenn man eine passend durch $P_1$ gelegte Gerade, etwa $P_1 S$ mit $g$ in $P_0$ und mit $h$ in $P_2$ schneidet, auf $g$ die $P_0 Q_0$ gleich dem Kreishalbmesser $M_1 R_1$ aufträgt, und $Q_0 P_2$ mit $P_1 Q_1$ in $Q_1$ schneidet. Durch Linien aus $P_1$, $Q_1$ und dem in Bezug auf $P_1$ symmetrischen Punkte des $Q_1$ nach $A$, durch Linien aus $P$ nach $D$ und $D'$, und durch zwei Parallele zu $g$ erhält man die Abbildung eines um den Kreis beschriebenen Quadrates, und dies genügt zur Verzeichnung der Ellipse in unserem Falle, wo sie so schmal ist. In anderen Fällen könnte man noch das zweite Quadrat abbilden oder die Axen konstruiren. — Die beiden aus $S'$ an $k'$ gelegten Tangenten müssen auch die Ellipse $(P_1)$ berühren und sind die *Schlagschattengrenzen* des Cylinders. Die *Eigenschattengrenzen* gehen durch ihre Berührungspunkte auf $k'$, wie $R'$, und liegen auf dem zum Grundriß der Lichtstrahlen senkrechten Durchmesser $M'N$, wenn $N$ auf $h$ als Fluchtpunkt dieser Senkrechten durch $A_0 N \perp A_0 S'$ bestimmt wird. Man könnte auch $R'$ aus seinem Grundrißpunkte $R_1$ ermitteln durch $M_1 R_1 \perp A_0 S'$, $R'$ auf $R_1 A_0$.

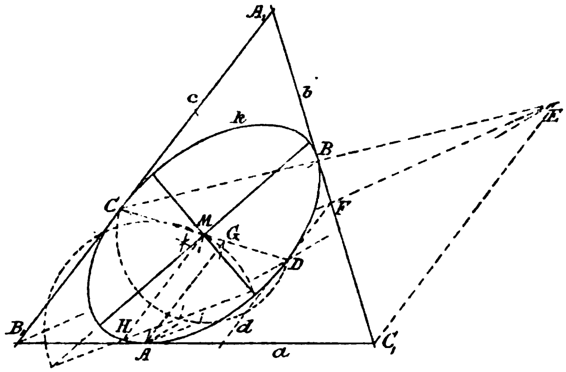
**555.** Zum Folgenden haben wir die Auflösung nötig von folgender

*Aufg. Aus fünf gegebenen Punkten oder Tangenten eines Kegelschnittes seine Axen zu bestimmen.* In I, 378 wurde eine Auflösung gegeben; die hier gegebene schließt sich mehr den gegenwärtigen Konstruktionen an.

*Aufl.* Man bestimme zuerst nach dem Satze von Pascal oder Brianchon in dreien der Punkte die Tangenten bezw. auf dreien der Tangenten die Berührungspunkte. Man könnte auch von drei Tangenten $a$, $b$, $c$ und ihren Berührungspunkten $A$, $B$, $C$ fünf Stücke willkürlich annehmen, und das sechste nach I, 325, 3) herleiten.
Fig. 225. Seien etwa die $a$, $b$, $c$, welche das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ bilden, sowie $B$, $C$ gegeben, so wird $A$ dadurch bestimmt, daß $AA_1$ durch den Schnittpunkt von $BB_1$ und $CC_1$ geht. Nun ermittle man die zu $c$ paral-

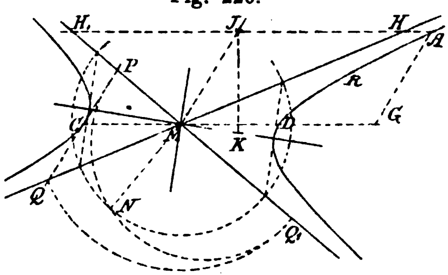
lele Tangente $d$ nach I, 381, indem man den unendlich fernen Punkt der $c$ mit $C_1$ verbindet, diese Linie mit $BC$ in $E$, dann $B_1E$ mit $b$ in $F$ schneidet und durch $F$ die $d \parallel c$ zieht; ihr Berührungspunkt $D$ liegt auf $AE$. Nun ist $CD$ ein Durchmesser und sein Mittelpunkt $M$ auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes $k$. Dieser kann jetzt aus dem Durchmesser $CD$, seinen Endtangenten $c$, $d$, und durch einen weiteren seiner Punkte, etwa $A$ (den entfernteren von $C$ und $D$) bestimmt werden, indem man zunächst die Ordinate $AG \parallel c$ bis $G$ auf $CD$ zieht.

Fig. 225.




Der Kegelschnitt $k$ ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn bezw. $G$ auf der endlichen Strecke $CD$, oder auf der unendlichen $C.D$, oder wenn $C$ oder $D$ im Unendlichen liegt. Im ersteren Falle wird von der *Ellipse* der konjugirte Halbdurchmesser $MH$ (551) in der in der Figur angegebenen Weise bestimmt, und daraus werden die Axen ermittelt (I, 377). — Im zweiten Falle werden von der *Hyperbel* Fig. 226.
die Asymptoten nach dem auch für schiefe Koordinaten geltenden Verfahren der Nr. I, 371 bestimmt, indem man $MJ \parallel GA$ und $AJ \parallel CD$ zieht, beide Linien in $J$ schneidet, $JK \perp JA$ und $= MC$ macht, und $H$ und $H_1$ auf $JA$ durch $KH = KH_1 = JA$ bestimmt; $MH$ und $MH_1$ sind dann die Asymptoten. Nun ermittelt man die Excentricität $e$, indem man die Tangente in $C$ ($\parallel GA$) mit den Asymptoten in $P$ und $Q$ schneidet; dann ist $e^2 = MP \cdot MQ = MN$ (I, 365), wenn man an $PM$ die $MQ_1 = MQ$ angesetzt, über $PQ_1$ als Durchmesser einen Halbkreis beschrieben und dessen auf $PQ_1$ senkrechte Ordinate $MN$ gezeichnet hat. Der aus $M$ durch $N$ gezogene Kreis (geht durch die Brennpunkte und) schneidet auf den Asymptoten Punkte ein, unter deren Verbindungslinien zweier sich die beiden Scheiteltangenten befinden.

Fig. 226.

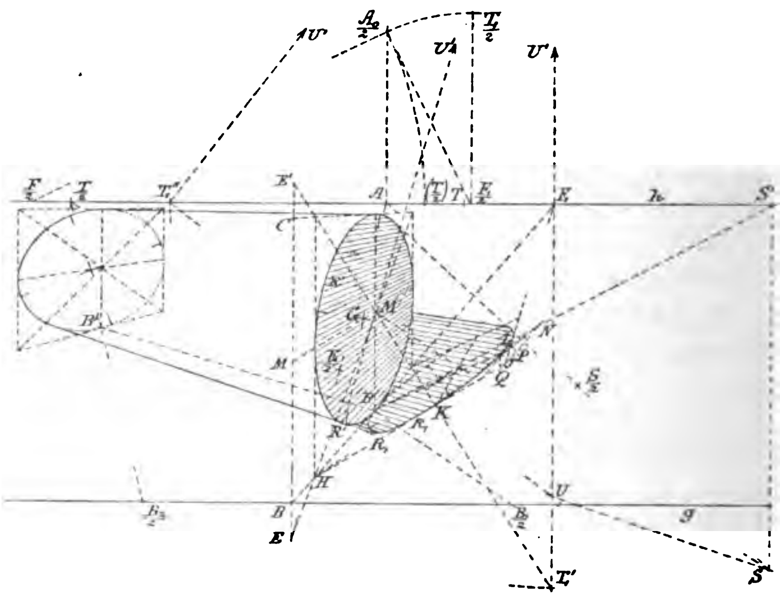


Die Axen zeichnet man dann senkrecht und parallel zu diesen Tangenten. — Wird in Fig. 225 $B_1E \parallel b$, so fallen $F$, $d$, $D$ ins Unendliche, die Kurve wird eine *Parabel*, ihre Axe ist mit $AE$ parallel und wird nach I, 380 bestimmt.

**556.** *Aufg. Die Perspektive eines auf die Grundrißebene geneigt gegen die Bildfläche aufgelegten geraden Kreiscylinders mit seinen Schatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

Fig. 227. *Aufl.* Sind wieder $g$ die Grundlinie, $h$ der Horizont, $A$ der

Fig. 227.



Augenpunkt, ist ferner $\frac{A_0}{2}$ das reducirte umgeklappte Auge (I, 542), wobei $A\frac{A_0}{2} \perp h$ und $= \frac{1}{2}$ Distanz, ist $\frac{A_0}{2}\frac{F}{2}$ parallel zu dem Grundrisse der Erzeugenden des Cylinders, so bildet $\frac{F}{2}$ den reducirten Fluchtpunkt, während der Fluchtpunkt $F$ durch $AF = 2 \,.\, A\frac{F}{2}$ bestimmt ist. Zieht man $\frac{A_0}{2}\frac{F_1}{2} \perp \frac{A_0}{2}\frac{F}{2}$, und macht $AF_1 = 2 \,.\, A\frac{F_1}{2}$, so ist $F_1$ der Fluchtpunkt der (auf den Erzeugenden senkrechten) Grundrißlinie der Grundfläche des Cylinders. Sei $BMC \perp g$ die Spur dieser Grundfläche in der Bildfläche P, $B$ in $g$, $BM = MC$ = dem Halbmesser des Grundkreises $k$, so sind $BF_1$, $CF_1$, $MF_1$ die Abbildungen der horizontalen Tangenten und der horizontalen Mittellinie des Grundkreises. Der Teilungskreis zu $F_1$ ist der aus

$F_1$ als Mittelpunkt durch $A_0$ oder mit dem Halbmesser $2 \cdot \frac{F_1}{2}\frac{A_0}{2}$ beschriebene Kreis; er schneidet den Horizont $h$ in dem Teilungspunkte $T_1''$ und die zu $h$ Senkrechte $F_1 T_1'$ in $T_1'$ und in dem nicht erreichbaren Punkte $T_1$. Den letzteren ersetzt man durch den auf $AT_1$ liegenden reducirten Teilungspunkt $\frac{T_1}{2}$, indem man die zu $h$ Senkrechte $\frac{F_1}{2}\frac{T_1}{2}$ mit dem aus $\frac{F_1}{2}$ durch $\frac{A_0}{2}$ gezogenen Kreise in $\frac{T_1}{2}$ schneidet. Trägt man nun den Abstand des Mittelpunktes des Grundkreises von dem Punkte $M$ der P auf $BC$ als $ME$ und $ME'$ auf, so bestimmen $ET_1$, $E'T_1'$ auf $MF_1$ die Abbildung $M'$ dieses Mittelpunktes, bilden die Diagonalen des dem Kreise $k$ umschriebenen aufrechten Quadrates, schneiden daher auf $BF_1$, $CF_1$ die Eckpunkte der Abbildung dieses Quadrates ein, so daß man seine auf $g$ senkrechte Seiten ziehen kann. Um aus $E$ die nach dem nicht erreichbaren Punkte $T_1$ gehende Gerade zu ziehen, trage man auf $AE$ die $A\frac{E}{2} = \frac{1}{2} AE$ auf; dann ist $ET_1 \parallel \frac{E}{2}\frac{T_1}{2}$. $MF_1$ enthält nun einen Durchmesser der abbildenden Ellipse $k'$ des $k$; seine Mitte $G$ ist der Mittelpunkt der $k'$, und man bestimmt nach 551 den zu $MF_1$ konjugirten Halbdurchmesser und daraus die Axen der $k'$. Der Auflagerungspunkt ist $B'$ auf $BF_1$ ($M'B' \perp g$).

Zum perspektiven Abtragen der Länge des Cylinders könnte man den zum Fluchtpunkte $F$ gehörigen, auf $h$ liegenden Teilungspunkt $T$ benutzen, welcher durch $FT = FA_0$ bestimmt ist und durch $AT = 2 \,.\, A\left(\frac{T}{2}\right)$ konstruirt wird, wenn in übereinstimmendem Sinne $\frac{F}{2}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{F}{2}\frac{A_0}{2}$ gemacht wurde. Da aber der Raum zum Abtragen der Längenmaße nicht ausreicht, so benutze man den reducirten Teilungspunkt $\frac{T}{2}$, bestimmt durch $F\frac{T}{2} = \frac{1}{2} FT$, konstruirt durch $\frac{F}{2}\frac{T}{2} = A\left(\frac{T}{2}\right)$. Um nun auf der Auflagerungserzeugenden $B'B''$ ihre Länge perspektiv abzuschneiden, ziehe man $\frac{T}{2}B'$ bis $\frac{B_1}{2}$ auf $g$, trage auf $g$ in dem zur Erstreckungsrichtung des Cylinders gehörigen Sinne dessen halbe Länge als $\frac{B_1}{2}\frac{B_2}{2}$ auf, so bestimmt $\frac{B_2}{2}\frac{T}{2}$ auf $B'B''$ den Endpunkt $B''$. Mittelst seiner bildet man das dem zweiten Grundkreise umschriebene aufrechte Quadrat ab, und bestimmt wieder daraus die Axen der abbildenden Ellipse.

**557.** Zur *Schattenbestimmung* nehme man $S$ und $S'$ als Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrisse an. Den *Schlagschatten*

$k_1$ des Grundkreises $k$ ermittelt man aus dem in bekannter Weise konstruirten Schatten des dem $k$ umschriebenen Quadrates und seiner Mittellinien. Die Axen der Ellipse $k_1$ konstruirt man, wenn ihre Größe es lohnt, und zwar nach Nr. 555, wobei wir uns auf das umschriebene Dreieck $F_1HJ$ mit den Berührungspunkten $B'$, $K$, $L$ seiner Seiten stützen wollen, dessen Linien $HJ$ und $B'L$ nach $S'$ laufen. Wir ziehen $JN \parallel HF_1$ bis $N$ auf $B'L$, $HN$ bis $P$ auf $JF_1$, $PQ \parallel HF_1$, $KN$ bis $Q$ auf $PQ$, so ist $B'Q$ ein Durchmesser; aus ihm, seinen Endtangenten $HF_1$, $PQ$, und dem Punkte $K$ bestimmen wir dann die Axen.

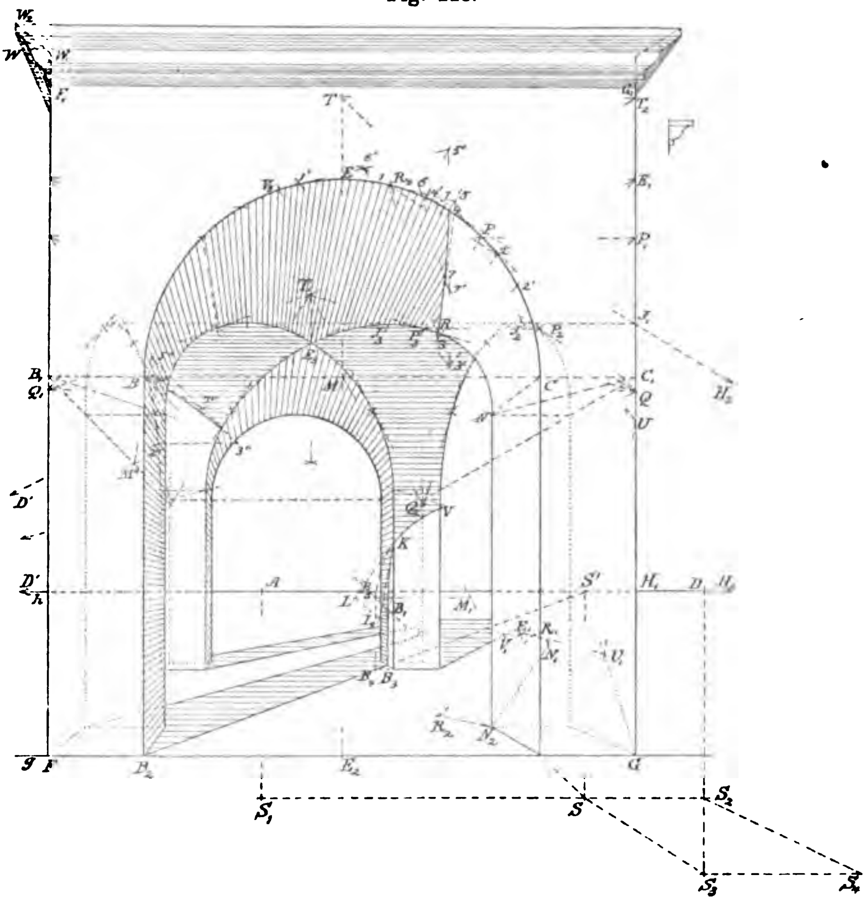
Die *Eigenschattengrenzen* des Cylinders sind diejenigen Erzeugenden desselben, nach welchen er von Ebenen berührt wird, die parallel zu den Lichtstrahlen liegen. Die Fluchtlinie dieser Ebenen ist die Verbindungslinie der Fluchtpunkte $F$ und $S$ der bestimmenden Geraden $\left(FS \parallel \frac{F}{2}\frac{S}{2}\right.$ durch $\left.S\right)$; die Fluchtlinie der Grundkreisebene ist $F_1T_1'$, und der Schnittpunkt $U$ beider Linien ist der Fluchtpunkt der Schnittlinien der beiderlei Ebenen. Der Durchmesser des Grundkreises, welcher senkrecht auf diesen Schnittlinien steht, hat daher $U'$ zum Fluchtpunkte, wenn $T_1''$ der vorhin bestimmte zu $F_1$ gehörige auf $h$ liegende Teilungspunkt ist, und wenn $U'$ auf $F_1U$ durch $T_1''U' \perp T_1''U$ bestimmt wird. Denn nach $T_1''$ gelangt das Auge $O$ bei der Umlegung der Ebene $OF_1T_1'$ in **P**. Der unerreichbare Punkt $U'$ könnte leicht durch $\frac{U'}{2}$ ersetzt werden. Der in $M'U'$ abgebildete Kreisdurchmesser bestimmt dann die Berührungspunkte auf $k'$, wie $R'$; $R'F$ ist dann eine Eigenschattengrenze. Der Schlagschatten $R_1$ von $R$ kann auf $k_1$ ermittelt werden; durch ihn geht die *Schlagschattengrenze* des Cylinders. Den Schlagschatten des zweiten Grenzkreises kann man wie den des ersten ermitteln. Häufig genügt die Verzeichnung eines kleinen Stückes; in unserem Falle ist er ganz verdeckt.

558. *Aufg. Ein Kreuzgewölbe in gerader Stellung gegen die Bildfläche in Perspektive zu setzen und die darin auftretenden Schatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Ein Kreuzgewölbe wird gebildet durch zwei sich durchdringende Tonnengewölbe (mit cylindrischen Wölbungsflächen), welche dieselbe Anfangsebene und gleiche Höhen besitzen. In unserem Falle mögen die Gewölbaxen auf einander senkrecht stehen, und die senkrechten Schnitte beider Wölbungsflächen (gleiche) Halbkreise bilden. Das Kreuzgewölbe liegt dann über einem Quadrate, die Schnittlinien der Wölbungsflächen, das sind die Gratlinien des Kreuzgewölbes,

projiciren sich in die Diagonalen des Quadrates und sind halbe Ellipsen. Die Eckpfeiler seien ebenfalls quadratisch, und der ganze Bau freistehend als doppelter Durchgang behandelt, um den Lichtstrahlen und der Schattenkonstruktion mehr Raum zu geben. Die Fig. 228.

Fig. 228.




Bildfläche **P** sei in die vordere Frontfläche gelegt; sie zeigt von der entgegenstehenden Wölbungsfläche den begrenzenden *Halbkreis* $BEC$ mit seinem Mittelpunkte $M$, sowie die Frontflächen zweier Pfeiler und zwei Eckkanten $FF_1$, $GG_1$. Der Augenpunkt $A$ liege im Inneren der Öffnung, $h$ sei der Horizont, $D$, $D'$ die Distanzpunkte, $g$ die Grundlinie. Schneidet man die Linie des Anfangsdurchmessers $BC$ des Fronthalbkreises mit den Eckkanten in $B_1$, $C_1$, so bestimmen die aus $B$, $C$, $B_1$, $C_1$ nach $A$, und die aus $B_1$, $C_1$ nach $D$ und $D'$ gezogenen Linien die in der Anfangsebene des Gewölbes liegenden Quadrate; von ihren Eckpunkten zieht man dann

die Kanten der Pfeiler abwärts und begrenzt sie durch die entsprechenden nach $A$ laufenden Linien der durch $g$ gehenden Grundrißebene.

Der *Halbkreis* in der hinteren Fläche bildet sich als Halbkreis ab, die Halbkreise in den Seitenflächen und die elliptischen *Gratlinien* als Ellipsen, die man mittelst horizontaler Hilfsebenen erhält, welche man durch Punkte des Frontkreises, wie durch $P$, legt. Eine solche schneidet die Frontebene in $PP_1 \parallel h$, eine Eckkante in $P_1$, eine Seitenfläche in $P_1A$, die (vertikale) Diagonalebene einer Gratlinie in $P_1D'$, die entgegenstehende Wölbungsfläche in $PA$, so daß der Schnittpunkt $P_3$ von $P_1D'$ und $PA$ einen Punkt einer Gratlinie, und der Schnittpunkt $P_2$ der noch zu ziehenden $PD$ mit $P_1A$ einen Punkt des Seitenkreises abbildet; denn $PP_2$ muß parallel mit einer Diagonale der horizontalen Quadrate sein. Zudem besteht die Probe $P_2P_3 \parallel h$, weil diese Linie eine Schnittgerade jener Hilfsebene mit der querstehenden Wölbungsfläche darstellt. Auf diese Weise erhält man durch jede horizontale Hilfsebene vier Punkte der seitlichen Ellipsen und vier der Gratlinien. Zugleich bemerkt man, daß in der Abbildung die Seitenkreise und die Gratlinien perspektiv-kollinear mit dem Frontkreise sind, mit den Eckkanten als Axen und bezw. mit $D$, $D'$, $A$ als Mittelpunkten der Kollineation.

**559.** Die *Tangenten der Kurven* in den konstruirten Punkten erhält man aus der Kreistangente in $P$; diese schneide man mit einer Eckkante $GG_1$ in $Q$ und mit dem vertikalen Halbmesser $ME$ des Fronthalbkreises in $T$. Dann gehen die Tangenten einer Seitenellipse in $P_2$ und die einer Gratlinie in $P_3$ durch den Punkt $Q$ der Kollineationsaxe $GG_1$, und die Tangenten in den anderen Punkten jener Kurven, die in der Horizontalebene von $P$ liegen, gehen durch die Punkte $Q_1, \ldots$ der anderen Eckkanten, welche in der Horizontalebene von $Q$ liegen. Schneidet man andererseits die $TA$ mit der vertikalen Mittellinie des ganzen Baues, welche durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates der Anfangsebene geht, in $T_1$, so gehen durch $T_1$ die Tangenten in den vier Punkten der Gratlinien, wie in $P_3$. Doch erhält man $T_1$ genauer durch $TT_2 \parallel h$ bis zu $T_2$ auf $GG_1$, und $T_2D'$ bis $T_1$ auf jener Mittellinie.

Im Ganzen genügen drei horizontale Hilfsebenen, die schon gelegte Anfangsebene, die Ebene durch den Kreisscheitel $E$, und eine durch die Mitten der Viertelkreise $BE$, $CE$, wie durch $P$. In den Kurvenpunkten der ersten Ebene laufen die Tangenten vertikal, in denen der zweiten laufen sie in den Seitenellipsen nach $A$, in den in einem Doppelpunkte $E_3$ zusammenfallenden Punkten der Gratlinien nach $D$ und $D'$.

Die scheinbar höchste Erzeugende oder den scheinbaren Umriß der queren Wölbungsfläche erhält man durch eine an dieselbe aus dem Auge $O$ gelegte Berührungsebene. Dieselbe enthält eine durch $O$ parallel zu $h$ gelegte Gerade, und diese schneidet eine Seitenfläche in einem Punkte $H$, dessen Projektion auf die Bildfläche **P** der Schnittpunkt $H_1$ von $h$ mit der Eckkante $GG_1$ ist. Legt man nun aus $H$ eine Tangente an den Seitenkreis, welche den Kreis in $J'$ berührt und die $GG_1$ in $J_1$ schneidet, so ist die $\parallel h$ durch $J_1$ gezogene Gerade die gesuchte scheinbar höchste Erzeugende $J_1J_2$. Man erhält diese Punkte am besten, wenn man die Seitenfläche um $GG_1$ in **P** umlegt; dabei kommt der Seitenkreis in den Frontkreis, $H$ kommt nach $H_2$ auf $h$, wenn man auf $h$ im Sinne von $AH_1$ die $H_1H_2 = AD$ aufträgt. Die Tangente aus $H_2$ an den Frontkreis berührt diesen in $J$ und schneidet die $GG_1$ in $J_1$. Beim Zurückdrehen gelangt die Tangente $J_1J$ nach $J_1J_2$, $J$ nach $J_2$ auf $JD$; und auf $J_1J_2$ erhält man die vier Berührungspunkte dieser Geraden mit den vier verzeichneten Ellipsen, so noch $J_3$.

Auf diese Weise erhält man für jede der vier halben Ellipsen sechs Punkte mit den Tangenten und kann durch Anlegen des Kurvenlineals zwischen zwei benachbarte Punkte unter Beachtung des Sinnes der Zunahme der Krümmung die Kurve sehr gut zeichnen. Die etwa noch auftretende Unstetigkeit der Kurven ist dann durch die Ungenauigkeit der konstruirten Elemente verursacht. Wir wollen nachher auch die Axen ermitteln.

**560.** Soll bei den *Schattenbestimmungen* der Lichtstrahl so angenommen werden, daß der Schatten des Anfangspunktes $B$ des Frontkreises in den gewählten Punkt $B_1$ einer Seitenfläche des diagonal gegenüberstehenden Pfeilers fällt, so ist $BB_1$ ein Lichtstrahl und $B_2B_3$ sein Grundriß, wenn $B_2$ der Fußpunkt der Pfeilerkante $BB_2$, und $B_3$ der Fußpunkt der Vertikalen $B_1B_3$ auf der Grundlinie jener Seitenfläche ist. Die Gerade $B_2B_3$ bestimmt dann auf $h$ den Fluchtpunkt $S'$ der Grundrisse der Sonnenstrahlen, und $BB_1$ auf der Vertikalen aus $S'$ den Fluchtpunkt $S$ der Sonnenstrahlen.

Um zuerst den Schatten des Frontkreises auf die Frontfläche jenes gegenüberstehenden Pfeilers zu erhalten, schneidet man $B_2S'$ mit der (Verlängerung der) Grundlinie dieser Fläche in $B_4$, und die durch $B_4$ gezogene Vertikale mit $BS$ in $B_5$, so ist $B_5$ der Schatten von $B$. Ebenso ist $M_1$ der von $M$, wenn $B_5M_1 \parallel h$ und $M_1$ auf $MS$. Der gesuchte Schatten des Frontkreises ist dann der aus $M_1$ durch $B_5$ gelegte Kreis, wovon nur das kleine Stück $KV$ auf der Frontfläche bis zu den Grenzkanten ausgezogen wird. Der Schatten auf die Seitenfläche des Pfeilers ist der elliptische Bogen $B_1K$,

dessen Tangente in $B_1$ vertikal und in $K$ die $KL_1$ ist, woraus er genügend bestimmt erscheint. Um einen Punkt $L_1$ von $KL_1$ zu ermitteln, beachte man, daß die Schatten aller mit $h$ parallelen Linien auf Ebenen, parallel zu den Seitenflächen des Bauwerkes, den Punkt $S_1$ zum Fluchtpunkte haben. Denn die Lichtstrahlenebene einer solchen Kante hat die Verbindungsgerade $SS_1$ des $S$ mit dem Fluchtpunkte der Kante (unendlich fern auf $h$) zur Fluchtlinie, und jene Seitenfläche die Vertikale $AS_1$; der Schnittpunkt $S_1$ beider ist daher jener Fluchtpunkt (I, 539). Schneidet man nun die Tangente des aus $M_1$ durch $B_5$ (und $K$) gezogenen Kreises in $K$ mit $M_1B_5$ in $L$, so ist der Schatten von $MB$ und von $M_1B_5$ auf die fragliche Pfeilerseitenfläche die $B_1S_1$ (welche die $B_5M_1$ auf einer Pfeilerkante trifft), und ihr Schnittpunkt $L_1$ mit $LS$ ist der Schatten von $L$.

**561.** Suchen wir sodann den *Schatten des Frontkreises in die entgegenstehende Wölbungsfläche.* Wir legen durch einen Punkt 1 des Kreises den Lichtstrahl $1S$, durch diesen parallel zu den Erzeugenden (Fluchtpunkt $A$) der Wölbungsfläche eine Ebene; ihre Fluchtlinie ist $AS$. Diese Ebene schneidet daher die Front- und Bildfläche P in der zu $AS$ Parallelen $1\,2$, sie schneidet den Frontkreis noch in 2 und jene Wölbungsfläche in $2A$, deren Schnittpunkt 3 mit $1S$ der gesuchte Schatten von 1 ist. Der Grenzpunkt des Schlagschattens liegt offenbar im Berührungspunkte 4 des Frontkreises mit einer Parallelen zu $AS$, d. i. in dem zu $AS$ senkrechten Halbmesser $M4$. (Man bestimmt zuerst 4, dann $4\,2 = 1\,4$.) — Der Schatten des Kreises in die Wölbungsfläche ist ein Kegelschnitt. Denn sie ist die Schnittlinie des Wölbungscylinders mit dem Lichtstrahlencylinder; und da beide schon den Frontkreis gemein haben, so ist der zweite Ast ihrer Schnittkurve, d. i. jener Schatten, ebenfalls ein Kegelschnitt. Derselbe ist im Raume affin mit dem Frontkreise, weil sich beide durch die parallelen Lichtstrahlen auf einander projiciren; in der Perspektive sind beide kollinear mit $S$ als Mittelpunkt und mit $M4$ als Axe der Kollineation. Daher schneiden sich die Tangenten der Kurven in ihren entsprechenden Punkten 1 und 3 in dem Punkte 5 der $M4$, wodurch die Tangente $3\,5$ bestimmt ist; und schneidet man die Kreistangente in 4 mit $1\,5$ in 6, projicirt 6 aus $S$ auf $3\,5$ in 7, so ist $4\,7$ die Kurventangente in 4. Daraus kann man den Bogen $4\,3$ überaus genügend genau zeichnen; derselbe wird bis zum Punkte $R$ einer Gratlinie ausgezogen. Dabei wählt man 1 so, daß 3 nahe bei dieser Gratlinie liegt.

Den gleichartigen Schatten an der dem $S$ gegenüberliegenden Seitenfläche könnte man dort unmittelbar in entsprechender Weise

bestimmen, wobei an die Stelle der parallelen Geraden 1 2 solche mit dem Fluchtpunkte $S_1$ treten würden. Genauer aber erhält man denselben, wenn man den Bau um die Eckkante $FF_1$ so gedreht denkt, daß der Seitenkreis in den Frontkreis gelangt. Um dabei den Lichtstrahl in gleichem Sinne um $90^0$ zu drehen, denke man sich den Strahl durch $OS_1$ ($O$ das Auge) und durch $S_1S$ bestimmt. Die $OS_1$ kommt durch die Drehung in die Richtung $AS_2$, wenn $SS_2 \parallel h$, $DS_2 \perp h$, und $AS_2$ ist die gedrehte Projektion eines Lichtstrahles auf die Seitenfläche. Denkt man sich einen derartigen Lichtstrahl durch ein Auge $O_1$ gelegt, welches von jener Seitenfläche des Baues einen Abstand gleich der Distanz $AD$ besitzt, und welches $(O_1)$ bei der Drehung um $FF_1$ nach $O$ gelangt, so ergibt sich die Tiefe der Spur jenes durch $O_1$ geführten Lichtstrahles in der Seitenfläche unter dem Horizonte gleich $DS_3$, wenn $S_3$ auf $AS$ und auf $DS_2$. Nach der Drehung liegt daher jene Spur in $AS_2$ und in der Parallelen $S_3S_4$ zu $h$. Der Schnittpunkt $S_4$ beider Linien ist dann der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen für die Konstruktion des Schattens nach der Drehung. Nun bestimmt man bei entsprechenden Ziffern $4'$ durch $M4' \perp AS_4$, $4'2' = 1'4'$, $3'$ auf $2'A$ und $1'S_4$, Kreistangente $1'5'$ bis $5'$ auf $M4'$, $3'5'$, Kreistangente $4'6'$ bis $6'$ auf $1'5'$, $7'$ auf $3'5'$ und $6'S_4$, $4'7'$. Dreht man zurück, so gelangen durch Strahlen nach $D'$, $4'$ und $2'$ auf die Seitenellipse nach $4''$, $2''$; $3''$ liegt auf $2''3'' \parallel h$ und auf $3'D'$, $M''$ auf $B_1A$ und $MD'$, $5''$ auf $M''4''$ und $5'D'$, dann $3''5''$, $7''$ auf $3''5''$ und auf $7'D'$, endlich $4''7''$. Die Tangente der Seitenellipse in $4''$ läuft nach $S_1$.

Der *Schlagschatten auf die Bodenfläche*, der von der vorderen Öffnung herrührt, ist begrenzt zunächst durch den Schatten $N_2N_1$ der Pfeilerkante $N_2N$, und den Schatten $N_1R_1$ des Bogens $NR$. Ist $R_2$ der Grundriß von $R$ (auf einer Diagonale des Grundquadrates), so liegt $R_1$ auf $RS$ und auf $R_2S'$. Die Tangente in $R_1$ geht durch den Schatten $U_1$ des Schnittpunktes $U$ der Tangente an die Gratlinie in $R$ mit der Eckkante, und dieser wird durch den Frontkreis bestimmt. Die durch $R$ und $V$ aus $S$ rückwärts gezogenen Strahlen schneiden den Frontkreis in $R_3$ und $V_3$, und der Schatten des Bogens $R_3V_3$ fällt auf die Bodenfläche in $R_1V_1$. Man bestimme noch den Schatten $E_1$ des zwischenliegenden Scheitels $E$, in welchem die Tangente $\parallel h$ läuft. Dadurch ist der Bogen $R_1E_1V_1$ meist genügend bestimmt, dessen Endtangenten nötigenfalls aus denen in $R_3$, $V_3$ zuzufügen wären. — Ebenso bestimmt man die von der anderen Öffnung herrührenden Schatten auf den Boden, sowie die der oberen Baubegrenzung.

**562.** Die *Deckplatte* werde von der Frontfläche in dem Profil $F_1 W_1 W$ (rechts gesondert gezeichnet) durchschnitten, wobei $F_1 W_1$ auf der Eckkante $FF_1$ liegt. Durch $W$ geht eine Kante $WA$, deren Grenzpunkt $W_2$ in der Diagonal- oder Gehrungsebene durch $W_1 D$ bestimmt wird. Sowie $W_2$ werden auch die übrigen Eckpunkte der Gehrungslinie ermittelt, so daß man diese Linie mit Hilfe ihrer horizontalen, in der Abbildung nach $D$ laufenden Tangenten verzeichnen kann. Durch ihre Eckpunkte zeichnet man die Kanten der Deckplatte einerseits parallel zu $h$ und andererseits laufend nach $A$.

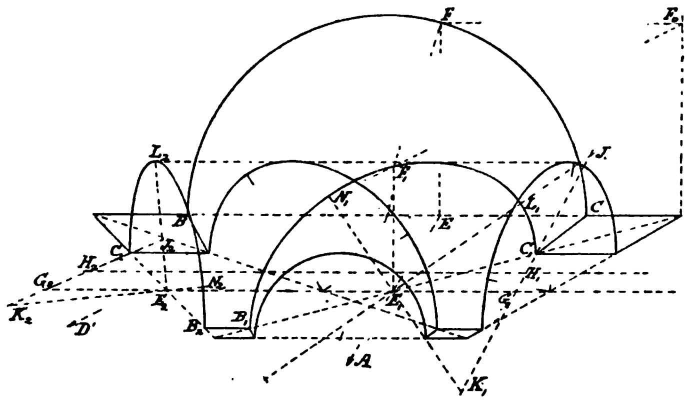
Die *Schatten* an der Deckplatte, welche von den zu $h$ parallelen Kanten herrühren, erhält man (I, 545) mittelst der durch sie gehenden Lichtstrahlenebenen, deren Fluchtlinie $SS_2$ ist. Die Fluchtlinie der Gehrungsebene ist $DS_2$; folglich ist $S_2$ der Fluchtpunkt der Schnitte jener Lichtstrahlenebene mit der Gehrungsebene. An die Gehrungslinie zeichnet man daher die streifenden und berührenden Linien nach $S_2$ und bestimmt ihre Schnittpunkte mit der Gehrungslinie. Durch sie und durch die Berührungspunkte laufen dann die mit $h$ parallelen Schattengrenzen an den vorderen Flächen der Deckplatte. — Die Lichtstrahlenebenen der nach $A$ laufenden Kanten haben $AS$ zur Fluchtlinie, deren Schnittpunkt $S_3$ mit der Fluchtlinie $DS_2$ der Gehrungsebene der Fluchtpunkt der Schnittlinien dieser Lichtstrahlenebenen mit der Gehrungsebene ist. Mittelst ihrer bestimmt man auch die an den Seitenflächen der Deckplatte vorkommenden nach $A$ laufenden Schattengrenzen. — Zieht man dann noch aus den Eckpunkten der Gehrungslinie die Lichtstrahlen nach $S$, und schneidet sie mit den jedesmal zugehörigen Schattenlinien auf den vorderen oder auf den seitlichen Flächen der Deckplatte, so erhält man noch Schattenpunkte der Gehrungslinie, welche mit den auf der Gehrungslinie liegenden Grenzen der anderen Schattenlinien verbunden werden müssen. Diese Linien liegen in der Figur auf den seitlichen Flächen und sind nicht bemerkbar.

**563.** *Verzeichnung der bei der Perspektive des Kreuzgewölbes vorkommenden Ellipsen mittelst der Axen.*

Fig. 229. Bildet man die in der Anfangsebene des Gewölbes liegenden Quadrate wie vorher ab, wodurch die in dieser Ebene liegenden Durchmesser $B_1C_1$, $B_2C_2$ ... jener Ellipsen, entsprechend demjenigen $BC$ des Frontkreises, bestimmt sind, so halbire man den größten $B_1C_1$ dieser Durchmesser in $E_1$, ermittle die vertikale Ordinate $E_1F_1$ der Ellipse aus der entsprechenden $EF$ des Frontkreises, wobei $E$ auf $E_1A$, $F_1$ auf $FA$ liegen, und letztere genauer aus dem Punkte $F_0$ einer Eckkante bestimmt wird, wenn $FF_0 \parallel h$, $F_1$ auf $F_0D'$ liegt. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $E_1C_1$, $E_1F_1$ be-

stimmt man die Axen, indem man (I, 377) $E_1G_1 \perp E_1F_1$ und $=$ $E_1F_1$ zieht, $G_1C_1$ in $H_1$ halbirt und auf $G_1C_1$ die $H_1J_1 = H_1K_1 = H_1E_1$ aufträgt; $E_1J_1$ und $E_1K_1$ sind dann die Linien der Axen, und die Halbaxen sind bezw. $E_1L_1 = G_1J_1$ und $E_1N_1 = G_1K_1$. —

Fig. 229.



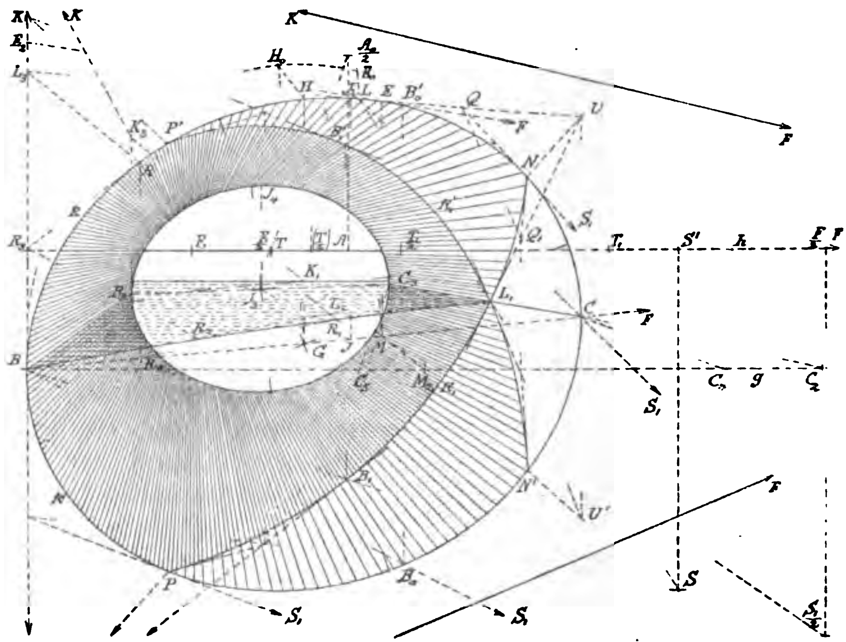
Für die gleichartigen Konstruktionen der anderen Ellipsen hat man die Erleichterungen, daß $E_1E_2$ .. und $H_1H_2$ .., sowie die gedachte Linie $F_1F_2$ .. $\parallel h$, und daß $E_2G_2 = E_1G_1 = E_1F_1$, weil $E_2F_2 \#$ $E_1F_1$. Doch muß immerhin die Halbirung der $B_2C_2$ durch $E_1E_2$ (in $E_2$), sowie die von $C_2G_2$ durch $H_1H_2$ (in $H_2$) geprüft werden. Die weiteren Konstruktionen für die verschiedenen Ellipsen sind unabhängig von einander. Es muß auch die Probe zutreffen, daß die vier Halbellipsen eine gemeinschaftliche mit $h$ parallele Tangente besitzen.

**564.** *Aufg. Ein Brückengewölbe in schiefer Stellung gegen die Bildfläche mit den an demselben bei Parallelbeleuchtung auftretenden Schattengrenzen, mit der Grenze der Reflexbeleuchtung und mit den Spiegelbildern in Perspektive zu setzen.*

*Aufl.* Sei $g$ die Grundlinie und die Spur der Wasserfläche $\mathbf{P}_1$, $h$ der Horizont, $A$ der Augenpunkt, $\frac{A_0}{2}$ das reducirte umgeklappte Auge, schneide die Stirnfläche der Brücke die $g$ in $B$ und die Bildfläche $\mathbf{P}$ in $BE_2$ ($\perp g$), und habe ihre Grundlinie den außerhalb der Zeichenfläche liegenden Punkt $F$ (auf $h$) zum Fluchtpunkte, wobei ihre Richtung durch $\frac{A_0}{2}\frac{F}{2}$ bestimmt ist und $AF = 2 \cdot A\frac{F}{2}$ gedacht wird. Da das Gewölbe ein gerades sein soll, so haben die Erzeugenden den Punkt $F_1$ der $h$ zum Fluchtpunkte, bestimmt durch $\frac{A_0}{2}\frac{F_1}{2} \perp \frac{A_0}{2}\frac{F}{2}$, $AF_1 = 2 \cdot A\frac{F_1}{2}$. Den zu $F$ gehörigen Teilungspunkt $T$ der Grund- Fig. 230.

linie der Stirnfläche bestimmt man auf $h$ durch $\frac{F}{2}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{F}{2}\,\frac{A_0}{2}$ und $AT = 2 \cdot A\left(\frac{T}{2}\right)$; und entsprechend den zu $F_1$ gehörigen $T_1$ der Erzeugenden durch $F_1 T_1 = 2 \cdot \frac{F_1}{2}\,\frac{A_0}{2}$, und den reducirten $\frac{T_1}{2}$ durch $F_1\frac{T_1}{2} = \frac{F_1}{2}\,\frac{A_0}{2}$. Die Anfangsebene der Wölbungsfläche $\mathbf{F}$ liege im Wasserspiegel $\mathbf{P}_1$; durch diese Annahme erhält man zusammenhängende Kurven, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Auf der

Fig. 230.



Grundlinie $BF$, welche man mittelst $\frac{F}{2}$ verzeichnet (556), trägt man die Spannweite $BC$ des Gewölbes perspektiv auf, indem man diese Länge nach dem Maßstabe der Bildfläche auf $g$ als $BC_2$ aufträgt und $C_2T$ mit $BF$ in $C$ schneidet. Halbirt man $BC_2$ in $M_2$, so bestimmt $M_2T$ auf $BC$ die Abbildung $M$ der Mitte. Die Leitlinie der Wölbungsfläche in der Stirnfläche, d. i. die Stirnkurve sei eine halbe Ellipse von der Höhe $BE_2$ ($\perp g$); die Abbildung ihrer vertikalen Halbaxe ist dann $ME$ ($\perp g$), wenn $E$ auf $E_2F$. Da die Tangenten der Abbildung $k$ dieser Kurve in $B$ und $C$ vertikal stehen, so ist $BC$ ein Durchmesser der Ellipse $k$, deren Axen nach Nr. 551 gefunden werden. Man halbirt nämlich $BC$ in $G$, beschreibt aus

$G$ einen Halbkreis durch $B$ (und $C$), schneidet ihn mit den $\perp BC$ gezogenen $ME_0$, $GH_0$ in $E_0$, $H_0$, zieht die $GH \perp g$ und bestimmt auf ihr den Punkt $H$ durch $H_0H \parallel E_0E$. Aus den konjugirten Halbdurchmessern $GB$, $GH$ ermittelt man dann die Axen der $k$ (I, 377).

Die Anfangserzeugenden der Wölbungsfläche **F** sind $BF_1$, $CF_1$, und man trägt auf $CF_1$ perspektiv die Länge $CC_3$ der Erzeugenden auf, indem man, wegen Raummangels den reducirten Teilungspunkt $\frac{T_1}{2}$ benutzend, $C\frac{T_1}{2}$ bis $C_4$ auf $g$ zieht, $C_4C_5$ auf $g$ gleich der halben Erzeugenden macht und $C_5\frac{T_1}{2}$ mit $CF_1$ in $C_3$ schneidet; $BF_1$ und $C_3F$ treffen sich dann in $B_3$. Zur Bestimmung von konjugirten Halbdurchmessern $J_3B_3$, $J_3J_4$ (letztere $\perp g$) zieht man aus der Mitte $J_3$ der $B_3C_3$ die $J_3F_1$ bis $J$ auf $BC$, $JJ_2 \perp g$ bis $J_2$ auf der $k$ (die man nach ihrer Verzeichnung aus den Axen sehr gut als Grundlage für die Konstruktion benutzen kann), zieht $J_2F_1$ bis $J_4$ auf $J_3J_4$; daraus zeichnet man die Axen und die Ellipse. — Die Annahmen sind so gemacht, daß der Fluchtpunkt $F_1$ der Erzeugenden im Inneren der Abbildung der Stirnkurve liegt, damit man in das Innere des Gewölbes sieht.

Die obere vordere *Grenzkante* der Stirnfläche ist $KF$, wenn man ihre Höhe über $\mathbf{P}_1$ auf $BE_2$ als $BK$ aufgetragen hat, und die hintere Grenzkante ist $K_3F$, wenn $K_3$ auf $KF_1$ und auf $B_3K_3$ ($\perp g$) liegt.

**565.** In Bezug auf die *Spiegelung* beachte man, daß ein auf eine spiegelnde Fläche fallender Lichtstrahl derart zurückgeworfen wird, daß der *Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel* ist, und daß die Ebenen beider in einander fallen; diese Winkel sind aber bezw. die Winkel des ein- und des ausfallenden (zurückgeworfenen) Strahles mit der Normale der spiegelnden Fläche im Einfallspunkte. Die gerade Linie des zurückgeworfenen Strahles geht daher durch den Symmetriepunkt eines jeden Punktes des einfallenden Strahles in Bezug auf die Berührungsebene der spiegelnden Fläche im Einfallspunkte. Gehen nun alle einfallenden Strahlen von demselben Punkte $P$ aus, der ein selbstleuchtender oder ein das auffallende Licht zerstreuender Punkt, also ein Punkt einer nicht spiegelnden Körperoberfläche sein kann, und ist der Spiegel eben, so gehen die Linien aller zurückgeworfenen Strahlen von dem zu $P$ in Bezug auf die Spiegelebene **S** symmetrischen Punkte $P'$ aus, und es ist, abgesehen von einer Lichtschwächung, die Wirkung der Spiegelung eines Punktes, daher auch eines ganzen Körpers **K** ebenso, wie wenn ein zu **K** in Bezug auf **S** symmetrischer Körper **K**′ durch eine Öffnung betrachtet würde, welche die Stelle des ausgedehnten Spiegels einnimmt.

Das durch die Wasserfläche $\mathbf{P}_1$ hervorgebrachte *Spiegelbild der Wölbungsfläche* $\mathbf{F}$ ist das Bild der zur Wölbungsfläche in Bezug auf die Ebene $\mathbf{P}_1$ symmetrische Cylinderfläche $\mathbf{F}'$; und da $\mathbf{P}_1$ eine Hauptebene des Cylinders $\mathbf{F}$ bildet, welche also zu der Senkrechten zu $\mathbf{P}_1$ konjugirt ist, so setzen sich $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$ zu einem vollen Cylinder zusammen, dessen Perspektive durch Ergänzung der beiden halben Stirnellipsen durch ihre anderen Hälften, so der $k$ durch $k'$, gezeichnet wird.

**566.** Zur Bestimmung der *Schatten* sind $S$ und $S'$ ($S'$ auf $h$, $SS' \perp h$) als Fluchtpunkte der Sonnenstrahlen und ihrer Grundrisse angenommen. Der *Schatten der Stirnellipse $k$ in die Wölbungsfläche* $\mathbf{F}$ wird mittelst Hilfsebenen bestimmt, welche zum Lichtstrahle und zu den Erzeugenden der $\mathbf{F}$ parallel sind, deren Fluchtlinie daher die Verbindungslinie $SF_1$ der Fluchtpunkte $S$ und $F_1$ dieser beiderlei Linien ist. Solche Hilfsebenen schneiden die Stirnfläche in parallelen Linien, deren Fluchtpunkt der Schnittpunkt $S_1$ der Fluchtlinien $SF_1$ und $FS_1$ der beiderlei Flächen sind, wobei $FS_1 \perp h$ steht. Da $F$ und $S_1$ nicht erreichbar, so bestimmt man den reducirten Fluchtpunkt $\frac{S_1}{2}$ in der Mitte von $AS_1$ als Schnitt von $\frac{F_1}{2}\frac{S_1}{2}$ ($\parallel F_1S$) und $\frac{F}{2}\frac{S_1}{2}$ ($\perp h$).

Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte $L$ der $k$ den Lichtstrahl $LS$, legt durch denselben eine der bezeichneten Hilfsebenen, so schneidet diese die Stirnfläche in der vermittelst $\frac{S_1}{2}$ zu verzeichnenden Geraden $LS_1$, diese trifft die $k$ in einem Punkte $C$, die Hilfsebene trifft die $\mathbf{F}$ in $CF_1$, und diese wird vom Lichtstrahle $LS$ im Schatten $L_1$ von $L$ geschnitten. Indem von $C$ durch $S_1C$ rückwärts nach $L$ gegangen wurde, erhielt man den Schatten $L_1$ auf der Anfangslinie der $\mathbf{F}$. Es möge hier sogleich der später sich als notwendig erweisende Schatten der $k$ und $k'$ in die $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$ gezeichnet werden. Seine Endpunkte auf der $k$ ergeben sich, wenn die Sehne $LC$ zu einem Punkte wird, d. i. in den Berührungspunkten $N$, $P$ der aus $S_1$ an die Ellipse gezogenen Tangenten (zu bestimmen durch konjugirte Sehnen). $NP$ ist die Polare von $S_1$ und könnte auch durch zwei schneidende Strahlen aus $S_1$ und ein vollständiges eingeschriebenes Viereck erhalten werden. Man bestimme so noch den Schatten $B_1$ von $B$ durch $BS_1$ bis $B_0$ auf $k'$, $B_0F_1B_1$, $BS_1B_1$.

Der Schatten $NL_1B_1P = k_1$ von $(k + k')$ in die volle Cylinderfläche $(\mathbf{F} + \mathbf{F}')$ ist ein Kegelschnitt, welcher mit $(k + k')$ perspektiv ist mit $S$ als Mittelpunkt und $NP$ als Axe der Kollineation (vergl. 559). Man findet daher die Tangente $L_1U$ an $k_1$ in $L_1$,

wenn man die Tangente an $k$ in $L$ mit $NP$ in $U$ schneidet und $L_1 U$ zieht; ebenso die Tangente $NQ_1$ an $k_1$ in $N$, wenn man die Tangente $NQ$ an $k$ in $N$ bis $Q$ auf $LU$ zieht, $QS$ mit $L_1 U$ in $Q_1$ schneidet und $NQ_1$ zeichnet. Entsprechend in $B_1$ und $P$. Mit diesen vier Punkten und Tangenten kann man $k_1$ genügend sicher zeichnen.

Der *Schatten* $k_2$ *von* $k$ *auf die Wasserfläche* $\mathbf{P}_1$ ist ein Kegelschnitt $BL_1$. Seine Tangente in $B$ ist der Schatten $BS'$ der vertikalen Tangente $BK$ des $k$. Die Tangente des $k_2$ in $L_1$ erhält man, wenn man die Tangente des $k$ in $L$ mit der $BK$ in $L_3$ schneidet, $L_3 S$ bis $L_2$ auf $BS'$, und dann $L_1 L_2$ zieht. Ebenso bestimmt man noch den Schatten $R_1$ eines Zwischenpunktes $R$ des $k$, indem man $RR_0 \perp g$ bis $R_0$ auf $BF$ zeichnet, und $R_0 S'$ mit $RS$ in $R_1$ schneidet; endlich die Tangente $R_1 R_2$ wie vorher durch den Linienzug $RR_3 R_2 R_1$. — Der Schatten der oberen hinteren Grenzkante ist $K_1 F$, wenn $K_1$ auf $K_3 S$ und auf $B_3 S'$.

**567.** Durch Zurückwerfung der Lichtstrahlen auf der Wasserfläche $\mathbf{P}_1$ findet eine *Reflexbeleuchtung der Wölbungsfläche* $\mathbf{F}$ statt, deren Grenze bestimmt werden soll. Die Lichtstrahlen, welche die Stirnkurve $k$ gestreift haben und in Punkten der $k_2$ die $\mathbf{P}_1$ treffen, werden hier zurückgeworfen und treffen die $\mathbf{F}$ in Punkten der Grenzlinie $k_1'$ der Reflexbeleuchtung. Die geraden Verlängerungen der in $k_2$ die $\mathbf{P}_1$ treffenden Lichtstrahlen sind symmetrisch in Bezug auf $\mathbf{P}_1$ zu den zurückgeworfenen Strahlen, und die Schnittlinie der ersteren mit der $\mathbf{F}'$ ist daher symmetrisch zur Reflexgrenze $k_1'$. Die erstere Linie ist aber der schon gezeichnete Schatten $k_1$ von $k$ in die $\mathbf{F}'$, als deren Symmetriekurve man $k_1'$ konstruirt, indem man $B_0 B_0' \perp g$ bis $B_0'$ auf $k$ zieht, dann $B_1 B_1' \perp g$ und $B_0' F_1$ bis $B_1'$ auf $B_1 B_1'$. So entsteht der Bogen $L_1 B_1'$ aus $L_1 B_1$.

Von $B$ an ändert sich der Vorgang; die Lichtstrahlen treffen hier zuerst die Wasserfläche $\mathbf{P}_1$, werden von derselben zurückgeworfen, streifen den $k$ und erzeugen auf der $\mathbf{F}$ die Fortsetzung der Reflexgrenze $k_1'$. Die Symmetrielinien dieser zurückgeworfenen Strahlen sind (nach $S$ laufende) Lichtstrahlen, streifen den $k'$ und erzeugen auf der $\mathbf{F}'$ die Fortsetzung $B_1 P$ der $k_1$, so dafs man auch $B_1' P'$ symmetrisch zu $B_1 P$ zu bestimmen hat.

Die *Spiegelbilder der physischen Schattengrenze* $NL_1$ *und der Reflexgrenze* $L_1 P'$ sind die Bilder der Symmetriekurven dieser Linien, dabei $L_1 P$ der Schatten der $(k + k')$ in die $\mathbf{F}'$. Daher besteht der ganze Schatten $k_1$ von $(k + k')$ in die $(\mathbf{F} + \mathbf{F}')$ aus dem physischen Schatten $NL_1$ der bezeichneten Art und aus dem Spiegelbilde $L_1 P$ der Reflexgrenze, und die Symmetriekurve $k_1'$ von $k_1$ aus dem Spiegelbilde $N'L_1$ der physischen Schattengrenze und aus der Reflex-

grenze $L_1P'$. Die $k_1'$ kann man auch unmittelbar als Schlagschatten der $(k + k')$ in $(\mathbf{F} + \mathbf{F}')$ konstruiren mit Umkehrung der Lichtstrahlen in ihre in Bezug auf $\mathbf{P}_1$ symmetrischen, oder mit Verlegung von $S$ in den zu ihm in Bezug auf $h$ (und $S'$) symmetrischen Punkt.

**568.** Der verzeichnete *Schatten auf der Wasserfläche* ist nicht sichtbar, wenn das Wasser vollkommen klar ist. Dies zeigt der Versuch. Füllt man nämlich ein Gefäß mit klarem Wasser und läßt einen Schatten darauf fallen, so sieht man denselben an der Wand des Gefäßes herunter unter die Oberfläche steigen und auf den Boden übergehen; man sieht aber keinen Schatten auf der Wasserfläche, während das Spiegelbild des schattenwerfenden Körpers bei entsprechender Augenstellung sichtbar ist. Man erblickt an einer Stelle der Wasserfläche zugleich die Bilder gespiegelter Gegenstände, und diejenige von Gegenständen, die unter der Oberfläche liegen. Weil aber die Stärke der Spiegelung mit dem Ein- und Ausfallswinkel der Lichtstrahlen zunimmt (I, 479), die Stärke des die Oberfläche (von innen her) durchdringenden Lichtes aber mit zunehmendem (Brechungs- oder) Ausfallswinkel abnimmt, so sieht man bei kleinem Ausfallswinkel oder steilem Aufschauen auf die Oberfläche allein oder vorherrschend den Boden des Gefäßes, bei zunehmendem Ausfallswinkel vorherrschend oder allein die gespiegelten Gegenstände, bis bei totaler Reflexion von einzelnen Stellen des Bodens gar keine Lichtstrahlen mehr von diesen in das Auge gelangen. Im letzteren Falle, und wegen zu geringer Lichtstärke auch schon vorher, kann der auf den Boden fallende Schatten nicht mehr gesehen werden. — Aus diesen Beobachtungen folgt, daß die zusammenhängende, insbesondere die ruhige Oberfläche des Wassers das auffallende Licht nicht zerstreut, daß sie also ein *vollkommener Spiegel* ist; sie wirft es vielmehr entweder spiegelnd zurück oder läßt es eindringen.

Anders ist es bei *unvollkommenen Spiegeln.* Trübt man das Wasser, etwa durch aufgeschwemmten Thon, so sieht man einen Schatten auf der Oberfläche, indem die festen Teilchen das auffallende Licht zerstreuen, so daß von jedem Standpunkte aus die Oberfläche auf beiderlei Seiten einer Schattengrenze ungleich hell erscheint, oder daß der Schatten sichtbar ist. Nun haben Bäche und Seeen gewöhnlich eine Trübung, die mit der Stelle und mit der Zeit wechselt. Der Bodensee z. B. ist an seinen Ufern recht merklich trübe, in seiner Mitte nicht auffallend, aber doch in dem Grade, daß eine fünf Meter unter die Oberfläche getauchte weiße Scheibe zu Zeiten nicht mehr wahrgenommen wird. Der Verfasser beobachtete nun, daß mitten auf diesem See bei Sonnenschein der Schatten des Schiffes unter

Umständen schwach sichtbar war, unter anderen gar nicht. Er war sichtbar, wenn man die Sonne im Rücken hatte, er war nicht sichtbar, wenn man sie vor sich hatte, ohne daß sie dem Beobachter ins Gesicht schien. Es war dies eine Folge des Weberschen Gesetzes, wonach in Bezug auf den Gesichtssinn ein Unterschied der Helligkeiten zweier scheinbar benachbarten Stellen nur dann empfunden wird, wenn dieser Unterschied mehr als ein gewisser verhältnißmäßiger Teil der Helligkeit einer dieser Stellen beträgt. Diese Bruchzahl ist nach Versuchen des Verfassers unter Umständen nicht kleiner als $\frac{1}{60}$ (vergl. I, 477, 1)), kann aber unter anderen günstigen Umständen nach Versuchen von Helmholtz auch $\frac{1}{150}$ sein. Nun ist der Himmel in der Nähe der Sonne vielmals heller als auf der gegenüberstehenden Seite, so daß die Helligkeit, welche das durch die Trübung zerstreute Sonnenlicht besitzt, im Versältniß zur Helligkeit des Spiegelbildes des dunkleren Himmelteils mehr als $\frac{1}{60}$, im Verhältniß zu der des helleren aber weniger als $\frac{1}{60}$ betragen kann, woraus sich die obige Erscheinung erklärt. — Das Entsprechende findet man bei einem gewöhnlichen, durch einen Beleg mit Zinnamalgam hergestellten Spiegel, der sich als wenig vollkommen erweist. Ein auf ihn fallender Schatten ist sichtbar, wenn sich an der Schattengrenze ein dunklerer Gegenstand spiegelt, nicht sichtbar, wenn ein hellerer.

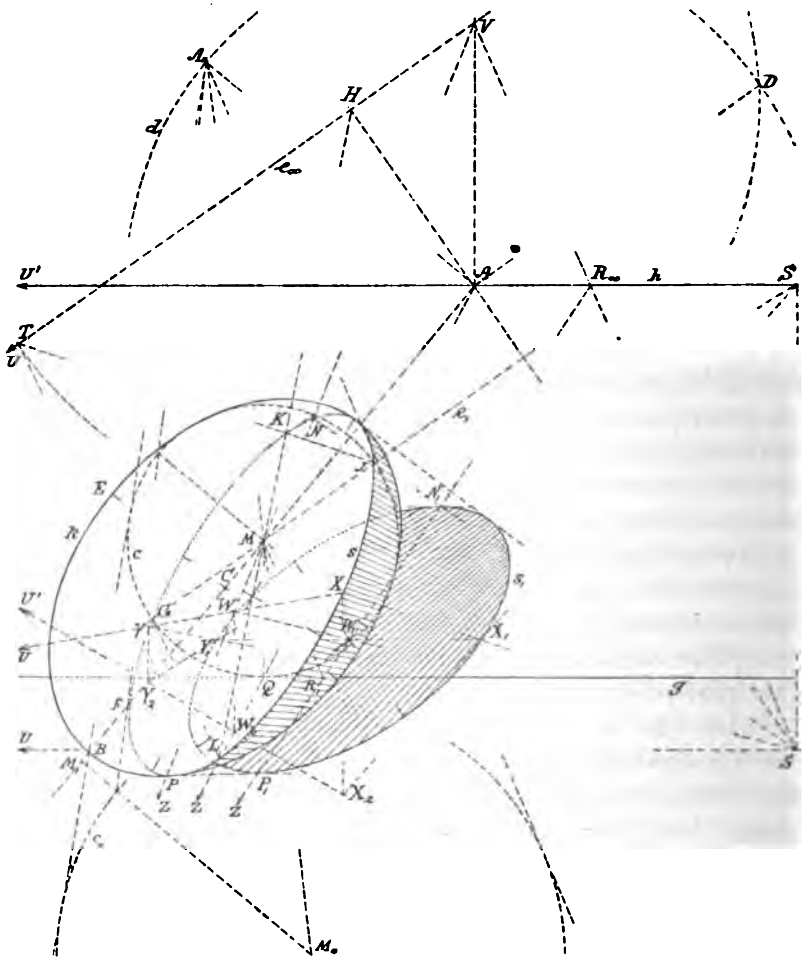
In der Zeichnung ist der Schatten auf die Wasserfläche an der Stelle schwach angedeutet, wo sich der Himmel spiegelt, an den Stellen stärker, wo sich Schattenteile des Gewölbes spiegeln.

**569.** *Aufg. Die Perspektive einer Kugel und ihres Schattens bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

*Aufl.* Sei $A$ der Augenpunkt, $d$ der Distanzkreis, $M_1$ die senkrechte Projektion des Mittelpunktes der Kugel auf die Bildfläche P, und seien dessen Abstand von P und der Halbmesser der Kugel gegeben. Die Perspektive der Kugel ist der Kegelschnitt $k$, in welchem die P den (Umdrehungs-)Kegel trifft, der aus dem Auge $O$ der Kugel umschrieben wird, und die Hauptaxe von $k$ liegt in der auf P senkrechten Meridianebene des Kegels, d. i. in der $\perp$ P durch $AM_1$ geführten Ebene. Legt man diese Ebene in die P um, so gelangt $O$ in den Punkt $A_0$ des $d$, wenn $AA_0 \perp AM_1$, und der Kugelmittelpunkt nach $M_0$, wenn $M_1M_0 \perp AM_1$ und gleich dem gegebenen Abstande des Kugelmittelpunktes von P, und wenn $M_1M_0$ in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne wie $AA_0$ aufgetragen wird, je nachdem der Kugelmittelpunkt auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von P wie $O$ liegt. Zeichnet man nun aus $M_0$ als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser der Kugel einen Kreis $c_0$, den größten Kugelkreis in der umgelegten Fig. 281.

Ebene, zieht an ihn aus $A_0$ die beiden Tangenten und den Strahl $A_0 M_0$, so schneiden diese Linien die $A M_1$ bezw. in den beiden *Scheiteln der Hauptaxe* von $k$, so in $B$, und in der Abbildung $M$ des Kugelmittelpunktes.

Fig. 231.



Zeichnet man ferner aus $M$ als Mittelpunkt einen Kreis $c$, welcher jene beiden aus $A_0$ gezogenen Tangenten, so $A_0 B$, berührt, und denkt sich diesen Kreis als größten Kreis einer zweiten Kugel, der *Hilfskugel*, deren Mittelpunkt $M$ in der Bildfläche P liegt, so ist diese demselben Kegel eingeschrieben und besitzt dieselbe Perspektive $k$, wie die gegebene Kugel; für sie ist $c$ sowohl die Spur in P als der umgelegte größte Kreis in der Ebene $OAM_1$. Es ist vorteilhaft, die gegebene Kugel durch die Hilfskugel zu ersetzen

und wir dürfen das für alle weiteren Konstruktionen thun, wenn wir die anderen gegebenen Gegenstände, so den Boden, auf welche die Kugel aufgelegt ist und den Schatten wirft, sowie die Lichtquelle, durch neue solche Gebilde ersetzt, welche perspektiv-ähnlich mit den gegebenen liegen und mit ihnen $O$ zum Ähnlichkeitspunkte und $A_0M : A_0M_0$ zum Ähnlichkeitsverhältnisse haben. Die Grundlinie $g$ wird dann die untere mit dem Horizonte $h$ parallele Tangente des $c$, während die Lichtquelle als unendlich fern im Unendlichen bleibt.

Die *Brennpunkte* des $k$ sind die Abbildungen der beiden Punkte der Kugel, in welchen sie von Ebenen berührt wird, welche zu **P** parallel sind (I, 329, vergl. II, 547). Man erhält sie, wenn man den zu $AM_1$ senkrechten Durchmesser des $c$ (oder des $c_0$) zieht und seine Endpunkte aus $A_0$ auf $AM_1$, so in $F$, projicirt. Die Nebenaxe geht durch die Mitte $C$ der Hauptaxe; für ihre Scheitel, wie $E$, gilt $FE = CB$.

**570.** Man bemerkt, daß *die Perspektive k einer Kugel ein Kegelschnitt ist, dessen Hauptaxe durch den Augenpunkt A geht.* Er ist eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem die Kugel keinen Punkt mit der Verschwindungsebene ($\parallel$ **P** durch $O$) gemein hat, sie berührt oder schneidet. Im letzteren Falle ist nur derjenige Hyperbelast physisch vorhanden, welcher einen vor dem Auge $O$ liegenden Teil der Kugel abbildet; und dieser Fall kommt z. B. dann vor, wenn man eine Landschaft von einer kugelförmigen Gebäudekuppel aus abbildet, wobei der Umriß der Kuppel die Grenze des Landschaftsbildes ausmacht und sich hyperbolisch darstellt. Gewöhnlich ist $k$ eine Ellipse; dieselbe wird ein Kreis, wenn der nach dem Kugelmittelpunkte gehende Sehstrahl $\perp$ **P** steht, d. i. auch wenn die Abbildung $M$ des Kugelmittelpunktes im Augenpunkte $A$ liegt. Ist aber $AM = m$, die Distanz $AO = d$, und der Winkel $AOM = \alpha$, und ist die Kugel unendlich klein, so daß die berührenden Sehstrahlen parallel sind, so gilt für die Axen $a$ und $b$ der Ellipse $k$

$$\frac{b}{a} = \cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + m^2}}.$$

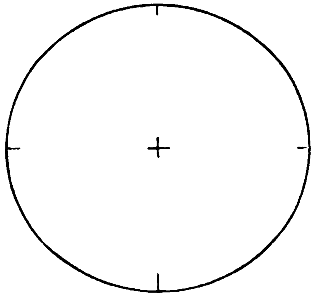
Steht nun die Kugel möglichst seitwärts, so daß $m$ etwa $= \frac{1}{2}$ Bildbreite, und ist die Distanz $d = 1\frac{1}{2}$ Bildbreite, so ist $m : d = 1 : 3$ und

$$b : a = \sqrt{9 : 10}, \text{ nahezu } = 19 : 20.$$

Die Figur 232 zeigt eine solche Ellipse und läßt erkennen, daß dieselbe von dem Kreise kaum merklich abweicht. Selbst bei $m : d = 1 : 2$ wird $b : a$ nahezu $= 9 : 10$, also ebenfalls nicht stark vom Kreise abweichend. Fig. 232.

Es wird oft behauptet, daß eine Kugel stets als Kreis abgebildet werden müsse, weil alle Durchmesser des Umrißkreises gleich groß erscheinen, während die durch $M$ gehenden Sehnen der Ellipse $k$ in Fig. 231 ungleich sind. Dieser Grund kann nicht anerkannt werden; in dieser Art ausgesprochen, beruht er auf einer Verwechselung zwischen Gesichtswinkel und Abbildung, welche den Grund aller Streitfragen über Perspektive bildet. Jene Kreishalbmesser erscheinen allerdings unter gleichen Gesichtswinkeln, ihre Abbildungen, das sind die durch $M$ gehenden Sehnen der Ellipse $k$, aber ebenfalls, wenn man sie von dem angenommenen Orte $O$ des Auges aus betrachtet. Wenn man sich aber vor dem Bilde hinbewegt, um die Einzelheiten näher anzuschauen, so würde die elliptische Gestalt allerdings störend wirken; und da sich selbst für die richtige Stellung des Auges meist nur gegeringe Abweichungen von dem Kreise ergeben, so ist die bei den Malern gebräuchliche kreisförmige Abbildung der Kugel, so der (verschleierten) Sonne und des Mondes, durchaus gerechtfertigt, zumal da eine volle Kugel in keinem so innigen Zusammenhange mit benachbarten Gegenständen steht, daß an der Verbindungsstelle ein Widerspruch bemerkbar würde*). — Andererseits aber ist in jenem erwähnten Falle der Kuppel die hyperbolische Abbildung eines Kugelteiles vorgeschrieben.

Fig. 232.



Bei den folgenden rein geometrischen Konstruktionen wird die elliptische Gestalt von $k$ beibehalten, die noch durch eine kleine Distanz besonders excentrisch gestaltet wurde.

**571.** Um die *Eigenschattengrenze* $s$ der Kugel zu bestimmen, nehme man den Fluchtpunkt $S$ der Lichtstrahlen an; die $s$ ist dann die Abbildung des größten Kreises der Kugel, dessen Ebene senkrecht auf $OS$ steht. Die Spur dieser Ebene ist $e_1 = MJ \perp AS$ und ihre Fluchtlinie $e_\infty = HT \parallel e_1$. Man erhält von $e_\infty$ den Punkt $H$ auf $AS$, wenn man $AD \perp AS$ bis $D$ auf dem Distanzkreise $d$ und $DH \perp SD$ zieht. Die Spur $e_1$ dieser Ebene schneidet die Spur $c$ der Kugel in den beiden Punkten $J$ und $G$, welche einen Durchmesser des Schattenkreises begrenzen; und man zeichnet $s$ nach

*) Ich weise hier auf die schon im I. Bande (Nr. 30 und 37) besprochenen eingehenden und interessanten Untersuchungen von Herrn *de la Gournerie* (tr. de perspective linéaire, 1859) und Herrn *Hauck* (die subjektive Perspektive und die horizontalen Curvaturen des dorischen Styls, 1879) hin.

Nr. 550, indem man aus $H$ durch $D$ den Teilungskreis legt, ihn mit $e_\infty$ in den Teilungspunkten, so in $T$, schneidet, $MH$ zieht und auf ihr durch $JT$ und $GT$ die Punkte $K$ und $L$ bestimmt; dann ist $KL$ ein Durchmesser der $k$, deren Endtangenten $\parallel e_1$ laufen. Aus diesen Elementen und aus einem der Punkte $J$, $G$ bestimmt man dann nach Nr. 551 die Axen und zeichnet die Kurve $s$.

Zur Bestimmung der *Schlagschattengrenze* $s_1$ auf die Bodenfläche $\mathrm{P}_1$ zeichnet man die Fluchtlinie und die Spur der $\mathrm{P}_1$, d. i. den Horizont $h$ (durch $A$) und die Grundlinie $g$ ($\parallel h$) als untere in $Q$ berührende Tangente des $c$. Um von $s_1$ den Durchmesser $N_1P_1$ zu erhalten, dessen Endtangenten $\parallel h$ sind, beachte man, daß die durch diese Tangenten gehenden Lichtstrahlenebenen die $SU \parallel h$ zur Fluchtlinie haben. Diese Ebenen schneiden die Ebene des Kreises der Eigenschattengrenze in Linien, deren Fluchtpunkt der Schnittpunkt $U$ von $SU$ mit $e_\infty$ ist. Andererseits ist der Fluchtpunkt des auf diesen Linien senkrechten Durchmessers $NP$ der Eigenschattengrenze der Punkt $V$ der $e_\infty$, für welchen $UOV = 90^0$, der aber auch auf $AV \perp h$ liegt. Denn $OS$ steht $\perp$ der Kreisebene $e_1 e_\infty$, also auch $\perp OV$; daher ist $OV \perp OS$ und $\perp OU$, also auch $\perp$ der Ebene $SOU$, und $AV \perp SU$ oder $\perp h$. Daher ist $MV$ die Abbildung der Linie des Kreisdurchmessers $NP$, dessen Endtangenten $U$ zum Fluchtpunkte haben, und Schatten auf $\mathrm{P}_1$ werfen, die $\parallel g$ laufen. Der Schlagschatten der $MV$ auf $\mathrm{P}_1$ ist (I, 539) die Schnittlinie der Lichtstrahlenebene der $MV$ mit $\mathrm{P}_1$; erstere hat $SV$ zur Fluchtlinie und die damit Parallele $MR_1$ zur Spur, letztere bezw. $h$ und $g$. Die Fluchtlinien treffen sich in $R_\infty$, die Spuren in $R_1$, daher ist $R_1R_\infty$ der Schlagschatten von $MV$, und darauf die Schnittpunkte $N_1$, $P_1$ mit $NS$, $PS$ die Schatten von $N$, $P$. $N_1P_1$ ist daher ein Durchmesser des $s_1$ und die durch seine Mitte $W_1$ und $\parallel g$ gezogene $W_1X_1Y_1$ ist der konjugirte Durchmesser, dessen Endpunkte $X_1$, $Y_1$ man erhält, wenn man $SW_1$ mit $MV$ in $W$, und $WU$ mit $s$ in $X$, $Y$ schneidet; die $XS$, $YS$ gehen dann durch $X_1$, $Y_1$. Sind die letzteren Schnittpunkte, wie in der Figur, unsicher, so benutzt man die Projektionen der Linien $MV$ und $WU$ auf $\mathrm{P}_1$; da die Fluchtpunkte dieser Linien bezw. $V$ und $U$ sind, so sind diejenigen ihrer Projektion die Punkte $A$ und $U'$ der $h$ ($VA$ und $UU' \perp h$). Da außerdem $Q$ die Projektion von $M$ auf $\mathrm{P}_1$, so ist $QA$ die Projektion der $MV$. Auf ihr liegt die Projektion $W_2$ von $W$, und man hat noch die Probe, daß $W_1S'$ durch $W_2$ läuft; durch $W_2$ geht die Projektion $W_2U'$ von $WU$, und auf dieser liegen die Projektionen $X_2$, $Y_2$ von $X$, $Y$. Die Grundrisse $X_2S'$, $Y_2S'$ der Lichtstrahlen $XS$, $YS$ bestimmen dann die Punkte $X_1$, $Y_1$ (Probe $W_1X_1 = W_1Y_1$).

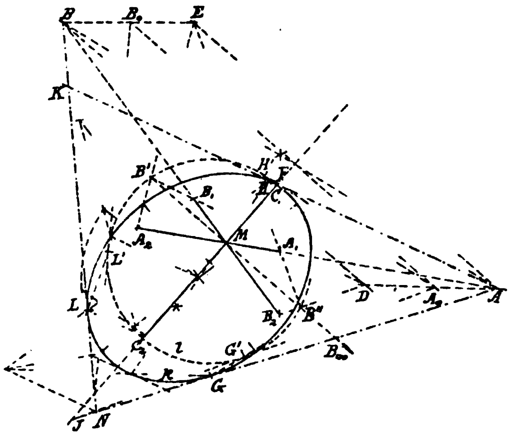
Die drei Geraden $WV$, ihre Projektion $W_2A$ und ihr Schatten $W_1R_\infty$ auf $\mathbf{P}_1$ müssen sich in demselben Punkte $Z$, der Spur der $WV$ in $\mathbf{P}_1$, treffen. Mittelst der konjugirten Durchmesser $N_1P_1$, $X_1Y_1$ bestimmt man dann die Axen der $s_1$.

**572.** ***Aufg.*** ***Den Umriß der Perspektive einer Fläche zweiten Grades aus den Abbildungen dreier konjugirten Durchmesser der Fläche zu bestimmen.***

Ist die Fläche durch andere Elemente gegeben, und kann man aus diesen die Abbildungen dreier konjugirten Durchmesser, z. B. der Axen, bestimmen, so ist dadurch die Auflösung auf die folgende zurückgeführt. — Diese Aufgabe schließt sich an die entsprechende für Parallelprojektion an (128 ff.).

Fig. 233. *Aufl.* Seien die Strecken $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, oder $a$, $b$, $c$, welche durch denselben Punkt $M$ gehen, die Abbildungen dreier konjugirten Durchmesser, $M$ die des Mittelpunktes der Fläche $\mathbf{F}$. Man suche auf jeder dieser Geraden den vierten harmonischen, dem $M$ zugeordneten Punkt, nämlich $A$, $B$, $C$, so sind dies die Abbildungen der unendlich fernen Punkte der Durchmesser. Die Abbildung des Kegelschnittes jeder der drei konjugirten Durchmesserebenen ist nun gegeben, z. B. derjenigen $ab$ durch die vier Punkte $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$,

Fig. 233.



und durch die Tangenten in denselben $A_1B$, $A_2B$, $B_1A$, $B_2A$. Ein parallel mit einem der Durchmesser der $\mathbf{F}$ umschriebener Cylinder berührt nach dem Kegelschnitte der beiden anderen Durchmesser, und die Umrißerzeugenden dieses Cylinders berühren diesen Kegelschnitt und den Umriß $k$ der $\mathbf{F}$ in denselben Punkten. Legt man daher aus jedem der Punkte $A$, $B$, $C$ Tangenten bezw. an die Kegelschnitte $bc$, $ca$, $ab$, und bestimmt ihre Berührungspunkte, so ist durch diese sechs Geraden und sechs Punkte der Umriß der $\mathbf{F}$ überschüssig bestimmt. Man begnügt sich mit drei Tangenten und den Berührungspunkten zweier.

Von jenen vierten harmonischen Punkten sind nur zwei, etwa $A$ und $B$, notwendig; sie liegen auf der Nebenseite des vollstän-

digen Vierecks $A_1A_2B_1B_2$, welche $M$ gegenübersteht, also die Punkte $A_1B_1$, $A_2B_2$ und $A_1B_2$, $A_2B_1$ verbindet. Um nun aus $A$ an den Kegelschnitt $bc$ die beiden Tangenten zu legen, ziehe man über $C_1C_2$ als Durchmesser einen Kreis $l$ und betrachte $bc$ und $l$ als perspektiv mit $C_1C_2$ als Kollineationsaxe. Zieht man aus $M$ die nach dem Schnittpunkte der Kreistangenten in $C_1$ und $C_2$ gehende, d. i. auf $C_1C_2$ senkrechte Gerade, so entsprechen deren unendlich ferner Punkt und deren Schnittpunkte mit $l$, d. i. $B_\infty$, $B'$, $B''$ im Systeme des $l$ den Punkten $B$, $B_1$, $B_2$ im System des $bc$, so daß der Kollineationsmittelpunkt für $l$ und $bc$ als der gemeinschaftliche Punkt $D$ von $B_\infty B$, $B'B_1$, $B''B_2$ überschüssig bestimmt ist. Dem Punkte $A$ im Systeme $bc$ entspricht $A_0$ im Systeme $l$, wenn $A_0$ auf $DA$ und wenn $AB$ und $A_0B_\infty$ sich in einem Punkte der $C_1C_2$ treffen. Zieht man aus $A_0$ die beiden Tangenten an $l$, welche die Kollineationsaxe in $J$, $F$ schneiden, und den $l$ in $G'$ und $H'$ berühren, so sind $AJ$, $AF$ die Tangenten aus $A$ an $bc$ und ihre Berührungspunkte sind $G$, $H$ auf $G'D$, $H'D$. Dabei besteht die Probe, daß sich $GH$ und $G'H'$ auf $C_1C_2$ treffen. — In entsprechender Weise legt man die Tangenten aus $B$ an den Kegelschnitt $ac$. Man benutzt dazu denselben Kreis $C_1C_2 = l$ als perspektiv zu $ac$ mit $C_1C_2$ als Axe und mit $E$ als Mittelpunkt der Kollineation, wobei $E$ der gemeinsame Punkt von $B_\infty A$, $B'A_2$, $B''A_1$. Dem $B$ entspricht dann $B_0$ auf $EB$, wenn $BA$ und $B_0B_\infty$ sich auf $CC_1$ treffen, wenn also $B_0$ auf der schon gezeichneten Geraden $A_0B_\infty$ liegt. Zieht man nun aus $B_0$ die beiden Tangenten an $l$ und durch deren Schnittpunkte mit $C_1C_2$ die Geraden aus $B$, so sind dies die beiden Tangenten aus $B$ an den Kegelschnitt $ac$ und an den Umriß $k$. Man benutzt von denselben diejenige, welche mit denen $AJ$, $AF$ das günstigere, einem gleichseitigen näher kommende Dreieck $ANK$ bildet, und konstruirt aus ihm und den Berührungspunkten $G$, $H$ die Axen des $k$ nach Nr. 555, indem man den Berührungspunkt $L$ von $BK$ aus $L'$ und zur Probe auch aus dem Dreiecke $ANK$ bestimmt, und dann eine zu einer Dreiecksseite parallele Tangente, und zwar diejenige vom größten Abstande von der Dreiecksseite, sowie ihren Berührungspunkt ermittelt; auch die folgende Axenbestimmung (551) ist in der Figur angedeutet.

Sind einer oder zwei der gegebenen konjugirten Durchmesser imaginär, welche dann ideell gegeben werden, so wähle man als $C_1C_2$ den reellen; einer von den Kegelschnitten $ac$, $bc$, oder beide sind dann Hyperbeln, an welche man die Tangenten bezw. aus $B$ und $A$ zu zeichnen hat. Es kann dies nach I, 383 oder 384, oder im Anschluß an II, 129 geschehen, oder dadurch, daß man die

Hyperbel $ac$ als perspektiv zur Ellipse $ac$ mit $C_1$ als Mittelpunkt und $C_2A$ als Axe der Kollineation ansieht, zu $B$ den entsprechenden Punkt sucht, aus diesem an die Ellipse nach dem gegebenen Verfahren die Tangenten sucht, deren Entsprechende dann die gesuchten bilden. — Sind alle drei Durchmesser imaginär und ideell gegeben, und ist daher auch die Fläche **F** imaginär, so ist das Ellipsoid der Figur die ideelle Darstellung der **F** in Bezug auf $M$ und der konstruirte Umriß $k$ die ideelle Darstellung des Umrisses der **F**.

Sind $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ nicht Durchmesser, sondern nur *konjugirte durch denselben Punkt M gehende Sehnen der* **F**, so ist die konstruktive Auflösung genau dieselbe.

*Übungsaufg.* Man suche die Aufgabe im Anschluß an die Nrr. 130, 131 zu lösen.

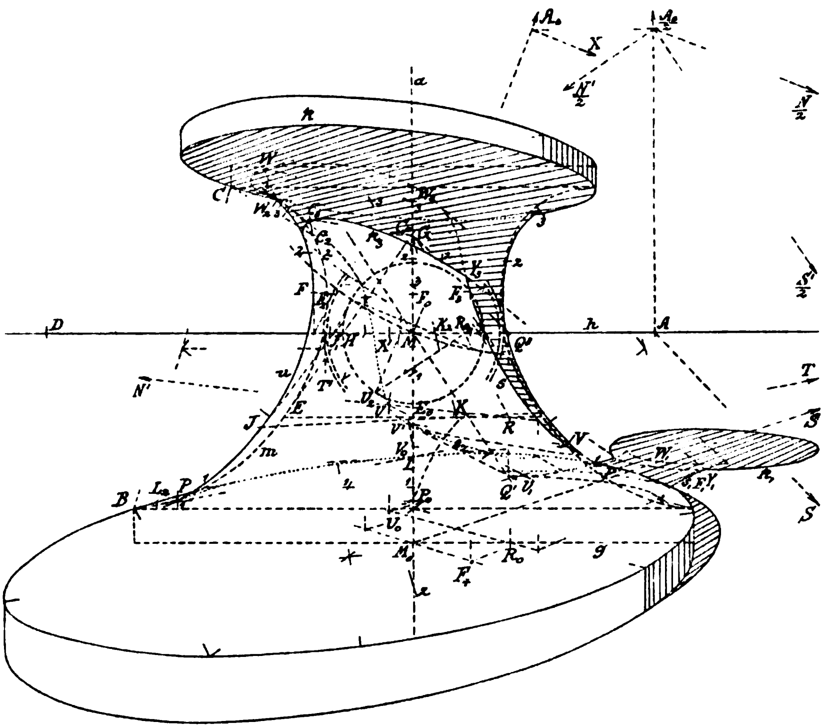
**573.** *Aufg. Die Perspektive einer Umdrehungsfläche, der konvex-konkaven Fläche des Fußgestelles, samt den dabei auftretenden Eigen- und Schlagschatten bei Parallelbeleuchtung zu bestimmen.*

Fig. 234. *Aufl.* Die Umdrehungsaxe $a$ stehe vertikal und liege in der Bildfläche **P**, wodurch nach Nr. 569 die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird. Der halbe Hauptmeridian (in **P**) ist eine halbe Ellipse $m = BC$, deren beiden Endtangenten $\perp a$ stehen, und von welcher man den zu $BC$ konjugirten Halbdurchmesser annimmt, die Axen bestimmt, und die man daraus zeichnet. Die halbe Ellipse $m$ kehre der Axe $a$ ihre konvexe Seite zu; hierdurch wird die erzeugte Umdrehungsfläche **F** konvex-konkav. Durch Zufügen zweier (cylindrischen) Reife ist ein Fußgestell gebildet. — Ferner sei $h$ der Horizont, $A$ der Augenpunkt, $A_0$ (nicht angebbar) das aufgeklappte Auge, $\frac{A_0}{2}$ das reducirte, $D$ der Distanzpunkt. Das Fußgestell ist so groß angenommen, daß die meisten Fluchtpunkte keinen Platz mehr finden, dieselben sind aber als benutzbar angenommen. Andernfalls müßten sie durch die reducirten ersetzt werden.

Den *Umriß* $u$ der **F** könnte man bestimmen, indem man eine Anzahl von Parallelkreisen in Perspektive setzte und den Umriß als Einhüllende ihrer Abbildungen zeichnete. Kürzer und genauer kommt man aber zum Ziele, wenn man entlang einzelner Parallelkreise der **F** Kegel umschreibt und an sie aus dem Auge die beiden Berührungsebenen legt; ihre Schnitte mit **P** sind Tangenten des $u$, und die Abbildungen ihrer Berührungspunkte mit dem Parallelkreise sind auch die Berührungspunkte jener Tangenten mit $u$. Sei von einem Parallelkreise $E_0$ (auf $a$) der Mittelpunkt, $E$ ein Punkt auf $m$, so ziehe man an $m$ in $E$ die Tangente, schneide sie mit $a$ in $G$, der Spitze

jenes umschriebenen Kegels, und mit $h$ in $H$; der Schnitt des Kegels mit der Horizontalebene ist dann ein Kreis, welcher den Schnittpunkt $M$ von $a$ mit $h$ zum Mittelpunkte hat und durch $H$ geht. An diesen Kreis zieht man aus dem Auge $O$, oder an seine Umlegung, den aus $M$ durch $H$ gelegten Kreis, aus dem umgeklappten Auge $A_0$ die beiden Tangenten, schneidet sie mit $h$ in zwei Punkten, wie $J_1$, deren Verbindungslinien mit $G$, so $GJ_1$, Tangenten des Umrisses sind. Die Berührungspunkte der aus $A_0$ an den Kreis

Fig. 234.



$MH$ gezogenen Tangenten liegen auf dem über $MA_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise, und die Sehne der Berührungspunkte, welche $\perp AM$ steht, schneidet $h$ in $K_2$, welcher Punkt sich aus der Spitze $G$ des Kegels auf $E_0E$ in $K$ projicirt. Der Fluchtpunkt jener durch $K_2$ gehenden Sehne der Berührungspunkte und ihrer Projektion auf die Ebene des Kreises $E_0E$ ist $N$ auf $h$, wenn $MA_0N = 90^0$; daher bestimmt $NK$ auf jenen beiden Tangenten des Umrisses deren Berührungspunkte, so $J$ auf $GJ_1$. — Um den Kreis $MH$ möglichst auszunutzen, ziehe man aus $H$ noch eine zweite Tangente an dieselbe Meridianhälfte $m$, und aus dem zweiten End-

punkte des Durchmessers von $MH$ ebenfalls zwei Tangenten, bestimme deren Berührungspunkte, und führe die Konstruktion für die Parallelkreise der Berührungspunkte aus, so 1, 1, 1, 1; 2, 2,... Aus einem Kreise $MA$ erhält man daher acht Punkte des $u$ nebst den Tangenten in dieselben, zu denen man nach günstiger Wahl des $H$ nur noch die ausgezeichneten Punkte des $u$ zuzufügen braucht. Gelangen $G$ und $H$ nahe zu $M$ oder in $M$, so wird die Konstruktion ungenau bezw. unbestimmt; man ersetzt dann den Kreis $MH$ durch einen passend größeren, ermittelt an ihm durch Parallele die Richtung des Strahles $GK$, und erreicht dadurch dieselbe Genauigkeit, wie bei den anderen Punkten.

**574.** *Ausgezeichnete Punkte des Umrisses u.* 1) Legt man den *Parallelkreis in die Horizontebene*, so fallen die Kreise $E_0E$ und $MH$ in einander, $H$ kommt in $m$, die beiden an diesen Kreis aus $A_0$ gezogenen Tangenten bestimmen in $h$ zwei Umrißpunkte, in denen die Umrißtangenten nach der Spitze des umschriebenen Kegels laufen.

2) Für den kleinsten oder *Kehlkreis*, dessen Mittelpunkt $F_0$ ist, fällt $G$ auf $a$ ins Unendliche, der umschriebene Kegel wird zu einem Cylinder, $K$ fällt in $F_0$ und die Umrißtangenten, so in $F$, werden $\parallel a$.

3) Die Umrißpunkte des *Hauptmeridianes m* sind die Berührungspunkte der aus $A$ an $m$ gezogenen Tangenten, so $P$, und die Tangenten berühren in diesen Punkten auch den Umriß. Die Berührungsebenen der $\mathbf{F}$ gehen nämlich dann durch das Auge $O$. Da die Meridianebene $Oa$ Symmetrieebene der wahren Umrißlinie ist, so kann man leicht zu $P$ den symmetrischen Punkt $P'$ angeben. Der Symmetriestrahl $PP'$ steht $\perp Oa$ und hat daher seinen Fluchtpunkt in $N$; der Halbmesser $P_0P'$ hat den seinigen in $X$, der Mitte zwischen $M$ (oder $a$) und $N$. Denn die Halbmesser $P_0P$ und $P_0P'$ bilden gleiche Winkel mit denjenigen $P_0M$; also müssen die räumlich und dann im umgeklappten Grundriß mit ihnen Parallele $h = MX$ und $A_0X$ gleiche Winkel mit $MA_0$ bilden, oder $X$ muß auf der durch die Mitte von $MA_0$ und $\perp MA_0$ gezogenen Geraden, d. i. in der Mitte von $MN$ liegen. Die Tangente an $u$ in $P'$ geht durch den Schnittpunkt von $AP$ mit $a$.

4) Die Punkte auf den letzten Parallelkreisen, dem *höchsten und tiefsten*, erhält man, wenn man den Kreis $MH$ durch $A_0$ gehen läßt, wobei aus $A_0$ nur noch eine Tangente an denselben gelegt werden kann, welche die $h$ in $N$ trifft. Dieser Kreis schneidet die $h$ in zwei Punkten, so in $T$; aus $T$ zieht man die Tangenten an $m$, deren eine die $m$ in $L_2$ berühre und die $a$ in $L$ schneide; es rückt

daher $G$ in $L$, $J_1$ und $K_2$ rücken in $N$ zusammen, die Tangente $GJ_1$ des Umrisses rückt in $LN$, aber in diese Linie rücken auch $GK_2K$ und $KN$, so daß der Berührungspunkt des Umrisses unbestimmt bleibt. Derselbe ergibt sich aber als der Punkt $L$ der $a$, wenn man beachtet, daß der Berührungshalbmesser des durch $L_2$ gehenden Parallelkreises $\parallel MA_0$ ist, daher $M$ zum Fluchtpunkte hat, daß er also auf $a$ liegt. — Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man beachtet, daß die gesuchten Punkte, so $L$, die Berührungspunkte der in der Ebene $Oa$ aus $O$ an den Meridian gelegten Tangenten und ihre Abbildungen die Schnitte dieser Tangenten mit $a$ sind. Man erhält diese Punkte durch Umlegen der Ebene $Oa$ in P, wobei $O$ nach $T$ gelangt, durch Ziehen der Tangenten aus $T$ an den Hauptmeridian $m$, und durch Schneiden derselben mit $a$, so in $L$. Die Tangente des Umrisses ist aber $\perp Oa$ und hat daher $N$ zum Fluchtpunkte.

5) Die *Spitzen*. Der scheinbare Umriß (nicht der wahre) besitzt vier Spitzen, die bei senkrechter Projektion in den Nummern 181 f. und 506 auf verschiedene Weisen gefunden wurden. Wir wollen aber hier das einfachere auf Spitzen beliebiger Kurven anwendbare Verfahren der Nr. 501 benutzen. Seien nahe bei einer der Spitzen (rechts unten) als zugehörig zu den Punkten 1, 2, 3 der $a$ als Mittelpunkten von Parallelkreisen die Punkte 1′, 2′, 3′ des Umrisses mit dessen Tangenten gefunden (die aber, um Verwirrung zu vermeiden, in der Figur nicht eingetragen wurden), so kann der Umriß angenähert gezeichnet und der Abstand jedes Punktes von dem anderen Kurvenzweige als Fehler angesehen und von 1, 2, 3 auf Senkrechten zu $a$ aufgetragen werden; die Verbindungskurve der Endpunkte bildet die in der Figur gezeichnete Fehlerkurve, deren Schnitt mit $a$ (nahe bei $P_0$) den Mittelpunkt des Parallelkreises angibt, auf welchem die fragliche Spitze liegt. — Durch die vier Spitzen wird der Umriß in zwei Zweige von physischer und in zwei von nur mathematischer Bedeutung geteilt. In der Figur berühren die letzteren Kurvenzweige den Hauptmeridian in Punkten wie $P$. Die Bilder der Grenzkreise der (cylindrischen) *Reife* sind in bekannter Weise vermittelst ihrer Axen gezeichnet.

**575.** *Die Abbildung des Fußgestelles erscheint verzerrt*, weil die Distanz der Deutlichkeit der Konstruktionen halber ungewöhnlich klein gewählt wurde. Stellt man das Auge in diesem kleinen Abstande auf, so ist der Eindruck befriedigend. Auch sind die *seitlichen Ausladungen* in der Abbildung wegen der seitlichen Stellung des Auges *ungleich stark*. Herr *de la Gournerie* gibt in seiner vorhin angeführten Linienperspektive an, daß die Maler derartige Körper

symmetrisch zu ihrer Axe abbilden, wie wenn der Augenpunkt in in dieser Axe läge, und billigt dieses Verfahren, weil dadurch die Verzerrung bei der Bewegung des Auges vor dem Bilde vermieden werde. Wenn der Verfasser diesen Grund bei der Kugelabbildung anerkannte (570), so kann er es hier nicht, weil hier leicht ein Widerspruch eintritt mit den benachbarten Abbildungen anderer Körper, z. B. einer quadratischen Platte, auf welcher etwa das Fußgestell aufsteht, und weil sich bei solchen Körpern die einseitige oder die symmetrische Abbildung deutlich ausprägt und der Widerspruch deswegen hervorspringt, in viel höherem Grade als bei der Kugel. Bei Photographien, die stets in dieser Beziehung richtig sind, empfindet Niemand eine Störung.

**576.** Zur *Schattenbestimmung* nehme man $S$ und $S'$ bezw. als Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrisse an, wodurch $AS$ die Richtung der Aufrisse (auf P) und $A_0S'$, sowie $\frac{A_0}{2}\frac{S'}{2}$, die Richtung der umgelegten Grundrisse der Lichtstrahlen bezeichnen. Die Punkte der *Eigenschattengrenze* $s$ der F auf einem Parallelkreise $E_0E$ bestimmt man mittelst des umschriebenen Kegels, indem man durch dessen Spitze $G$ einen Lichtstrahl, und durch diesen die beiden Berührungsebenen an den Kegel legt und ihre Berührungserzeugenden ermittelt; deren Schnittpunkte mit dem Parallelkreise sind dann Punkte der $s$. Zur Ausführung schneide man den Kegel und den durch seine Spitze $G$ gelegten Lichtstrahl mit der Horizontebene bezw. in dem schon gezeichneten Kreise $MH$ und in dem Punkte $Q'(GQ'' \parallel AS$ bis $Q''$ auf $h$, $MQ' \parallel A_0S'$, $Q''Q' \perp h)$, denke aus $Q'$ an den Kreis $MH$ die beiden Tangenten gelegt und bestimme ihre Berührungssehne als die Polare $U_2R_2$ von $Q'$ (Anlegen nach einer Tangente $Q'U_2$, Bezeichnen von $U_2$ durch $MU_2 \perp Q'U_2$, Ziehen von $U_2R_2 \perp Q'M$), schneide $U_2R_2$ mit $h$ in $R_2$, projicire die beiden Berührungspunkte aus $A_0$ auf $h$, und ziehe nach den Projektionen Gerade aus $G$, wie $GU$, so sind dies die Perspektiven der Berührungserzeugenden des Kegels; sodann projicire man den Punkt $R_2$ aus $G$ auf $E_0E$ nach $R$, so ist $RN'$ die Perspektive der Projektion der Sehne $U_2R_2$ aus $G$ auf die Ebenen des Parallelkreises, wenn $N'$ der Fluchtpunkt dieser Sehne $\left(\text{auf } h,\ A_0N' \parallel \frac{A_0}{2}\frac{N'}{2} \parallel U_2R_2 \text{ oder } \perp \frac{A_0}{2}\frac{S'}{2}\right)$, und die Schnittpunkte der $RN'$ mit jenen Berührungserzeugenden, so $U$, sind zwei Punkte der Eigenschattengrenze. — In gleicher Weise werden die Punkte auf jenen schon benutzten drei anschließenden Parallelkreisen gefunden, wovon aber die Zeichnung nicht angegeben ist.

**577.** *Ausgezeichnete Punkte der Eigenschattengrenze s.* 1) Für die Punkte auf dem Parallelkreise der *Horizontebene* vereinfacht sich die Konstruktion um etwas. 2) Für den Kehlkreis $F_0 F_2$ fällt $G$ ins Unendliche, $R_2$ fällt in $M$, $R$ in $F_0$, und $F_3$ ist einer der Punkte der $s$. 3) Die Punkte der $s$ auf dem *Hauptmeridiane* $m$ sind die Berührungspunkte der an $m \parallel AS$ gezogenen Tangenten, so $V$. Da die Ebene des Lichtstrahlenmeridianes Symmetrieebene der Schattengrenze ist, so kann man leicht, wie vorhin zu $P$, so den zu $V$ symmetrischen Punkt $V'$ angeben. Der Symmetriestrahl $VV'$ steht nämlich senkrecht auf jener Symmetrieebene, deren Fluchtlinie $SS'$ ist, hat daher seinen Fluchtpunkt in $N'$; der Halbmesser $V_0 V'$ hat den seinigen in $X'$, der Mitte zwischen $S'$ und $N'$. Denn die Halbmesser $V_0 V$, $V_0 V'$ bilden gleiche Winkel mit $V_0 S'$; also müssen die räumlich und dann im umgeklappten Grundriß mit ihnen Parallelen $h = S'X'$ und $A_0 X'$ gleiche Winkel mit $S'A_0$ bilden, oder $X'$ muß auf der durch die Mitte von $S'A_0$ und $\perp S'A_0$ gezogenen Geraden, d. i. in der Mitte von $S'N'$ liegen.

4) Die Abbildungen der *höchsten und tiefsten Punkte* der Eigenschattengrenze liegen auf dem Lichtstrahlenmeridiane, dessen Ebene $\parallel OSS'$ ist. Legt man beide Ebenen in **P** um, so gelangt jener Meridian in $m$, $O$ in einen zu $S'$ gehörigen Teilungspunkt $T'$ auf $h$ ($S'T' = S'A_0$). Zieht man nun an $m$ die beiden mit $T'S$ parallelen Tangenten, bestimmt ihre Berührungspunkte, so $W_2$, die Mittelpunkte von deren Parallelkreisen, so $W_0$, und dreht zurück, so gelangt $W_0 W_2$ in $W_0 S'$, dabei $W_2$ in $W$, wenn im Raume $W_0 W = W_0 W_2$, also $W$ auf $W_2 T'$ liegt. Die Tangente an $s$ in $W$ geht durch $N'$.

5) Die Punkte der $s$ auf dem *Umrisse* $u$ sind die Berührungspunkte der aus $S$ an $u$ gezogenen Tangenten. Dieselben könnten durch eine Fehlerkurve genauer ermittelt werden; doch genügt eine Bestimmung durch Schätzung.

**578.** Die *Schlagschatten auf die Bodenfläche* $\mathbf{P}_1$, welche die Grundlinie $g$ zur Spur hat, findet man für die vorkommenden Kreise wieder als die Abbildungen von Kreisen, von denen man einen mit $g$ parallelen Halbdurchmesser mittelst zweier Lichtstrahlen bestimmt, indem man aus ihm die Axen der Schattenellipsen ermittelt (551).

Für die *Schlagschattengrenze* $s_1$ *der Fläche* **F** oder der $s$ bestimmt man den Schatten $U_1$ eines allgemeinen Punktes $U$ und des zweiten mit $U$ auf demselben Parallelkreise und auf der Geraden $URN'$ liegenden Punktes, indem man diese Gerade mittelst $R$ in $U_0 R_0 N'$ auf $\mathbf{P}_1$ projicirt; $U_1$ ist dann der Schnittpunkt von $US$ und $U_0 S'$. Von $s$ konstruirt man hauptsächlich die Schatten der höchsten und tiefsten Punkte, so $W_1$ von $W$; dieselben liegen auf $M_0 S'$, und die

Tangenten in denselben laufen nach $N'$; die Schatten der Punkte des Kehlkreises, so $F_1$ von $F_3$; die Tangenten in denselben laufen nach $S'$; und die Spitzen auf den Strahlen, welche aus $S$ berührend an $s$ gelegt werden; zu ihrer Ermittelung bestimme man den zugehörigen, dem $R_0$ entsprechenden Punkt, durch Einschaltung zwischen die benachbarten Punkte. Damit kann man $s_1$ genügend zeichnen, wenn man beachtet, daß sich zwei Verbindungslinien zweier Schattenspitzen in $S'$, zwei in $N'$, und zwei auf $M_0S'$ schneiden; und daß zweimal zwei Tangenten der $s_1$ in Spitzen sich in $M_0S'$ treffen.

Den *Schlagschatten* $k_3$ *des oberen Grenzkreises* $k$ *der* **F** *in* **F** bestimmt man hauptsächlich durch die Abbildung $C_3$ des ***höchsten Punktes*** und durch die Grenzpunkte auf $s$. Ersterer liegt in dem Lichtstrahlenmeridiane ($\parallel OSS'$) und wird wieder durch dessen Drehung in **P** erhalten. Man zieht daher den Strahl $CC_2 \parallel T'S$ bis $C_2$ auf $m$, dann $C_2C_0 \perp a$ bis $C_0$ auf $a$, so schneiden sich $C_0S'$ und $C_2T'$ in $C_3$; die Tangente in $C_3$ läuft nach $N'$. Die ***Grenzpunkte*** auf $s$, so $Y_3$, werden aus den Schnittpunkten der Schatten $s_1$ und $k_1$ von $s$ und $k$ auf $\mathbf{P}_1$, so aus $Y_1$, durch rückwärts (aus $S$) gezogene Lichtstrahlen bestimmt; ihre Verbindungslinie muß durch $N'$ laufen. Allgemeine Punkte könnte man auf irgend einem Parallelkreise als Schnitt desselben mit dem Schatten des oberen Grenzkreises auf seine Ebene erhalten; man verfährt dabei, wie bei den Kreisen im Horizonte, nach dem Grund- und Aufrißverfahren, so daß man keiner Hilfsellipsen bedarf.

*Der Schlagschatten* $s_2$ *der* **F** *oder der* $s$ *in die* **F** beginnt an den beiden unteren Grenzpunkten der $s$, in denen ihre Tangenten nach $S$ laufen, und endet auf dem unteren Grenzkreise der **F**. Die ersteren Punkte sind schon genügend bestimmt, die letzteren werden durch die rückwärts gezogenen Lichtstrahlen aus den Schnittpunkten der $s_1$ mit dem Schlagschatten jenes Kreises auf $\mathbf{P}_1$ ermittelt. Die Tangenten des Schlagschattens in den ersteren Punkten laufen nach $S$, die in den letzteren nach denselben Fluchtpunkten auf $h$, wie die Tangenten der $s_1$ in jenen Schnittpunkten. Allgemeine Punkte, wenn sie notwendig sein sollten, kann man aus dem elliptischen Schatten eines zwischenliegenden Parallelkreises auf $\mathbf{P}_1$ und aus dessen Schnitt mit $s_1$ durch rückwärts gezogene Lichtstrahlen ermitteln.

**579.** *Die Perspektive des menschlichen Blicks.* Wenn der Blick der Abbildung eines Gesichtes, insbesondere eines Portraits, bei einem gewissen Standpunkte des Beschauers auf diesen gerichtet scheint, so scheint er auch bei jedem anderen Standpunkte desselben auf ihn gerichtet. Diese Beobachtung kann überraschen, weil

es befremdend erscheint, daß der Blick des Portraits gleichzeitig nach allen Richtungen gekehrt ist, und sie veranlaßt leicht die Meinung, es bedürfe eines besonderen Kunststücks des Malers, um diese Wirkung hervorzubringen. Dies ist aber durchaus nicht der Fall; vielmehr ist es unmöglich, zu bewirken, daß der Blick nur dann auf den Beschauer gerichtet ist, wenn dieser an einer bestimmten Stelle steht.

Die Erscheinung beruht nämlich darauf, daß bei der Anfertigung des Bildes eine gewisse Stellung des Auges gegen den Gegenstand angenommen wird, und daß das fertige Bild in dem Beschauer, welchen Ort er auch einnehmen mag, die Vorstellung dieser Augenstellung hervorruft, so daß bei der Bewegung des Beschauers vor dem Bilde die Stellung des Gegenstandes gegen das Auge unverändert bleibt, diejenige gegen den Raum sich daher notwendiger Weise ändert. So zeigt die Abbildung des Inneren einer Pfeilerhalle (I, 538) die beiderseitigen Innenflächen, wie sie nur einem im Inneren der Halle stehenden Beobachter gleichzeitig sichtbar sein können. Stellt man sich nun gerade vor das Bild, so scheint sich die Halle gerade nach vorn zu erstrecken und uns in ihrem Inneren aufzunehmen; stellt man sich rechts oder links, so scheint sich die Halle nach rechts oder links zu erstrecken, weil wir nur bei dieser räumlichen Erstreckung jedesmal in ihrem Inneren stehen können (vergl. I, 562). Im Mittelalter wurde häufig der Tod so abgebildet, daß er den Pfeil gleichzeitig auf jeden der Beschauer abschießen zu wollen schien, der Pfeil schien nach dem Auge oder nach der Brust, und zwar in wechselnder Tiefe, gerichtet, je nachdem von ihm nur die Spitze oder eine stark verkürzte Oberaufsicht des Schaftes gemalt war. Schauerlich muß der Eindruck des Bildes eines belgischen Malers sein, das in starker Verkürzung eine Leiche auf dem Secirtische zeigt, deren starr geöffnete Augen man zwischen ihren Fußspitzen erblickt, und die sich bei der Bewegung des Beschauers um ihren Kopf zu drehen, bei einem Sprunge desselben sich aber herumzuwerfen scheint.

**580.** Betrachten wir nun unter diesen Gesichtspunkten die scheinbare Richtung des menschlichen Blickes*). Die *wirkliche Sehrichtung*, d. i. die Sehrichtung eines wirklichen Auges, ist die Richtung des deutlichen Sehens und verbindet den optischen Mittelpunkt des Auges mit der Netzhautgrube; außerhalb des Augapfels steht sie in der Mitte der Pupille senkrecht auf der Oberfläche der Horn-

*) Es sind hier wesentlich die Ergebnisse der interessanten Untersuchungen benutzt, welche *Wollaston* in seiner Abhandlung veröffentlicht hat: On the apparent direction of eyes in a portrait (Philosophical transactions of the royal society of London, 1824, S. 247).

haut, was man daran erkennt, daß man in dem Auge eines Anderen, das unser Auge anschaut, das Spiegelbild des eigenen Gesichtes verkleinert, wie durch einen konvexen Spiegel, in der Mitte der Pupille erblickt, oder auch mittelst eines Spiegels im eigenen Auge (durch eine dreifache Spiegelung). Daraus ergibt sich als zunächst liegendes Unterscheidungszeichen dafür, ob die Sehrichtung oder der Blick eines Auges gegen den Beschauer gerichtet ist oder nicht, daß im ersteren Falle die Regenbogenhaut oder *Iris kreisförmig*, im zweiten *elliptisch* erscheint, und daß der Blick um so stärker abgewendet erscheint, je größer die Abweichung der Ellipse vom Kreise ist. Dieses Kennzeichen bietet aber zunächst nicht die Genauigkeit, die man bei der Beurteilung der Richtung des Blickes in Wirklichkeit erreicht. Denn nach Versuchen des Verfassers kann man ziemlich sicher unterscheiden, ob der Blick eines in 80 cm Abstand befindlichen fremden Gesichtes auf die Nasenwurzel, auf das eine oder das andere Auge, oder auf die eine oder die andere Schläfe gerichtet ist. Da nun der Abstand der letzteren von eiander 14 cm beträgt, so könnte man Drehungen von $(\frac{1}{4}14):80 = 0{,}044 = 2\frac{1}{2}^0$ noch ziemlich sicher unterscheiden, während durch eine solche Drehung der scheinbare Kreis der Iris zu einer scheinbaren Ellipse wird, deren Axen sich wie $1:\cos 2\frac{1}{2}^0 = 1000:999$ verhalten, so daß man die Abweichung vom Kreise entfernt nicht erkennen kann, da dies schon bei der Ellipse der Fig. 232 einige Aufmerksamkeit erfordert, bei welcher jenes Verhältniß $= 20:19$ ist, und welcher eine Drehung von $18^0$ entsprechen würde. Sodann aber, wenn uns ein Portrait mit kreisförmiger Iris anzublicken scheint, wenn wir uns gerade davor stellen, scheint es uns auch dann noch anzublicken, wenn wir uns stark seitwärts stellen, die Iris also stark elliptisch erscheint. Und endlich ist leicht zu beobachten, z. B. bei den beiden Figuren 235 und 236, daß es auch möglich ist, daß ein Portrait mit kreisförmiger Iris seitwärts zu blicken scheint.

**581.** Wir wollen *Gesichtsnormale* die Gerade nennen, welche von der Nasenwurzel aus senkrecht zur Gesichtsebene gezogen wird, und als *Gesichtsebene* diejenige Ebene bezeichnen, welche die Stirne und die Oberlippe unmittelbar unter der Nase berührt und gleichweit von beiden Augäpfeln entfernt ist. Dann kann man sagen, *daß die Richtung des Blickes eines Gesichtes gegen den Beschauer von der Stellung der Sehrichtung dieses Gesichtes gegen die Gesichtsnormale und von der Stellung der Gesichtsnormale gegen die Richtung nach den Augen des Beschauers abhängt.* Der erstere Umstand ist von der Stellung des Augapfels in der Augenhöhle bedingt, und diese erkennt man an der Verteilung des zwischen der Iris und den Augen-

lidern sichtbaren Weiß. Erscheint rechts und links nahezu gleich viel Weiß, so erkennt man, daß der Blick gerade vorwärts gerichtet ist; erscheint zugleich bei natürlich geöffneten Augenlidern unten etwas mehr Weiß, wie oben, so erkennt man, daß die Sehrichtung in der Gesichtsnormale liegt. Je mehr das Verhältniß des Weiß an den angegebenen Stellen von den bezeichneten Verhältnissen abweicht, um so mehr weicht die Sehrichtung nach der einen oder der anderen Seite von der Gesichtsnormale ab. — Andererseits erkennt man die gegen das Auge des Beschauenden gekehrte Richtung der Gesichtsnormale daran, daß die beiden Wangen und Schläfen gleich ausgedehnt und die Augen in der Höhe der oberen Ohrränder erscheinen, daß der obere Kopfumriß sich auf der vorderen Kopfhälfte zeigt, und daß die Nasenspitze, die Oberlippe und das Kinn den Hals in geringem Grade decken. Abweichungen von diesen Erscheinungen bringen entsprechende Abweichungen in der Vorstellung der Richtung der Gesichtsnormale hervor. — Die Stellung der Sehrichtung gegen die Gesichtsnormale und der Gesichtsnormale gegen die Augen des Beobachters bestimmen zusammen die Sehrichtung des Gesichtes gegen den Beobachter, oder die *scheinbare Richtung seines Blickes.* Da nun bei einem Portrait die Verhältnisse der Ausdehnungen des sichtbaren Weiß an den verschiedenen Stellen des Augapfels und die der Gesichtsteile sich nicht ändern, wenn der Beobachter seinen Standpunkt ändert, so ändert sich dabei auch die Richtung des Blickes gegen den Beschauer nicht.

**582.** Wenn man aber den einen der beiden Umstände ändert, den andern aber ungeändert läßt, so *ändert sich die scheinbare Richtung des Blickes.* Bleibt die Ansicht des Gesichtes ungeändert, bewegt sich aber die Iris zwischen den Augenlidern, so ändert sich auch die Richtung des Blickes gegen die Gesichtsnormale und gegen den Beschauer, und dies wird als selbstverständlich angenommen. Überraschend wirkt es aber, daß, wenn man die Ansicht des Auges ungeändert läßt, diejenige des übrigen Gesichtes aber ändert, jedoch nicht mehr, als einer Drehung von 20 bis 30° entspricht, sich die scheinbare Richtung des Blickes ändert. Es ist aber ganz erklärlich, da zwar die Stellung der Sehrichtung gegen die Gesichtsnormale ungeändert bleibt, die Stellung der Gesichtsnormale und mit ihr der Sehrichtung gegen den Beschauer sich aber ändert. So scheint das Portrait der Figur 235*) uns anzuschauen; auf seiner linken Seite des Augapfels ist weniger Weiß sichtbar, die Sehrichtung Fig. 235.

*) Diese und die folgende Figur sind solchen der angeführten Abhandlung von *Wollaston* nachgebildet.

ist daher nach links gekehrt. Andererseits ist seine rechte Wange stärker verkürzt, die Gesichtsnormale daher, von dem Gesichte aus gesehen, nach rechts von uns abgelenkt; und da diese beiden Ablenkungen entgegengesetzten Sinn haben, so heben sie sich auf, wenn sie der Größe nach gleich sind; und dies ist im Bilde der Fall. Ändert man aber durch das Deckblatt der Figur das Bild des unteren Gesichtes, während die Augen dieselben bleiben, die Stirne aber ganz weggelassen wurde, so erscheint nicht mehr die rechte, sondern die linke Wange stärker verkürzt, und es ist die Gesichtsnormale, vom Gesichte aus gerechnet, links von uns abgelenkt; beide Abweichungen haben dann gleichen Sinn, addiren sich, und der scheinbare Blick geht um so mehr links an uns vorbei (rechts für den Beschauer). Auch ist in der zweiten Ansicht der Blick wegen geringerer Überdeckung an Nasenspitze und Kinn etwas mehr aufwärts gerichtet.

Fig. 236. Die Figur 236 zeigt auch, wie der *geistige Ausdruck* hauptsächlich durch den unteren Gesichtsteil und nur sehr wenig durch das Auge bestimmt wird. Bei Überdeckung des unteren Teiles sieht man ein aufwärts gerichtetes Kindergesicht mit aufwärts gerichtetem Blicke und einem andächtig schwärmerischen Ausdrucke; ohne Überdeckung dagegen ein abwärts gerichtetes Gesicht eines älteren Mädchens mit auf uns gerichtetem Blicke und einem schelmischen und lauernden Ausdrucke. Ohne daß sich die Augen änderten, hat sich ihr Ausdruck geändert. Die etwas nach oben gewölbte Form der unteren Augenlider ist beim ersten Bilde nur eine scheinbare, von der nach oben gekehrten Richtung des Gesichtes herrührende, beim zweiten Bilde eine wirkliche durch das Lächeln bewirkte.

Eine solche Änderung der scheinbaren Sehrichtung eines Portraits, welches an demselben ohne Änderung der Augen mit alleiniger Änderung des unter den Augen liegenden Gesichtsteiles bewirkt wird, führt Fehler in der Abbildung der Augen mit sich, die ja für jedes Untergesicht etwas anders erscheinen, sowie noch mehr Fehler in der Stirne, wenn auch diese gezeichnet ist und ungeändert bleibt. Was die Stirne betrifft, so ist sie im ersten Bilde ganz weggelassen und kann verdeckt gedacht werden; im zweiten Bilde aber wurden, um die Fehler weniger merklich zu machen, die Haare in etwas unbestimmter Weise dargestellt, ohne die Form des Kopfes deutlich zu zeigen. Damit aber auch an den Augen die Fehler nicht auffallend werden, darf man nur eine geringe Drehung, bis zu 20 oder höchstens 30°, herbeiführen. Aus der Gestalt des Auges allein, dabei weniger der Iris, als der Augenlider, kann schon auf die scheinbare Richtung des Blickes geschlossen werden; aber diese Schlüsse sind

selbst für Kenneraugen sehr unsicher, wie ich mit Portrait-Photographien erprobte, deren Blick nahezu auf den Beschauer gerichtet war, und die ich mit Papier derart zudeckte, daß durch zwei Ausschnitte nur die Augen mit ihren Lidern sichtbar waren. Ich bat dann Künstler, die Nase mit ihrer seitlichen Neigung darunter zu zeichnen; dabei kamen dann öfter Irrthümer vor, oder die Beobachter widersprachen sich. Dagegen ist das aus der Gesichtsstellung hervorgehende Urteil ein nicht schwankendes; und das Bild des Gesichtes ist maßgebend selbst entgegen den Fehlern in der Augenzeichnung, die bei den letzten Figuren wenigstens bei einer der beiden Ansichten vorhanden sein müssen.

## IV. Reliefperspektive.

**583.** Die Reliefperspektive krummer Flächen wollen wir nur bei *Flächen zweiten Grades* betrachten. In I, 554 ff. haben wir als kollineare räumliche Systeme nur solche angesehen, die sich in perspektiver Lage befinden oder in dieselbe gebracht werden können; und in II, 80 haben wir diesen Begriff auf nicht perspektive Gebilde erweitert und gefunden, daß zwei derart kollineare räumliche Systeme im allgemeinen nicht unter einander, wohl aber mit ein und demselben dritten Systeme, und zwar auf unendlich viele Arten in perspektive Lage gebracht werden können. Zugleich ergab sich (81), daß jede Fläche zweiten Grades, wenn sie nicht geradlinig ist, mit einer Kugel, wenn geradlinig, mit einem einschaligen Umdrehungshyperboloide kollinear ist. Man kann sich leicht durch Betrachtungen, wie die in Nr. 80, überzeugen, daß man zwei beliebige, nicht geradlinige, oder zwei geradlinige Flächen zweiten Grades auf unendlich viele Weisen in perspektive Lage bringen kann, wenn man nur die nach Nr. 81 anzunehmenden fünf bestimmenden Punkte nicht alle willkürlich wählt. Wir wollen uns im Folgenden darauf beschränken, aus einer Kugel durch perspektive Kollineation nach I, 554 eine Fläche zweiten Grades abzuleiten.

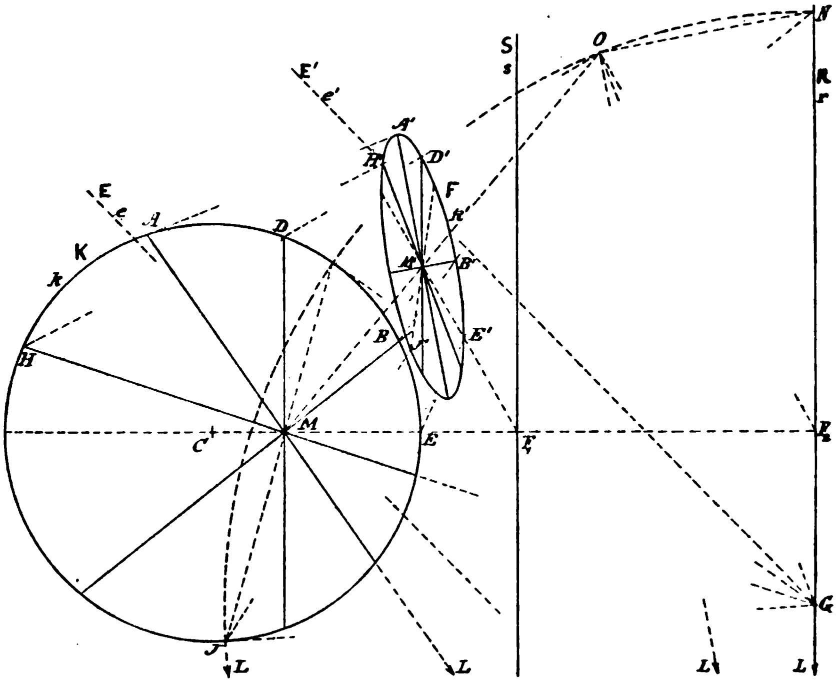
**584.** *Aufg. Aus einer Kugel* **K** *durch perspektive räumliche Kollineation eine Fläche zweiten Grades* **F** *abzuleiten, und ihre Kreisschnitte und Axen zu bestimmen**).

*Aufl.* Sei $\Sigma$ das räumliche System der **K**, $\Sigma'$ das der **F**. Eine durch das Auge $O$ und den Mittelpunkt $C$ der **K** senkrecht zur Kol- Fig. 237.

*) Die folgende Auflösung wurde von *Morstadt* gegeben in seinem Aufsatze: Über die räumliche Projection (Reliefperspective) und namentlich diejenige der Kugel (Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys., B. 12, 1867, S. 326).

lineationsebene **S** gelegte Ebene **P** ist eine Symmetrieebene von $O$, **K** und **S**, daher auch von **F**, d. i. eine Hauptebene der **F**. Man benutze **P** als Projektionsebene für die Figur; auf ihr steht auch die mit **S** parallele Gegenebene **R** des Systemes $\Sigma$ senkrecht, welche der unendlich fernen Ebene **R**$'$ des $\Sigma'$ entspricht. Die Kugel **K** wird durch ihren (größten) Spurkreis $k$, die Ebenen **S** und **R** werden durch ihre Spuren $s$ und $r$ in **P** dargestellt. Man bestimme den Pol $M$ von **R** zu **K**, d. i. auch den Pol von $r$ zu $k$. Der Punkt $M'$ im Systeme

Fig. 237.




$\Sigma'$, welcher dem $M$ entspricht, ist der Pol der unendlich fernen Ebene **R**$'$ zu **F**, oder der Mittelpunkt der **F** und ihres in **P** liegenden, dem $k$ entsprechenden Hauptschnittes $k'$. $M'$ liegt auf $OM$ und wird gefunden, wenn man durch $M$ irgend eine Gerade, etwa die Senkrechte zu **S**, legt, und mit **S** und **R** bezw. in $F_1$ und $F_2$ schneidet; dann ist die $\parallel OF_2$ durch $F_1$ gezogene $F_1M'$ die Abbildung der $MF_1F_2$ und trifft die $OM$ in $M'$.

Es ist zweckmäßig, zunächst *die Stellungen der Ebenen der beiden Schaaren paralleler Kreisschnitte der* **F** zu bestimmen. Die erste Stellung ist die der Kollineationsebene **S**, weil die mit **S** parallelen Kreise der Kugel **K** sich als mit **S** parallele Kreise der **F** abbilden.

Die mit $s$ parallele Halbsehne $MD$ des $k$ bildet sich als der mit $s$ parallele Halbdurchmesser $M'D'$ des $k'$ und der **F** ab, und dieser ist als Halbmesser eines Diametralkreises gleich der halben mittleren Axe der **F**, welche auf der Hauptebene **P** senkrecht steht, weil auf dieser Hauptebene die Ebene des Kreisschnittes senkrecht steht (124). Da $MEF_1$ in Bezug auf $k$ (und **K**) konjugirt zu $MD$ ist, so ist es auch $M'E'F_1$ zu $M'D'$, oder $E'$ ist ein *Nabelpunkt* der **F** (534). Durch die zwei konjugirten Halbdurchmesser $MD'$, $ME'$ ist $k'$ bestimmt, und es könnten aus ihnen die Axen des $k'$, das sind auch die kleine und große Axe der **F**, und daraus die zweite Diametralkreisebene ermittelt werden. Doch ergibt sich alles dies auch leicht unmittelbar aus **K**.

**585.** Die unendlich ferne Gerade $g'$ (in **R**'), in welcher sich die Ebenen einer Kreisschaar der **F** schneiden, enthält eine Involution von Punkten, welche in Bezug auf diese Kreise konjugirt sind, also aus jedem Punkte von endlichem Abstande, so aus $O$, durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt wird. Die entsprechende Gerade $g$ im Systeme $\Sigma$ enthält eine Involution konjugirter Punkte in Bezug auf **K**, und wird, weil mit $g'$ perspektiv, aus $O$ durch dieselbe Rechtwinkelinvolution projicirt. Der Mittelpunkt $U$ der Involution auf $g$ ist der Fußpunkt der aus dem Kugelmittelpunkte $C$ auf $g$ gefällten Senkrechten und wird bei der Rechtwinkelinvolution aus $O$ ebenfalls durch eine Senkrechte zu $g$ projicirt; daher muß $g \perp$ Ebene $UOC$ oder $g \perp OC$ stehen. Nun gibt es aber zwei auf $OC$ senkrechte Ebenen, in welchen jede Gerade eine $g$ ist, und außer diesen Ebenen gibt es keine $g$. Die *eine dieser Ebenen ist die unendlich ferne* **R**', weil jede $g$ in **R**' eine Involution in Bezug auf **K** enthält, die aus $C$ und dann auch aus $O$ durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt wird. — *Die zweite Ebene* **E**' ist mit der Polarebene **E** von $O$ zu **K** parallel, daher $\perp OC$, und liegt in der Mitte zwischen $O$ und **E**. Denn in Bezug auf $O$ und **E** als Mittelpunkt und Ebene der Kollineation ist **K** mit sich selbst in involutorischer Kollineation (73), und hierbei entspricht der unendlich fernen **R**' jene Ebene **E**', so daß die Involution auf jeder $g$ der **R**' und diejenige der entsprechenden $g$ der **E**', welche also ebenfalls durch konjugirte Punkte in Bezug auf **K** gebildet wird, beide aus $O$ durch dieselbe Rechtwinkelinvolution projicirt werden.

Außerhalb der Ebenen **R**', **E**' gibt es keine Gerade $g$; denn zieht man eine andere Gerade $q \perp OC$, legt durch sie und durch $O$ eine Ebene, schneidet diese mit **K** in einem (reellen oder imaginären) Kreise $c$, dessen Mittelpunkt $C'$ sei, und denkt sich in dieser Ebene alle zu $OC$ (und $OC'$) senkrechte Geraden $q$ geführt

und auf jeder die Involution konjugirter Punkte in Bezug auf $c$ bestimmt, so sind von allen $q$ nur diejenigen eine $g$, deren Involution aus $O$ durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt wird, bei denen also die zugeordneten von $OC'$ auf entgegengesetzten Seiten gleich weit entferntem Punkte auf den Geraden $i$, $i'$ liegen, die man aus $O$ unter 45° gegen $OC'$ zieht. Da nun die Gesamtheit dieser Punktepaare die ideellen Schnittpunkte der Geraden $q$ mit dem Kreise $c$ in Bezug auf den unendlich fernen Punkt $Q$ der $q$ sind und daher den zu $c$ in Bezug auf $Q$ konjugirten Kegelschnitt $c'$ bilden (I, 400 ff.), d. i. eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten mit $OC'$ Winkel von 45° einschließen, und da diese $c'$ von den $i$, $i'$ in vier Punkten getroffen wird, welche zu zwei symmetrisch in Bezug auf $OC'$ liegen, so gibt es unter den $q$ nur zwei Gerade $g$, nämlich die bezeichneten Symmetriestrahlen, von denen der eine unendlich fern (in R′) liegt, der andere daher nur die in der Ebene E′ gelegene $g$ sein kann.

Da nun die Axen $g'$ der Ebenenbüschel der Kreisschnitte der F in der unendlich fernen Ebene R′ liegen, so liegen ihre entsprechenden $g$ in der Gegenebene R; sie sind also die Schnittlinien der R mit R′ und mit E′ und bilden die Axen $g$ der Ebenenbüschel der Kugelschnitte, welche den Kreisschnitten der F entsprechen. Es sind dies die schon erhaltene unendlich ferne Gerade der R (und der S) und die auf der Zeichenfläche P senkrechte Gerade $g$, welche sich in dem Schnittpunkt $re' = G$ projicirt. Dem Strahle $GM$ und seinem Schnittpunkte $H$ mit $k$ entsprechen daher der mit $OG$ parallele Strahl $M'H'$ und sein Schnittpunkt $H'$ mit $k'$, so daß $M'H'$ ein Halbmesser des zweiten Diametralkreises ist, wobei $M'H' = M'D'$. Dem zu $MH$ in Bezug auf $k$ konjugirten $MJ$ (der Polare von $G$) entspricht die zu $M'H'$ in Bezug auf $k'$ konjugirte $M'J'$, und bestimmt einen weiteren *Nabelpunkt* $J'$ ($M'J' = M'E'$).

Zieht man aus $G$ einen Kreis durch $O$, und schneidet ihn mit $r$ in $L$ und $N$, und mit $k$ in zwei Punkten, so ist einer derselben der schon erhaltene Punkt $J$ und die Verbindungslinie beider ist die Polare von $G$ zu $k$, so daß die Tangente in $J$ an $k$ durch $G$ geht. Denn die $e'$ ist (neben der unendlich fernen Geraden $r'$) die *Potenzlinie* des $k$ und des als unendlich kleiner Kreis gedachten Punktes $O$, d. i. ihre gemeinschaftliche Sehne, oder auch die Linie, von deren Punkten aus die Tangenten an $k$ und $O$ gleich lang sind. Sie ist es, weil sie die Mittelpunkte der aus $O$ an $k$ gezogenen (in Punkte der $e$ berührenden) Tangenten enthält. Daraus ergibt sich aber ebenfalls, daß sich die Involution auf der $g$ ($\perp$ P durch $G$) in Bezug auf K aus $O$ durch eine Rechtwinkelinvolution projicirt, weil

die Involution konjugirter Tangenten der **K** in $J$ ebenfalls rechtwinklig und weil $GO = GJ$ ist.

**586.** Die *Halbaxen* $M'A'$, $M'B'$ des $k'$ halbiren den Winkel $D'M'H'$ und seinen Nebenwinkel, sind also parallel mit $OL$ und $ON$, weil diese Linien gleiche Winkel mit $r$ und mit $OG$ bilden-sie entsprechen den in $ML$ und $MN$ liegenden Sehnenstücken $MA$ und $MB$.

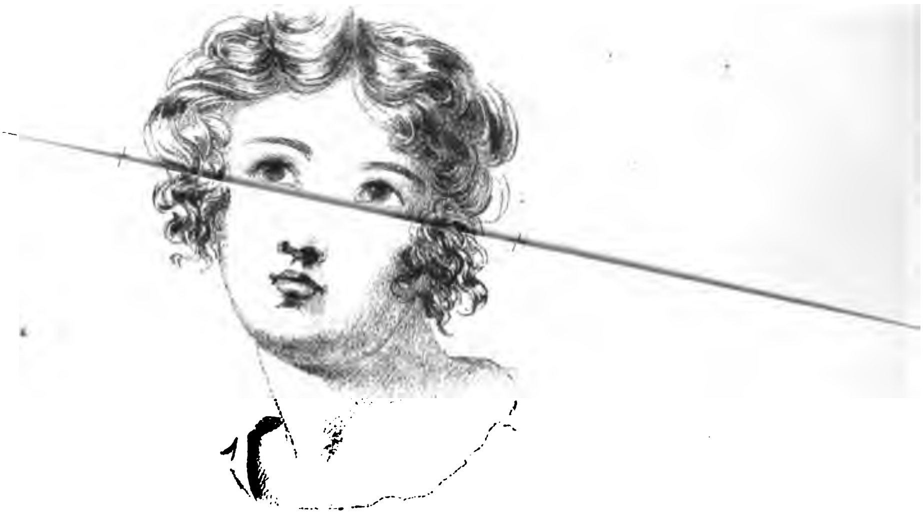
Hierdurch ist eine *sehr einfache Konstruktion der Axen des zum Kreise $k$ central-kollinearen Kegelschnittes $k'$ gegeben.*

Die Nichtregelfläche zweiten Grades **F** ist ein *Ellipsoid*, ein *elliptisches Paraboloid* oder ein *zweischaliges Hyperboloid*, je nachdem die Kugel **K** in der Gegenebene **R** keinen reellen Punkt oder einen solchen, oder eine reelle Kurve enthält, weil die **F** die entsprechen; den Elemente in der unendlich fernen Ebene **F'** besitzt.









Die Abbildung **links**
ist Figur **235** (zu Seite 643),
die Abbildung **rechts**
ist Figur **236** (zu Seite 644).

